

高次せん断変形理論に基づく Spline 帯板法を用いた積層複合板の振動解析について

VIBRATION OF FIBER-COMPOSITE LAMINATED PLATES BY THE SPLINE STRIP METHOD
BASED ON A HIGHER-ORDER SHEAR DEFORMATION THEORY

水澤富作*

鬼頭博史**

By Tomisaku MIZUSAWA and Hiroshi Kito

This paper presents a formulation of the spline strip method which is a semi-analytical model based on the higher-order shear deformation theory to analyse vibration of rectangular fiber-composite laminated plates. To demonstrate accuracy of the present method, some examples are solved, and the results are compared with those obtained by other laminated theories. The effect of thickness ratio, moduli ratio and stacking sequence of lamina on the frequencies of symmetrically cross-ply laminated plates and antisymmetrically angle-ply laminated plates are investigated.

Key Words: higher-order shear deformation theory, vibration
spline strip method, composite laminated plates,

1. はじめに

先端複合材料である繊維強化複合材料 (FRP)^{1, 2)} は、単一材料では得がたい大きな比剛性、比強度や耐衝撃性などに優れた力学的特性を有するので、構造軽量化が重要な広い産業分野で使用されている。複合積層板は、金属材料の転位論による強化手段と異なり、単純な力学的強化機構に依存している。このような積層板は、強い異方性を示すとともに、面内剛性と比較して横せん断剛性が極めて小さいのが特徴であり、その動力学的特性を明らかにすることが設計上重要な課題になっている。

これまでも、非常に多くの対称積層板や非対称積層板の振動解析が行われ、また積層板に関する研究展望³⁻⁵⁾ も報告されているが、限られた条件での振動特性の研究が中心で、強い異方性材料の積極的な活用や信頼性の高い解析手法の開発などが必要になってきている。

このような積層板理論には⁶⁾、等価な単一板に置き換えた積層板理論、各積層の適合条件を考慮した離散化積層理論や3次元異方性理論などが用いられてきており、平均的な挙動か局所的挙動かにより使い分けられてきている。横せん断変形や回転慣性の影響を無視した古典積層板理論は、古くからその適用限界の問題が指摘されている。積層板で重要になる横せん断変形の影響を考慮するために、Yangら⁷⁾ やWhitneyら⁸⁾ により一次せん断変形積層板理論が提案され、厳密解法やRayleigh-Ritz法、Galerkin法、有限要素法、選点

* 工博 大同工業大学助教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40)

** 大同工業大学大学院 工学研究科建設工学専攻 (〒457 名古屋市南区白水町40)

法や有限帯板法などの数値解析法を用いて積層板問題が解析されている^{2,8)}。しかしながら、一次せん断変形積層板理論では、横せん断変形を考慮するために、せん断修正係数を仮定しなければならず、等方性・等質理論の場合と異なり修正係数の決定に問題が見られ⁹⁾、また厚さ方向の影響が無視されている。このような問題点を考慮するために、種々の高次のせん断変形理論が提案されている^{4, 6)}。その先駆的な研究として、厚さ方向の変位を高次の変位関数で仮定したLo-Christensen-Wuの高次のせん断変形理論^{10, 11)}が挙げられる。この理論では、11個のそれぞれ独立した変位関数が仮定されるが、板表面の応力の境界条件の取扱いに問題点も指摘されている。したがって、この理論を有限要素法に適用すると、その自由度数が非常に大きくなるのであまり実用的な理論とは思われない。一方、この板表面の応力の境界条件を考慮した高次のせん断変形理論がLevinson-Murthy-Reddyの板理論¹²⁻¹⁴⁾であり、Reddyらの研究グループが精力的に積層板に関する研究¹⁵⁻²¹⁾を進めている。また、Reissnerの高次せん断変形理論²¹⁾に基づくKantらの研究²²⁾やHintonらの研究²³⁾があり、根岸ら²⁴⁾の一般化高次せん断変形理論に基づく研究も挙げられる。

しかしながら、これらの高次のせん断変形理論では、一次せん断変形理論で必要になる修正せん断係数を導入する必要はないが、高次化に伴い物理的に意味を持たない高次の力学量を考慮する必要があり、変位型有限要素法への適用にあたり高次の導関数が現れる場合には、高次の変位関数を用いる必要がある。また、これらの理論を用いた解析例もかなり限定されているので、より広範囲な数値解析法への適用についても検討し、解析理論の信頼性を評価する必要があると思われる。

本研究では、Reddyの高次せん断変形理論に基づく新しいスプライン帯板法を提案する。本手法を用いて、積層複合板の振動解析を行い、本手法の解析精度や高次せん断変形理論と他の積層板理論による解の比較検討を行う。また、対称クロス・プライ積層板や逆対称アングル・プライ積層板の振動特性に与える積層数、弾性係数比、幅厚比、配向角や境界条件などの影響についても明らかにしている。

2. 解析手法

Fig. 1に示される積層板の各積層(ラミナ)は直交異方性材料から成り、それぞれ完全に接着しているものと仮定する。材料主軸(1, 2)方向の弾性係数を E_1, E_2 、ポアソン比を ν_{12} 及びせん断弾性係数を G_{12}, G_{13}, G_{23} で表す。Reddyの高次せん断変形理論¹⁴⁾とポテンシャルエネルギーの最小化原理を用いてスプライン帯板モデルを定式化する。この帯板要素は、長手方向の変位に7-11級数展開し、他の方向の変位にB-spline関数を仮定している。このスプライン関数の次数を高めることにより、任意の高次のスプライン帯板モデルが導かれる。

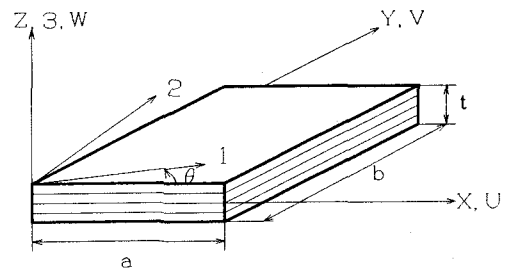


Fig. 1 Composite laminated plate and co-ordinate systems

式の定式化にあたり、次式で表される無次元座標系を用いる。

$$\xi = X/a, \quad \eta = Y/b, \quad \zeta = Z/t \quad (1)$$

ここで、 a は積層板の幅、 b は長さ、 t は厚さである。

Reddyの高次せん断変形理論では、それぞれ独立した次式のような変位関数が仮定される。

$$\begin{aligned} \bar{u}(\xi, \eta, \zeta) &= t \left[U(\xi, \eta) + \zeta \phi_x(\xi, \eta) - (4/3)\zeta^3 \left\{ (t/a) \partial W(\xi, \eta) / \partial \xi + \phi_x(\xi, \eta) \right\} \right] \\ \bar{v}(\xi, \eta, \zeta) &= t \left[V(\xi, \eta) + \zeta \phi_y(\xi, \eta) - (4/3)\zeta^3 \left\{ (t/b) \partial W(\xi, \eta) / \partial \eta + \phi_y(\xi, \eta) \right\} \right] \\ \bar{w}(\xi, \eta, 0) &= t W(\xi, \eta) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 U と V は面内変位、 ϕ_x と ϕ_y は回転角、 W はたわみを示す。したがって、逆対称アングル・プライ積

