

FEMとBEMを用いた水中構造物の自由振動解析

Free Vibration Analysis of Submerged Floating Structures Using FEM and BEM

田尻 太郎*, 三上 隆**, 芳村 仁***

By Taro TAJIRI, Takashi MIKAMI and Jin YOSHIMURA

This paper deals with the free vibration problem of coupled fluid-elasticity systems. The systems considered are submerged floating structure with elastic legs. The fundamental dynamic characteristics of the eigen-value, eigen-mode, dynamic-pressure and virtual mass are examined and compared with those of the coupled fluid-rigidity systems. The influence of the structure's elasticity on the structure-fluid interaction is also showed. Finite Element Method is applied to the structure and Hybrid Boundary Element Method for fluid.

Key Words: FEM, BEM, structure-fluid interaction, free vibration, submerged floating structure

1. はじめに

四方を海に囲まれ、土地面積の少ない我が国では、海洋の開発と利用の促進は重要な課題である。そのため浮橋等を含む様々な海洋構造物が建設され、あるいは構想が発表されている。海洋構造物のうち、固定式構造物については多数の研究がなされ、浮体式構造物についてもかなりの数にのぼる^{1) 3) 4) 5) 6) 7) 8) 9)}。しかし浮体式構造物については一般に、構造全体あるいは一部を剛体とみなして解析がなされ、構造物に作用する流体力の評価や透過率等の算定がなされており^{1) 4) 5) 6) 7) 8)}、構造全体を弾性体として扱った例は余り多くない^{9) 10)}。また構造全体を弾性体として扱った研究は、計算手法の開発に主眼がおかれている^{9) 10)}。

一方海洋構造物の解析において境界要素法が多用されるのは、海洋を表現する流体解析領域が無限遠へ開いた開領域となるためである。線形造波問題に限って言えば、開領域処理の代表的なものは、〔1〕湧き出し分布法、〔2〕開境界におけるSommerfeldの放射条件を用いる方法、及び〔3〕開境界において外部解析解に接続する方法である。〔3〕は、流体解析領域を構造付近の内部領域と、無限遠へ開いた外部領域とに分け、内外領域の境界(開境界)に仮想境界を設けるもので、単純な形状である事の多い外部領域については固有関数展開にもとづいた解析解、内部領域については通常の境界要素法を用いて、開境界において両者

* 工修 北海道大学大学院 工学部土木工学科 後期博士課程 (060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (060 札幌市北区北13条西8丁目)

*** 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (060 札幌市北区北13条西8丁目)

を接続する手法であり、比較的簡便な計算法である。本研究では構造が水中に位置する浮体式構造物を対象にし、構造物の剛性を考慮した構造-流体系の連成固有振動解析を取り上げ、構造物の基本的動的特性（固有周期、固有モード、動水圧）に与える、構造物の剛性の影響を調べたものである。数値例では、構造本体が中空円断面の場合を示し、特に概略の動特性を検討する段階で必要となる付加質量の算定を試みた。解析手法には、構造物に有限要素法、流体へは上述の〔3〕を用いた境界要素法を併用している。

2. 問題の定式化

2. 1 解析モデル

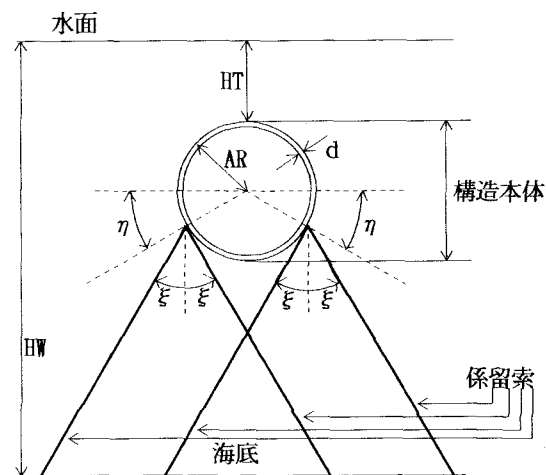


図-1 解析モデル

解析モデルは図-1に示すように、構造本体には水中構造物の基本的な振動特性を評価する目的で中空円断面を用い、それを4本の係留索で支持して外力に抵抗するものである。図でHWは水深、HTは設置水深、ARは円断面の半径、dは円断面の肉厚であり、さらに (E_1, I_1, A_1) をそれぞれ構造本体の（ヤング率、断面2次モーメント、断面積）、 (E_2, I_2, A_2) をそれぞれ係留索の（ヤング率、断面2次モーメント、断面積）とする。また (ρ_0, ρ_1, ρ_2) をそれぞれ流体の面密度、構造本体と係留索の線密度とする。なお以下の定式化では、構造の運動は2次元の微小振動、流体は2次元の渦無し完全流体として、係留索と流体の連成効果は無視した。また、水面での法線流速を0とする。