層板のためのスプライン帯板要素で仮定される5つの変位関数は、それぞれ次式のように表される。

$$\begin{aligned}
 U &= \sum_{m=1}^r \{ \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{n,k}(\eta) \} Z_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N]_n Z_m(\xi) \{ \delta_A \}_m \\
 V &= \sum_{m=1}^r \{ \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{n,k}(\eta) \} \bar{Z}_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N]_n \bar{Z}_m(\xi) \{ \delta_B \}_m \\
 W &= \sum_{m=1}^r \{ \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{n,k}(\eta) \} Z_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N]_n Z_m(\xi) \{ \delta_C \}_m \\
 \phi_x &= \sum_{m=1}^r \{ \sum_{n=1}^{i_y} D_{mn} N_{n,k}(\eta) \} \bar{Z}_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N]_n \bar{Z}_m(\xi) \{ \delta_D \}_m \\
 \phi_y &= \sum_{m=1}^r \{ \sum_{n=1}^{i_y} E_{mn} N_{n,k}(\eta) \} Z_m(\xi) = \sum_{m=1}^r [N]_n Z_m(\xi) \{ \delta_E \}_m
 \end{aligned} \tag{3}$$

ここで、 $[N]_n = [N_{1,k}(\eta), N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_y,k}(\eta)]$, $\{ \delta_A \}_m = \{ A_1, A_2, \dots, A_{i_y} \}_m^T$, $\{ \delta_B \}_m = \{ B_1, B_2, \dots, B_{i_y} \}_m^T$, $\{ \delta_C \}_m = \{ C_1, C_2, \dots, C_{i_y} \}_m^T$, $\{ \delta_D \}_m = \{ D_1, D_2, \dots, D_{i_y} \}_m^T$, $\{ \delta_E \}_m = \{ E_1, E_2, \dots, E_{i_y} \}_m^T$ である。また、 $i_y = k-1 + M_y$, $Z_m(\xi)$ と $\bar{Z}_m(\xi)$ は、与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化されたB-spline関数であり、 $k-1$ は、B-spline関数のSpline次数、 M_y は y 方向の帯板要素の分割数である。 r は、固有関数の級数の項数である。式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = \sum_{m=1}^r [S]_{mn} \{\Delta\}_{mn} \tag{4}$$

ただし、 $\{d\} = \{\bar{U}, \bar{V}, \bar{W}\}^T$, $\{\Delta\}_{mn} = \{\{ \delta_A \}_m, \{ \delta_B \}_m, \{ \delta_C \}_m, \{ \delta_D \}_m, \{ \delta_E \}_m\}^T$ であり、 $[S]_{mn}$ は、

$$[S]_{mn} = t \begin{pmatrix} [N]_n Z_m(\xi) & 0 & -(4/3)(t/a)(z/t)^3 [N]_n \dot{Z}_m(\xi) & \{(z/t) - (4/3)(z/t)^3\} [N]_n \bar{Z}_m(\xi) & 0 \\ 0 & [N]_n \bar{Z}_m(\xi) & -(4/3)(t/b)(z/t)^3 [\dot{N}]_n Z_m(\xi) & 0 & \{(z/t) - (4/3)(z/t)^3\} [N]_n Z_m(\xi) \\ 0 & 0 & [N]_n Z_m(\xi) & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

で与えられる。 $\dot{Z}_m(\xi) = \partial Z_m(\xi) / \partial \xi$, $[\dot{N}]_n = \partial [N]_n / \partial \eta$ である。

次に、高次せん断変形理論で定義される垂直及びせん断ひずみを無次元座標系で表せば、

$$\begin{aligned}
 \{\varepsilon\} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ox} \\ \varepsilon_{oy} \\ \gamma_{oxy} \\ \gamma_{oxz} \\ \gamma_{oyz} \end{Bmatrix} + (z/t) \begin{Bmatrix} K_{1x} \\ K_{1y} \\ K_{1xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + (z/t)^2 \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_{2xz} \\ K_{2yz} \end{Bmatrix} + (z/t)^3 \begin{Bmatrix} K_{3x} \\ K_{3y} \\ K_{3xy} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\
 &= [T] \{\varepsilon_0\}
 \end{aligned} \tag{6}$$

で与えられる。ここで、 $\varepsilon_{ox} = (t/a) \partial U / \partial \xi$, $\varepsilon_{oy} = (t/b) \partial V / \partial \eta$, $\gamma_{oxy} = (t/b) (\partial U / \partial \eta) + (t/a) (\partial V / \partial \xi)$, $\gamma_{oxz} = \phi_x + (t/a) \partial W / \partial \xi$, $\gamma_{oyz} = \phi_y + (t/b) \partial W / \partial \eta$, $K_{1x} = (t/a) \partial \phi_x / \partial \xi$, $K_{1y} = (t/b) \partial \phi_y / \partial \eta$, $K_{1xy} = (t/a) \partial \phi_y / \partial \xi + (t/b) \partial \phi_x / \partial \eta$, $K_{2xz} = -4 \{ \phi_x + (t/a) \partial W / \partial \xi \}$, $K_{2yz} = -4 \{ \phi_y + (t/b) \partial W / \partial \eta \}$, $K_{3x} = -(4/3) \{ (t/a)^2 \partial^2 W / \partial \xi^2 + (t/a) \partial \phi_x / \partial \xi \}$, $K_{3y} = -(4/3) \{ (t/b)^2 \partial^2 W / \partial \eta^2 + (t/a) \partial \phi_y / \partial \eta \}$, $K_{3xy} = -(4/3) \{ 2(t/a)(t/b) \partial^2 W / \partial \xi \partial \eta + (t/b) \partial \phi_x / \partial \eta \}$

$+(t/a) \ominus \phi y / \ominus \xi$ } である。また、 $[T]$ は次式で表される。

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (z/t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z/t)^3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & (z/t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z/t)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & (z/t) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (z/t)^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (z/t)^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & (z/t)^2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式(3)を式(6)に代入すれば、次式の関係式で表される。

$$\{\varepsilon_0\} = \sum_{m=1}^r [B]_{mn} \{\Delta\}_m \quad (8)$$

ここで、 $[B]_{mn}$ はひずみマトリックスであり、次式で与えられる。

$$[B]_{mn} = \sum_{n=1}^{i_y} \begin{pmatrix} (t/a)N_{n,k} \dot{Z}_m & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (t/b)\dot{N}_{n,k} \bar{Z}_m & 0 & 0 & 0 \\ (t/b)\dot{N}_{n,k} Z_m & (t/a)N_{n,k} \dot{\bar{Z}}_m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (t/a)N_{n,k} \dot{\bar{Z}}_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (t/b)\dot{N}_{n,k} Z_m \\ 0 & 0 & 0 & (t/b)\dot{N}_{n,k} \bar{Z}_m & (t/a)N_{n,k} \dot{Z}_m \\ 0 & 0 & (t/a)N_{n,k} \dot{\bar{Z}}_m & N_{n,k} \bar{Z}_m & 0 \\ 0 & 0 & (t/b)\dot{N}_{n,k} Z_m & 0 & N_{n,k} Z_m \\ 0 & 0 & -4(t/a)N_{n,k} \dot{Z}_m & -4N_{n,k} \bar{Z}_m & 0 \\ 0 & 0 & -4(t/b)\dot{N}_{n,k} Z_m & 0 & -4N_{n,k} Z_m \\ 0 & 0 & -(4/3)(t/a)^2 N_{n,k} \ddot{Z}_m & -(4/3)(t/a)N_{n,k} \dot{\bar{Z}}_m & 0 \\ 0 & 0 & -(4/3)(t/b)^2 \dot{N}_{n,k} Z_m & 0 & -(4/3)(t/b)\dot{N}_{n,k} Z_m \\ 0 & 0 & -(8/3)(t/b)(t/a)\dot{N}_{n,k} \dot{Z}_m & -(4/3)(t/b)\dot{N}_{n,k} \bar{Z}_m & -(4/3)(t/a)N_{n,k} \dot{Z}_m \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし、 $\dot{N}_{n,k} = \ominus N_{n,k}(\eta) / \ominus \eta$, $\dot{Z}_m = \ominus Z_m(\xi) / \ominus \xi$, $\dot{\bar{Z}}_m = \ominus \bar{Z}_m(\xi) / \ominus \xi$ などである。

各積層は直交異方性材からなり、次式の構成方程式で表される。

$$\{\sigma\} = [d] \{\varepsilon\} \quad (10)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \tau_{xy} \ \tau_{xz} \ \tau_{yz}\}$ であり、弾性マトリックス、 $[d]$ は、

$$[d] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{55} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & C_{54} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (11)$$

ただし、 $C_{11} = E_1 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $C_{22} = E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $C_{12} = \nu_{12}E_2 / (1 - \nu_{12}\nu_{21})$, $C_{55} = G_{12}$, $C_{44} = G_{23}$, $C_{54} = G_{13}$ である。

ファイバーの強化方向がx軸と成す角度(配向角)を θ とすれば、各積層の構成方程式は、次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{54} & Q_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここで、 Q_{ij} は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Q_{11} &= C_{11} \cos^4(\theta) + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{22} \sin^4(\theta) \\ Q_{12} = Q_{21} &= (C_{11} + C_{22} - 4C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{12} (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \\ Q_{22} &= C_{11} \sin^4(\theta) + 2(C_{12} + 2C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{22} \cos^4(\theta) \\ Q_{26} = Q_{62} &= (C_{11} - 2C_{66} - C_{12}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) \\ Q_{16} = Q_{61} &= (C_{11} - 2C_{66} - C_{12}) \cos^3(\theta) \sin(\theta) + (C_{12} - C_{22} + 2C_{66}) \cos(\theta) \sin^3(\theta) \\ Q_{66} &= (C_{11} + C_{22} - 2C_{12} - 2C_{66}) \cos^2(\theta) \sin^2(\theta) + C_{66} (\cos^4(\theta) + \sin^4(\theta)) \\ Q_{55} &= C_{66} \cos^2(\theta) + C_{44} \sin^2(\theta) \\ Q_{45} = Q_{54} &= (C_{66} - C_{44}) \cos(\theta) \sin(\theta) \\ Q_{44} &= C_{66} \sin^2(\theta) + C_{44} \cos^2(\theta) \end{aligned} \quad (13)$$

したがって、各積層を厚さ方向に積分すれば、次のような断面力が導ける。

$$\begin{aligned} (N_x, M_x, P_x) &= \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_x \{1, (z/t), (z/t)^3\} d\zeta, \quad (N_y, M_y, P_y) = \int_{-0.5}^{0.5} \sigma_y \{1, (z/t), (z/t)^3\} d\zeta \\ (N_{xy}, M_{xy}, P_{xy}) &= \int_{-0.5}^{0.5} \tau_{xy} \{1, (z/t), (z/t)^3\} d\zeta, \quad (Q_{xz}, R_{xz}) = \int_{-0.5}^{0.5} \tau_{xz} \{1, (z/t)^2\} d\zeta \\ (Q_{yz}, R_{yz}) &= \int_{-0.5}^{0.5} \tau_{yz} \{1, (z/t)^2\} d\zeta \end{aligned} \quad (14)$$

上式をマトリックス表示すれば、

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_{xz} \\ Q_{yz} \\ R_{xz} \\ R_{yz} \\ P_x \\ P_y \\ P_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{11} & E_{12} & E_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{21} & E_{22} & E_{26} \\ & & A_{66} & B_{61} & B_{62} & B_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & E_{61} & E_{62} & E_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{11} & F_{12} & F_{16} \\ & & & & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{21} & F_{22} & F_{26} \\ & & & & & D_{66} & 0 & 0 & 0 & 0 & F_{61} & F_{62} & F_{66} \\ & & & & & & A_{55} & A_{45} & D_{55} & D_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & A_{44} & D_{54} & D_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & \text{Sym.} & & & & & & F_{55} & F_{45} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & F_{44} & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & H_{11} & H_{12} & H_{16} \\ & & & & & & & & & & & H_{22} & H_{26} \\ & & & & & & & & & & & & H_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ox} \\ \varepsilon_{oy} \\ \gamma_{oxy} \\ K_{1x} \\ K_{1y} \\ K_{1xy} \\ \gamma_{oxz} \\ \gamma_{oyz} \\ K_{2xz} \\ K_{2yz} \\ K_{3x} \\ K_{3y} \\ K_{3xy} \end{Bmatrix}$$