2. 2 固有振動方程式

流体との連成を考慮した構造物全体の固有方程式は、次式となる。

$$(-\omega^2 (M + M_c) + (K + K_c)) \{X\} = 0 \quad (1)$$

ここで $\{X\}$ は構造物の変位ベクトル、 ω は固有円振動数、 M は質量マトリックス、 K は剛性マトリックス、 M_c は付加質量マトリックス、 K_c は幾何剛性マトリックス。

構造本体と係留索は、梁要素を用いた有限要素法で離散化する¹²⁾。このとき梁の曲げによる変位関数には、3次関数を、軸方向の変位関数には1次関数を採用した。質量マトリックス M には、並進と回転慣性を考慮した整合マトリックスを用いた。 K_c は、係留索に作用している初期張力により定まる幾何剛性マトリックスであり、初期張力は構造全体の自重と浮力より求めた。

以下に式(1)の導出過程を略述する。

動圧力による等価節点力を $\{F\}$ と記せば、構造全体の運動方程式は次式となる。

$$(-\omega^2 M + (K + K_c)) \{X\} = \{F\} \quad (2)$$

ここで、自由振動問題に限定しているため、 $\{X\}$ および $\{F\}$ は振動の振幅を表している。

式(1)は式(2)に現れるベクトル $\{F\}$ を、付加質量マトリックス M_c で表したものであり、本研究では流体を境界要素法により離散化し算定する。

図-2に流体の解析領域を示す。図-1の左右が無限遠へ向かって開いた領域を扱うため、領域を構造付近の内部領域と、その外側の外部領域に解析領域を分割する^{2) 3) 4)}。外部領域では、完全流体のラプラス方程式の固有関数展開を用いて速度ポテンシャルを表し、内部領域に対しては通常の境界要素法を適用する。