または、

$$\{N\} = [D'] \{\varepsilon_0\} \quad (15)$$

$$\{N\} = [D'] \{\varepsilon_0\} \quad (16)$$

で表される。ここで、面内剛性値 A_{ij} ，面内-面外連成剛性値 B_{ij} ，曲げ剛性値 D_{ij} や他の高次の剛性値

E_{ij}, F_{ij}, H_{ij} は、それぞれ次式で与えられる。

$$(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}, E_{ij}, F_{ij}, H_{ij}) = \int_{-0.5}^{0.5} Q_{ij} \{1, (z/t), (z/t)^2, (z/t)^3, (z/t)^4, (z/t)^5\} d\zeta$$

$$; i, j=1, 2, \dots, 6 \quad (17)$$

したがって、積層板のひずみエネルギー、 U_p は、次式で与えられる。

$$U_p = (abt/2) \int_0^1 \int_0^1 \{\varepsilon_0\}^T [D'] \{\varepsilon_0\} d\xi d\eta$$

$$= (abt/2) \int_0^1 \int_0^1 \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}_{mn} [B]_{mn}^T [D'] [B]_{sj} \{\Delta\}_{sj} d\xi d\eta$$

$$= (1/2) \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}_{mn} [K]_{ms} \{\Delta\}_{sj} \quad (18)$$

ただし、 $[K]_{ms}$ は、剛性マトリックスであり、次式で表される。

$$[K]_{ms} = (abt) \int_0^1 \int_0^1 [B]_{mn}^T [D'] [B]_{sj} d\xi d\eta \quad (19)$$

また、運動エネルギー、 T は、次式で与えられる。

$$T = (\omega^2 abt/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \rho \{U^2 + V^2 + W^2\} d\xi d\eta d\zeta$$

$$= (\omega^2 abt/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \rho \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}_{mn} [S]_{mn} [S]_{sj} \{\Delta\}_{sj} d\xi d\eta d\zeta$$

$$= (\omega^2/2) \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}_{mn} [M]_{ms} \{\Delta\}_{sj} \quad (20)$$

ここで、質量マトリックス、 $[M]_{ms}$ は、

$$[M]_{ms} = (abt) \int_0^1 \int_0^1 \int_{-0.5}^{0.5} \rho [S]_{mn} [S]_{sj} d\xi d\eta d\zeta \quad (21)$$

で示される。ただし、 ρ は各積層の密度であり、 ω は円振動数(rad/sec)である。

次に、 x -軸に平行な他の2辺で任意の幾何学的境界条件を考慮するために、仮想バネ法²⁵⁾を用いる。すなわち、 $\eta = \eta_{ic}$ の境界辺で、変位 U, V, W とせん断回転角 $\phi_x, \phi_y, \partial W / \partial \xi, \partial W / \partial \eta$ に対応する仮想バネ係数 $\alpha, \beta, \delta, \lambda, \kappa, \gamma, \mu$ を導入すれば、これらのバネによるひずみエネルギー、 U_b は、次式で与えられる。ただし、 N_c は境界辺の数である。

$$U_b = (a/2) \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 \{\alpha U^2 + \beta V^2 + \delta W^2 + \lambda \phi_x^2 + \kappa \phi_y^2 + \gamma (\partial W / \partial \xi)^2 + \mu (\partial W / \partial \eta)^2\} d\xi d\eta \quad (22)$$

したがって、高次せん断変形理論に基づく積層板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、次式で与えられる。

$$\Pi = U_p + U_b - T \quad (23)$$

で与えられる。ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の基礎方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{mn}^T = \sum_{m=1}^r \sum_{s=1}^q ([K]_{ms} - \omega^2 [M]_{ms}) \{\Delta\}_{sj} = 0 \quad (24)$$

また、剛性マトリックス $[K]_{ms}$ と質量マトリックス $[M]_{ms}$ は、それぞれ次式で表される。

$$[K]_{ms} = \begin{pmatrix} [KU] & [KV] & [KW] & [KU\phi] & [KU\phi_y] \\ [KVU] & [KVV] & [K VW] & [KV\phi] & [KV\phi_y] \\ [KWU] & [KWV] & [KW\phi] & [KW\phi_y] \\ [K\phi_x U] & [K\phi_x V] & [K\phi_x W] & [K\phi_x\phi_x] & [K\phi_x\phi_y] \\ [K\phi_y U] & [K\phi_y V] & [K\phi_y W] & [K\phi_y\phi_x] & [K\phi_y\phi_y] \end{pmatrix}_{ms} \quad (25)$$

$$[M]_{ms} = \begin{pmatrix} [MU] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [MV] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [MW] & [MW\phi_x] & [MW\phi_y] \\ 0 & 0 & [M\phi_x W] & [M\phi_x\phi_x] & 0 \\ 0 & 0 & [M\phi_y W] & 0 & [M\phi_y\phi_y] \end{pmatrix}_{ms}$$

これらのマトリックスの大きさは、 $5 \times (k-1+M_y) \times r$ で表される。ここで、 $k-1$ は Spline 関数の次数であり、 M_y は帯板要素の分割数である。この場合のサブマトリックス $[K_{ij}]_{ms}$ 、 $[M_{ij}]_{ms}$ は、Gauss の数値積分公式を用いて求めている。ただし、式(25)において、破線で囲まれたマトリックスが対称クロス・プライン積層板の剛性及び質量マトリックスである。

いま、相対する 2 辺が単純支持条件を仮定すれば、この場合のはりの固有関数は、次式で与えられる。

$$Z_m(\xi) = \sin(m\pi \xi), \quad \bar{Z}_m(\xi) = \cos(m\pi \xi); m=1, 2, \dots, r \quad (26)$$

したがって、固有関数の直交性により、級数の連成項が消えるので、式(24)は次式のようにになる。

$$\sum_{m=1}^r ([K]_{mm} - \omega^2 [M]_{mm}) \{\Delta\}_{mm} = 0 \quad (27)$$

各級数項に対して、式(19)の固有値計算を行えば、振動数及び振動モード形状が求められる。このサブマトリックス $[K]_{rr}$ と $[M]_{rr}$ の大きさは、 $5 \times (k-1+M_y)$ になり、一次せん断変形理論の場合と同じ未知数の数になる。

3. 数値計算例及び考察

ここでは、高次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いて、相対する 2 辺が単純支持され、他の 2 辺が任意の境界条件を持つ対称クロス・プライン積層板と逆対称アングル・プライン積層板の振動解析を行い、これらの積層板の振動特性に与える配向角、積層数、弾性係数比、幅厚比や境界条件などの影響について解析する。また、一次せん断変形理論などにより求めた計算結果との比較検討を行う。本数値計算例で用いた複合材は、グラファイト/エポキシ材であり、次のような材料特性値を用いている。 $E_1/E_2=1\sim 40$, $G_{12}/E_2=G_{13}/E_2=0.6$, $G_{23}/E_2=0.5$, $\nu_{12}=0.25$ である。相対する 2 辺での境界条件は、固定を C、単純支持を S また自由辺を F の記号で示す。

3. 1 対称クロス・プライ積層板の振動解析

対称クロス・プライ積層板では、面内挙動と面外挙動の連成が無視でき、また $D_{16}=D_{26}=F_{16}=F_{26}=H_{16}=H_{26}=D_{45}=F_{45}=A_{45}=0$ になる。

Table 1には、3層から成る周辺単純支持された対称クロス・プライ積層板 ($E_1/E_2=20$, $N=3$, $b/t=5$) の振動数パラメータ, $n^*=\omega(a^2/t)\sqrt{\rho/E_2}$ の収束性に与える帯板分割数, M , とスプライン次数, $k-1$ の影響

が示してある。これより、帯板要素の数を高めれば、一様な収束状態が示され、また高次の帯板モデルを用いれば、少ない分割数で収束値が得られている。したがって、以後の計算例では、 $k-1=4$ と $M_r=8$ を用いている。

Table 2には、周辺単純支持された対称クロス・プライ正方形積層板 ($b/t=5$, $a/b=1$) の振動数パラメータ, $n^*=\omega\sqrt{\rho t^2/E_2}$ の精度比較について示してある。ここで、弾性係数比, E_1/E_2 は3から40まで変化させ、また積層数, N を3, 5, 9にとっている。比較のために、Khdeirらの高次せん断変形理論に基づく離散化Levy法による解¹⁹⁾、Reddyらの厳密解¹⁴⁾、Noorの差分法を用いた3次元弾性解²⁶⁾、一次せん断変形理論による解¹⁹⁾や薄板理論による値¹⁹⁾も示してある。これより、本手法による解は、他の積層板理論による値と良く一

致しているが、横せん断変形の影響を無視した薄板理論による解はかなり過大評価された値を示している。

Table 3には、他の相対する2辺が任意の境界条件を持つ3層から成る対称クロス・プライ正方形積層板 ($b/t=10$, $N=3$) の振動数パラメータ, $n^*=\omega(a^2/t)\sqrt{\rho/E_2}$ に与える弾性係数比, E_1/E_2 の影響が示されている。

Table 1. Convergence study of natural frequency parameters, $n^*=\omega(a^2/t)\sqrt{\rho/E_2}$; SS-SS, $E_1/E_2=20.0$, $N=3$, $b/t=5.0$

k-1	M _r	DOF*	Modes				
			1st (1, 1)	2nd (2, 1)	3rd (1, 2)	4th (3, 1)	5th (2, 2)
2	25	9	9.2383	14.819	21.665	23.584	24.719
	4	35	9.2351	14.806	20.660	23.583	23.848
	6	45	9.2349	14.806	20.624	23.583	23.817
	8	55	9.2349	14.806	20.619	23.583	23.813
	10	65	9.2349	14.806	20.618	23.583	23.812
3	25	9	9.2353	14.807	20.620	23.583	23.816
	4	40	9.2349	14.806	20.620	23.583	23.814
	6	50	9.2349	14.806	20.618	23.583	23.811
	8	60	9.2349	14.806	20.617	23.583	23.811

* DOF is the number of unknown parameters solved.

Table 2. Comparison of natural frequency parameters, $n^*=\omega\sqrt{\rho t^2/E_2}$ of symmetrically cross-ply plates; $b/t=5$, $a/b=1.0$ and SS-SS

Theory	N	E_1/E_2				
		3	10	20	30	40
HSDT(SSM)	3	6.5528	8.1510	9.2350	9.8475	10.263
HSDT(SSCT) ¹⁹⁾		6.5730	8.1778	9.2523	9.8468	10.241
HSDT(Exact) ¹⁴⁾		6.5733	8.2718	9.5263	10.272	10.787
3D(FDM) ²⁶⁾		6.6185	8.2103	9.5603	10.272	10.752
FSDT ¹⁹⁾		6.5630	8.1848	9.2775	9.8850	10.290
HSDT(SSM)	5	6.5850	8.4308	9.8413	10.686	11.262
HSDT(SSCT)		6.5985	8.4353	9.8350	10.674	11.247
HSDT(Exact)		6.5910	8.4970	9.9838	10.876	11.479
3D(FDM)		6.6468	8.5223	9.9480	10.785	11.344
FSDT		6.5843	8.4000	9.8265	10.679	11.267
HSDT(SSM)	9	6.5960	8.5313	10.060	10.987	11.620
HSDT(SSCT)		6.6090	8.5365	10.051	10.962	11.579
HSDT(Exact)		6.5980	8.5528	10.106	11.048	11.691
3D(FDM)		6.6600	8.6080	10.137	11.053	11.670
FSDT		6.5940	8.5198	10.037	10.955	11.579
CPT ¹⁹⁾		7.5358	10.650	13.948	16.605	18.891

HSDT(SSM) : Present method

HSDT(SSCT) : State space concept technique based on higher-order shear deformation theory

HSDT(Exact): Exact method based on higher-order shear deformation theory

3D(FDM) : Finite Difference Method based on three dimensional elasticity theory

FSDT : First-order Shear Deformation Theory

CPT : Classical Plate Theory

る。また、比較のために、 $E_1/E_2=40$ の場合にはKhdeirら¹⁹⁾により与えられた高次せん断変形理論による解と一次せん断変形理論による値も示してある。これより、振動数パラメータは、 E_1/E_2 の増加とともに増大するが、その影響は、固定辺を持つ場合に顕著に見られる。