外部領域の固有関数は、次のように求めた。外部領域の速度ポテンシャルを ϕ とすれば、

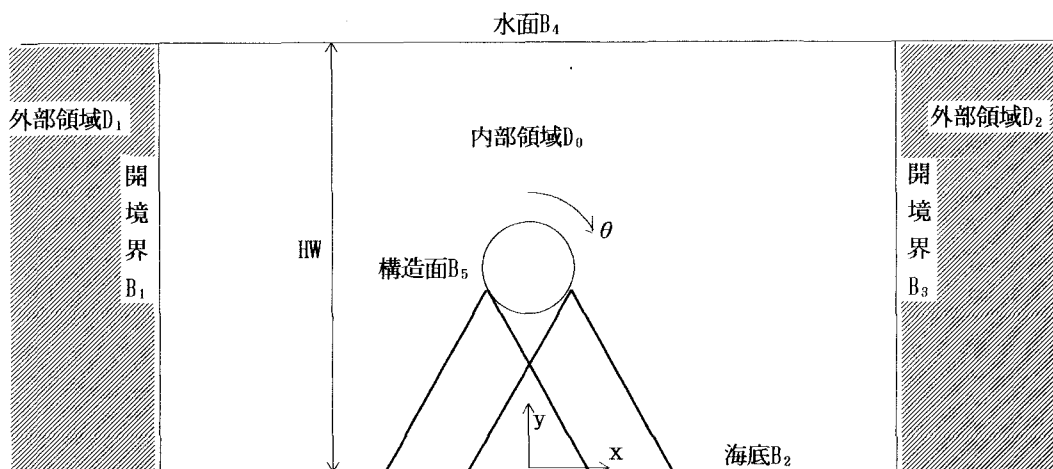


図-2 解析領域、流体の境界

$$\Delta \phi(x, y, t) = 0 \quad (3)$$

が成り立つ。ただし Δ は、 x と y に関するラプラシアンを表す。

$\phi = f(x)g(y) \cos \omega t$ を仮定し、これを式(3)に代入すると、

$$f(x) = A_1 \cosh kx + A_2 \sinh kx \quad (4)$$

$$g(y) = B_1 \cos ky + B_2 \sin ky \quad (5)$$

となる。ここで A_1, A_2, B_1, B_2 は積分定数で、 k は式(3)の固有値である。

境界条件は、水面と海底において法線流速が0だから、式(5)において、

$$g'(0) = g'(HW) = 0$$

ここで $'$ は、 y に関する微分である。これより、 $B_2 = 0$ および $k = n\pi/HW$ ($n = 0, 1, 2, \dots$)が得られる。

また $f(x)$ にたいする境界条件は、式(4)において $x = \pm\infty$ で静水となるように係数 A_1 と A_2 を選ぶ。また無限遠でのポテンシャル値を0に定めると、 $n = 0$ を除ける。そうすると、

$$\phi(x, y, t) = \begin{cases} e^{kx} \cos ky \cos \omega t & : x \leq 0 \\ e^{-kx} \cos ky \cos \omega t & : x > 0 \end{cases}$$

なる形を選ぶ。

一般解は、これらの重ね合わせだから、

$$\phi(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\pm kx} \cos ky \cos \omega t \quad (6)$$

固有値解析だから $\cos \omega t$ の部分は不要である。式(6)から $\cos \omega t$ をおとしたものを図-2の外部領域 D_1, D_2 について ϕ_1, ϕ_2 とすれば、

$$\begin{aligned} \phi_1(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^1 e^{-kx} \cos ky & : x \leq 0 \\ \phi_2(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2 e^{-kx} \cos ky & : x > 0 \end{aligned} \quad (7)$$

が得られる。式(7)を外部領域の解析解として使い、これを内部領域 D_0 の開境界 B_1 と B_3 において、内部の速度ポテンシャルに接続する。このとき級数の係数、 $(A_1^1, A_2^1, \dots)$, $(A_1^2, A_2^2, \dots)$ は未定定数となり、内部領域の境界要素方程式を解くときに同時に定まる。

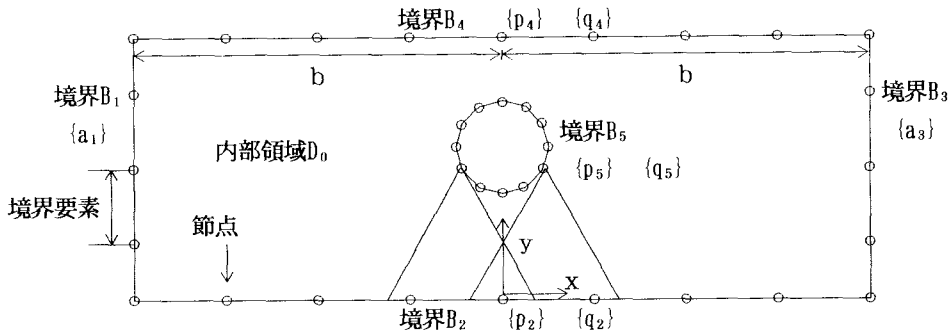


図-3 境界未知ベクトル

内部領域の境界要素法の基本解 p^* として、

$$p^*(x, y, \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \log r, \quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}.$$

をとる。ここで (ξ, η) は基本解 p^* の特異点である。境界方程式は次式となる。

$$\frac{1}{2\pi} \alpha p(\xi, \eta) + \int_{\Gamma} p q^* ds - \int_{\Gamma} q p^* ds = 0 \quad (8)$$

ここで p, q は、構造表面も含めた内部領域 D_0 の境界上のポテンシャル値と外法線流速値、 Γ は D_0 の全ての境界を表し、特異点 (ξ, η) も境界上にある。 α は特異点が置かれている境界点の内角で、滑らかな境界点ならば π である。

ここで図-3にあるように境界要素を導入し、境界量の未知ベクトルを次のように定める。境界 B_1 と B_3 における未知量である外部級数解の未定定数を、ベクトル $\{a_1\}$, $\{a_3\}$ で表す。境界 B_2 と B_4 と B_5 の節点ポテンシャルと法線流速値を、ベクトル $\{p_2\}$, $\{q_2\}$, $\{p_4\}$, $\{q_4\}$, $\{p_5\}$, $\{q_5\}$ で表す。 p はポテンシャルを、 q は流速値を表す。内部領域 D_0 の境界条件は次の通り。

$$\{q_2\} = \{q_4\} = 0 \quad (9)$$

$$\{p_1\} = \{\phi_1(-b, y)\}, \quad \{p_2\} = \{\phi_2(+b, y)\} \quad (10)$$

式 (10) の右辺の y は、境界 B_1 と B_3 の節点の y 座標で、式 (10) の右辺は $\{a_1\}$, $\{a_3\}$ の成分の線形和で表せる。

図-3にあるように内部領域 D_0 の境界を境界要素によって分割し、式 (8) を離散化して式 (9) および式 (10) を代入すれば、式 (11) が得られる。

$$H \{Y\} = -B \{q_5\} \quad (11)$$

ここで $\{Y\}^T = (\{a_1\}, \{p_2\}, \{a_3\}, \{p_4\}, \{p_5\})^T$ 、 H と B は境界方程式 (8) を離散化して得られたシステムマトリックスであり、 H は正方行列で、 $\{q_5\}$ は構造表面での未知の外法線流速値からなるベクトルである。

式 (11) を $\{Y\}$ について解き、 $\{p_5\}$ の部分だけ取り出すと式 (12) となる。

$$\{p_5\} = -h \{q_5\} \quad (12)$$

ただし h は、 $H^{-1}B$ の $\{p_5\}$ に対応する部分行列である。

次に構造一流体の連成条件は、 $\{u\}$ を構造境界の点 (x, y) の変位ベクトル、 $\{n\}$ を (x, y) での流体の外法線単位ベクトル、 q を (x, y) における流体の外法線流速値、 $\cdot$ を内積として、

$$q = \omega \{n\} \cdot \{u\} \quad (13)$$

が成り立つ。式(13)を構造境界の各節点ごとに考え、マトリックスで表せば、

$$\{q_s\} = \omega D \{X\} \quad (14)$$

と書ける。ただし $\{X\}$ は、構造境界の全ての節点の $\{u\}$ から構成される構造全体の変位ベクトルであり、 D は同境界上の、全ての節点の $\{n\}$ から構成されるマトリックスとなる。

最後に構造への動圧力は、ベルヌーイ式の2次の項と静水圧の部分省略し、 p を構造境界各点のポテンシャル値、 f を同じ点の圧力値とすれば、

$$f = -\omega \rho_0 p \quad (15)$$

となる。ただし時間成分として $\cos \omega t$ を考えている。式(13)と同様に、式(15)を構造境界の各節点ごとに考え、各節点の圧力関数値で圧力分布を表す形状関数を導入する。それに $\{X\}$ の仮想変位を掛けて積分すれば、等価節点力 $\{F\}$ である¹¹⁾。

$$\{F\} = -\omega \rho_0 T \{p_s\} \quad (16)$$

ここで T は、圧力の分布を表す形状関数と、構造表面の変位分布の形状関数より定まる行列である。

以上の諸式を用いれば、式(1)は以下のように得られる。すなわち、式(12)、(14)及び式(16)より、

$$\{F\} = \omega^2 M_c \{X\} \quad (17)$$

であり、式(17)を式(2)へ代入すれば、式(1)となる。

ここで M_c は、

$$M_c = \rho_0 T h D \quad (18)$$

であり、付加質量マトリックスである。

3. 数値計算例

構造本体の剛性の基本振動特性(固有周期、モード、動圧力)に与える影響を検討するために、以下の諸元により数値解析を行った。

$HW=200\text{m}$. $HT=60\text{m}$. $AR=11.5\text{m}$. $\xi=30\text{度}$. $\eta=30\text{度}$.

$E_1=2.744 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$.

$E_2=2.058 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$. $I_2=9.475 \times 10^{-1} \text{ m}^4$. $A_2=0.090 \text{ m}^2$.

$\rho_0=5.150 \times 10^4 \text{ kg/m}^3$. $\rho_2=7.277 \times 10^2 \text{ kg/m}$.