Table 4には、種々の境界条件を持つ3層から成る対称クロス・プライ正方形積層板($E_1/E_2=40$, $N=3$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega(a^2/t)\sqrt{\rho/E_2}$ に与える幅厚比, b/t の影響が示してある。また、Khdeirら¹⁹⁾により与えられた高次せん断変形理論、一次せん断変形理論及び薄板理論による結果も示してある。これより、幅厚比が増大すると、各種の積層板理論による解に与えるこの影響が小さくなる。また、固定辺を含む場合の値は、一次せん断変形理論の結果と比較して、大きめの値が示され、それ以外の境界条件を持つ場合には、本手法により求めた解がやや小さな値を示している。

したがって、修正せん断係数を用いる一次せん断変形理論を適用する場合は、断面変形を拘束する固定条件の場合にその影響が大きく生じてくるので、板厚が大きくなると修正係数の取扱いに注意を要する。また、古典積層理論で求めた結果は、かなり過大評価された値になる。

Table 3. The effect of elastic modulli ratio, E_1/E_2 on frequency parameters, $n^*=\omega(a^2/t)\sqrt{\rho/E_2}$ of symmetrically cross-ply laminated plates; $b/t=10$, $a/b=1.0$ and $N=3$

Boundary condition	E_1/E_2	Modes					
		1	2	3	4	5	6
SS-CC	40	20.35	25.74	38.21	41.51	44.74	53.21
	HSDT(SSCT) ¹⁹⁾	19.50	25.17	38.22			
	FSDT ¹⁹⁾	19.67	25.35	38.65			
	30	19.50	24.56	36.48	40.12	43.23	51.36
	20	18.17	22.98	34.31	38.03	41.12	48.93
	10	15.65	20.51	31.40	34.05	37.44	45.28
	3	11.28	17.24	25.83	28.46	30.77	40.02
	40	17.44	23.71	37.00	39.51	42.93	51.74
	HSDT(SSCT)	17.07	23.54	37.31			
	FSDT	17.18	23.68	37.72			
	30	16.48	22.46	35.26	38.05	41.36	49.85
	20	15.06	20.85	33.11	35.73	39.08	47.33
SS-CS	10	12.59	18.54	31.25	30.34	35.07	43.51
	3	9.047	16.00	22.76	27.83	28.42	38.44
	40	14.70	21.91	35.98	37.39	41.05	50.26
	HSDT(SSCT)	14.73	22.06	36.51			
	FSDT	14.77	22.16	36.90			
	30	13.58	20.59	34.21	35.78	39.39	48.32
	20	12.05	18.97	32.08	33.22	36.94	45.72
	10	9.787	16.88	28.23	29.46	32.60	41.75
	3	7.241	15.02	19.74	26.21	27.30	36.97
	40	7.336	17.33	23.73	29.30	33.07	48.37
	HSDT(SSCT)	7.310	17.45			33.60	
	FSDT	7.331	17.56			34.02	
SS-CF	30	6.748	16.25	22.45	27.90	31.39	39.55
	20	6.037	15.02	20.58	26.06	29.37	37.36
	10	5.138	13.56	17.37	23.34	26.92	34.48
	3	4.301	12.35	12.64	20.05	24.89	27.56
	40	4.895	16.48	21.60	27.66	32.67	45.98
	HSDT(SSCT)	4.906	16.63			33.22	
	FSDT	4.914	16.74			33.64	
	30	4.617	15.51	20.03	26.08	31.03	38.36
	20	4.316	14.39	17.83	24.07	29.07	36.10
	10	3.985	13.10	14.47	21.33	26.69	33.23
	3	3.736	10.50	12.10	18.64	24.42	24.76
	40	4.322	6.245	15.95	17.93	30.32	32.20
SS-FF	HSDT(SSCT)	4.334		16.10			32.76
	FSDT	4.343		16.21			33.19
	30	4.000	6.041	16.92	17.07	28.08	30.51
	20	3.642	5.825	13.74	16.11	24.93	28.50
	10	3.238	5.596	12.37	15.02	20.03	26.03
	3	2.923	5.428	11.28	14.09	14.18	22.70

Table 4. The effect of thickness ratio, b/t on the frequency parameters, $n^* = \omega (a^2/t) \sqrt{\rho/E_2}$ of symmetrically cross-ply laminated plates; $E_1/E_2=40.0$, $a/b=1.0$ and $N=3$

Theory	b/t	SS-SS	SS-SC	SS-CC	SS-FF	SS-FS	SS-FC
HSDT(SSM)	5	10.263	11.156	11.633	3.987	4.483	5.975
HSDT(SSCT) ¹⁹⁾		10.240	10.576	11.164	4.025	4.518	5.897
FSDT ¹⁹⁾		10.290	10.646	11.266	4.053	4.544	5.937
HSDT(SSM)	10	14.702	17.431	20.325	4.322	4.895	7.335
HSDT(SSCT)		14.725	17.069	19.500	4.334	4.906	7.310
FSDT		14.766	17.175	19.669	4.343	4.914	7.331
HSDT(SSM)	15	16.579	21.292	26.139	4.394	4.988	7.785
HSDT(SSCT)		16.618	21.131	25.652	4.401	4.994	7.780
FSDT		16.645	21.229	25.832	4.405	4.998	7.792
HSDT(SSM)	20	17.483	23.671	30.262	4.422	5.024	7.981
HSDT(SSCT)		17.497	23.545	29.870	4.415	5.011	7.969
FSDT		17.517	23.625	30.032	4.423	5.024	7.983
HSDT(SSM)	100	18.910	28.351	40.357	4.455	5.109	8.271
CPT ¹⁹⁾		18.891	28.501	40.743	4.457	5.076	8.269

3. 2 逆対称アングル・プライ積層板の振動解析

面内挙動と面外挙動が連成する逆対称アングル・プライ積層板では、 $A_{16}=A_{26}=A_{45}=B_{11}=B_{22}=B_{12}=D_{16}=D_{26}=D_{45}=E_{11}=E_{12}=E_{22}=F_{16}=F_{26}=F_{45}=H_{16}=H_{26}=0$ になる。

このタイプの積層板の振動解析では、一次せん断変形理論に基づく研究は多くみられるが、高次せん断変形理論による結果が非常に少なく、周辺単純支持された場合のみにReddyらの厳密解¹⁵⁾が求められている。このような点を踏まえて、高次せん断変形理論と一次せん断変形理論による結果の比較検討を行う。

Table 5には、配向角が 45° で、周辺単純支持された2層から成る逆対称アングル・プライ正方形積層板 ($E_1/E_2=40$, $\theta=45^\circ$, $N=2$) の振動数パラメータ, $n^* = \omega (a^2/t) \sqrt{\rho/E_2}$ に与える幅厚比, b/t の影響が示されている。また、Reddyらの高次せん断変形理論に基づく厳密解¹⁵⁾と一次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いて求めた値²⁷⁾も示してある。ただし、一次せん断変形理論による結果は、修正せん断係数に $5/6$ を用いている。これより、本手法による解は、 $b/t=2.0$ を除いてReddyらの厳密解と一致した結果が得られており、また一次せん断変形理論による結果と比較して、板厚が増大するにつれて、やや大きな値が得られている。

次に、2つの相対する2辺がそれぞれ単純支持と固定された逆対称アングル・プライ積層板の振動数パラメータ, n^* に与える配向角, θ 、幅厚比, b/t や弾性係数比, E_1/E_2 の影響について示し、一次せん断変形理論より求めた結果²⁷⁾と比較検討を行う。Fig. 2には、この積層板 ($E_1/E_2=40$, $b/t=10$) の振動数パラメータに与える配向角, θ の影響が示してある。ここで、積層数は2層と4層にとり、配向角は 0° から 45° まで変化させている。これより、積層数により、高次せん断変形理論と一次せん断変形理論による値に差がみられ、積層板の振動数は配向角に大きく依存している。Fig. 3には、2層と4層の逆対称アングル・プライ正方形積層板 ($\theta=45^\circ$) の場合の振動数パラメータに与える幅厚比, b/t の影響が示されている。ここで、幅

厚比は10と5を仮定し、弾性係数比は5から40 まで変化させている。これより、2層の場合に、一次せん断変形理論による結果が高次せん断変形理論の値と比較して、弾性係数比が大きくなると、小さな値が示されている。しかし、積層数を多くすると、両者の差が小さくなって来る。

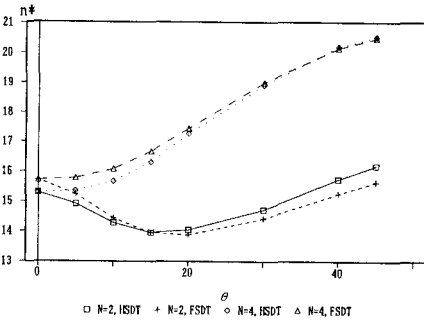
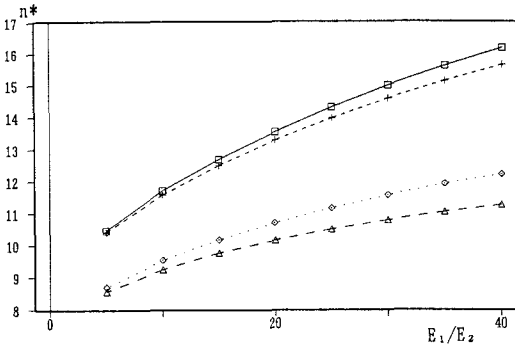


Fig. 2 The effect of θ on frequency parameter, n^* of antisymmetrically laminated plates; $b/t=10$, $E_1/E_2=40$, SS-CC

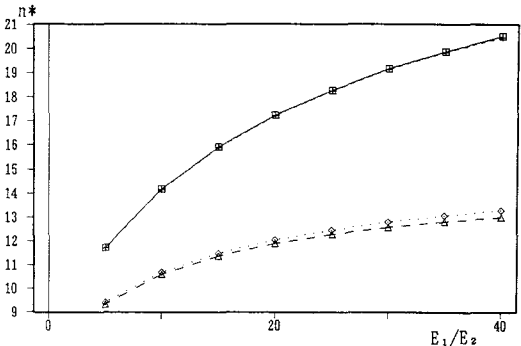
Table 5. Comparison of frequency parameters, $n^*=\omega(a^2/t)\sqrt{\rho/E_2}$ of antisymmetrically angle-ply laminated plates; $N=2$, $\theta=45^\circ$, $E_1/E_2=40$, $a/b=1.0$ and SS-SS

b/t	Theory	Modes				
		1	2	3	4	5
2.0	HSDT(SSM)	6.3368	6.8829	10.670	11.055	11.055
	HSDT(Exact) ¹⁵⁾	6.283				
4.0	HSDT(SSM)	9.7594	13.766	17.749	17.749	25.347
	HSDT(Exact)	9.759				
5.0	HSDT(SSM)	10.840	17.207	20.355	20.355	29.503
	HSDT(Exact)	10.840				
	FSDT ²⁷⁾	10.335	17.207	18.891	18.891	26.479
10.0	HSDT(SSM)	13.263	27.777	27.777	34.414	43.359
	HSDT(Exact)	13.263				
	FSDT ²⁷⁾	13.044	26.938	26.938	34.414	41.341
12.5	HSDT(SSM)	13.704	29.501	29.501	43.018	47.187
	HSDT(Exact)	13.704				
	CPT ¹⁵⁾	14.510				
20.0	HSDT(SSM)	14.246	31.882	31.882	53.052	56.979
	HSDT(Exact)	14.246				
25.0	HSDT(SSM)	14.383	32.536	32.536	54.816	58.912
	HSDT(Exact)	14.383				
50.0	HSDT(SSM)	14.572	33.490	33.490	57.531	61.908
	HSDT(Exact)	14.572				
100.0	HSDT(SSM)	14.621	33.744	33.744	58.289	62.749
	HSDT(Exact)	14.621				
	FSDT ²⁷⁾	14.618	33.730	33.730	58.243	62.703
	CPT ¹⁵⁾	14.636				



□ HSDT, $b/t=10$ + FSDT, $b/t=10$ ○ HSDT, $b/t=5$ △ FSDT, $b/t=5$

a) $N=2$



□ HSDT, $b/t=10$ + FSDT, $b/t=10$ ○ HSDT, $b/t=5$ △ FSDT, $b/t=5$

b) $N=4$

Fig. 3 Comparison of fundamental frequency parameter, n^* of antisymmetrically angle-ply laminated plates between the higher-order shear deformation theory(HSDT) and the first shear deformation theory(FSDT); $\theta=45^\circ$, SS-CC

4. あとがき

本研究では、Reddyの高次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法を用いて、積層複合板の振動解析を行い、本手法の精度比較や高次せん断変形理論と他の積層板理論との比較検討を行った。また、対称クロス・プライ積層板や逆対称アングル・プライ積層板の振動特性に与える積層数、弾性係数比、幅厚比、配向角や境界条件などの影響について明らかにした。本文で得られた主な結果を示すと、以下のようになる。

- 1) 高次のスプライン帯板要素を用いれば、少ない分割数で安定した収束値が得られ、また本手法により求めた値は、他の高次せん断変形理論や3次元弾性理論により求められた結果と良く一致している。
- 2) 境界条件の拘束が大きくなると、高次せん断変形理論による値と一次せん断変形理論により求められた値の差が大きくなり、これは、一次せん断変形理論では、横せん断変形の影響を考慮するために修正せん断係数が用いられるが、高次理論では、この影響が厳密に評価されるからと思われる。
- 3) 高次せん断変形理論と一次せん断変形理論により求められた値を比較すると、幅厚比が小さくなると両者の差が大きくなり、また弾性係数比が大きいほど、その影響が顕著に見られる。ただし、古典積層板の値は、等方性板の場合と異なり、かなり薄い板であっても過大評価された結果を示す。

今後は、高次せん断変形理論に基づくスプライン帯板法の積層複合板問題への適用についても検討したい。

なお、本研究は、平成5年度文部省科学研究費（一般研究(C)）及び大同工業大学研究奨励金の援助を受けている。また、数値計算には、大同工業大学情報処理センターと名古屋大学大型計算機センターを利用して戴きました。貴重なご意見を戴いた査読者に感謝いたします。

参考文献

- 1) 小林 昭：先進複合材料と次世代航空機，機械の研究，Vol. 44(2)，pp. 1-4，1992。
- 2) Vinson, J.R. and Sierakowski, R.L.: The behavior of structures composed of composite materials. Martinus Nijhoff Publishers, Lancaster, 1986.
- 3) Kapania, R.K. and Raciti, S.: Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part I-Shear effects and buckling. AIAA J., Vol. 27(7), pp. 923-934, 1989.
- 4) Kapania, R.K. and Raciti, S.: Recent advances in analysis of laminated beams and plates, Part II-Vibrations and wave propagation. AIAA J., Vol. 27(7), pp. 935-946, 1989.
- 5) Reddy, J.N.: A review of the literature on finite-element modeling of laminated composite plates. Shock Vibr. Digest, Vol. 17, pp. 3-8, 1985.
- 6) Noor, A.K. and Burton, W.S.: Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates. Appl. Mech. Rev., Vol. 42(1), pp. 1-13, 1989.
- 7) Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, Y.: Elastic wave propagation in heterogeneous plates. Int. J. Solids Struct., Vol. 2, 665-671, 1966.
- 8) Whitney, J.M. and Pagano, N.J.: Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates. J. Appl. Mech., Vol. 37, pp. 1031-1036, 1970.
- 9) Craig, T.J. and Dawe, D.J.: Flexural vibration of symmetrically laminated composite rectangular plates including transverse shear effects. Int. J. Solids Struct., Vol. 22, pp. 155-169, 1986.
- 10) Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M.: A high-order theory of plate deformation, Part 1: homogeneous plates. J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663-668, 1977.
- 11) Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M.: A high-order theory of plate deformation, Part 2:

- laminated plates. *J. Appl. Mech.*, Vol. 44, pp. 669-676 1977.
- 12) Levinson, N.: An accurate simple theory of the statics and dynamics of elastic plates. *Mechanics Research Communications*, Vol. 7, pp. 343-350, 1980.
 - 13) Murthy, M.V.V.: An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates. *NASA Tech. Paper* 1903, 1981.
 - 14) Reddy, J.N.: A simple higher-order theory for laminated composite plate. *J. Appl. Mech.*, Vol. 51, pp. 745-752, 1984.
 - 15) Reddy, J.N. and Phan, N.D.: Stability and vibration of isotropic, orthotropic and laminated plates according to a higher-order shear deformation theory. *J. Sound Vibr.*, Vol. 98, pp. 157-170, 1985.
 - 16) Phan, N.D. and Reddy, J.N.: Analysis of laminated composite plates using a higher-order shear deformation theory. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 21, pp. 2201-2219, 1985.
 - 17) Putcha, N.S. and Reddy, J.N.: Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory. *J. Sound and Vibr.*, Vol. 104, pp. 285-300, 1986.
 - 18) Khdeir, A.A., Reddy, J.N. and Librescu, L.: Analytical solution of a refined shear deformation theory for rectangular composite plates. *Int. J. Solids and Struct.*, Vol. 23, pp. 1447-1463, 1987.
 - 19) Khdeir, A.A. and Librescu, L.: Analysis of symmetric cross-ply laminated elastic plates using a higher-order theory: Part II-buckling and free vibration. *Composite Structures*, Vol. 9, pp. 259-277, 1988.
 - 20) Reddy, J.N. and Khdeir, A.A.: Buckling and vibration of laminated composite plates using various plate theories. *AIAA J.*, Vol. 27, pp. 1818-1817, 1989.
 - 21) Reissner, E.: On the theory of transverse bending of elastic plates. *Int. J. Solids Struct.*, Vol. 12, pp. 545-554, 1976.
 - 22) Kant, T., Owen, D.R.J. and Zienkiewicz, O.C.: A refined higher-order Co plate bending element. *Comput. Struct.*, Vol. 15, pp. 177-183, 1982.
 - 23) Hinton, E., Iossifidis, L. and Ren, J.G.: Higher-order plate bending analysis using the modified Razzaque-Irons triangle. *Comput. Struct.*, Vol. 26, pp. 681-691, 1987.
 - 24) 根岸嘉和、平島健一: 変位と面外応力を仮定する層状性複合構造の一般化高次理論. 土木学会論文, 集, No. 450/I-20, pp. 121-130, 1992.
 - 25) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration of skew plates by using B-spline functions. *J. Sound Vibr.*, Vol. 62, pp. 301-308, 1979.
 - 26) Noor, A.K.: Stability of multilayered composite plates. *Fibre Sci. Technol.*, Vol. 8, pp. 81-89, 1975.
 - 27) 鬼頭博史、水澤富作: スプライン帯板法を用いた非対称積層板の振動解析について. 土木学会第48回年次学術講演会講演概要集, I-681, pp. 1510-1511, 1993.
 - 28) 芳村 仁、三上 隆、朴勝振: 逆対称アングル・ブライ積層板の自由振動. 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 911-919, 1991.

(1993年9月16日受付)