なお水中構造物本体の剛性の影響を検討するために、表-1に示すように本体の肉厚 d を $0.5\text{m} \sim 2.0\text{m}$ の間で変化させ、解析を行った。

計算では、内部領域 D_0 としては、1辺が水深 HW に等しい正方形領域を解析対象とした。固有周期は、構造本体については20節点以上、係留索1本については10節点以上、内部領域 D_0 については1辺10節点以上で、収束したが、動圧力等も算定する事を考慮し、計算では構造本体45節点、ケーブル1本20節点、 D_0 の1辺25節点とした。

3. 1 固有周期、固有モードおよび動圧力

構造本体の肉厚を d を変化させた際の固有周期を表-2および表-3に示す。表-2は本体の剛性を考慮した結果であり、表-3は本体を剛体とみなした場合の結果である。表中の x 、 y 、 θ はそれぞれ構造本体の運動が図-2の、 x 方向、 y 方向及び回転が卓越する振動モードに対応する周期である事を意味する。表より本体の剛性を考慮した結果は、剛体とみなした結果より常に大きめの値となり、肉厚 d が小さいときに著しいことがわかる。ただし剛体とみなすとは、表-1に載せた剛性値を1000倍にして計算した結果である。この倍数は、表-1の剛性値を100倍～100000倍の間で変化させて計算した結果から判断した。

表—1 肉厚dの変化による断面諸元の変化

d (m)	d/AR	I ₁ (m ⁴)	A ₁ (m ²)	E ₁ I ₁ (Nm ²)	E ₂ A ₁ (N)	ρ ₁ (kg/m)
0.5	0.044	0.521	25.00	1.430 × 10 ¹⁰	6.860 × 10 ¹¹	6.250 × 10 ⁴
1.0	0.087	4.167	50.00	1.143 × 10 ¹¹	1.372 × 10 ¹²	1.250 × 10 ⁵
1.5	0.131	10.06	75.00	2.760 × 10 ¹¹	2.058 × 10 ¹²	1.875 × 10 ⁵
2.0	0.174	33.33	100.0	9.146 × 10 ¹¹	2.744 × 10 ¹²	2.500 × 10 ⁵

表—2 構造本体の剛性を考慮した固有周期 (秒)

d/AR	x	y	θ
0.044	0.577	0.274	0.194
0.087	0.524	0.282	0.163
0.131	0.552	0.301	0.198
0.174	0.586	0.320	0.231

表—3 構造本体を剛体とみなした固有周期 (秒)

d/AR	x	y	θ
0.044	0.468	0.259	0.116
0.087	0.509	0.280	0.161
0.131	0.547	0.300	0.197
0.174	0.583	0.319	0.230

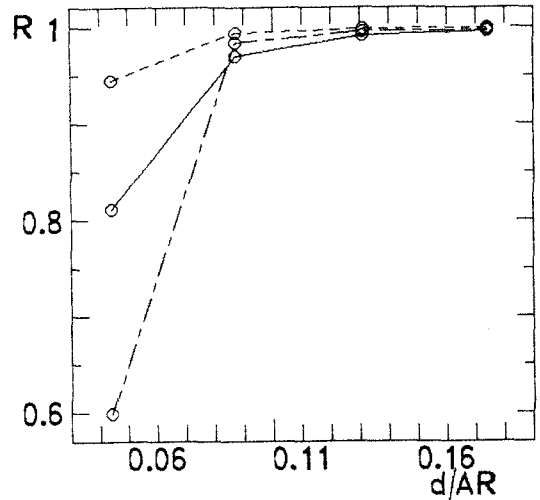
図—4 は、構造本体の剛性の取り扱いの相違が周期に与える影響を明確にするために描いたものである。図で横軸は、断面の肉厚dと断面半径ARの比d/ARであり、縦軸は本体を剛体とみなした場合の周期T₀と、剛性を考慮した場合の周期Tとの比R = T₀/Tである。図より比Rは、1より小さく、肉厚dの増加とともに単調に増加し、R=1に漸近していくことがわかる。なお肉厚dのRに及ぼす影響は、dと断面半径ARとの比d/ARが0.087より小さい場合に顕著であり、例えばd/AR=0.044のx, y, θ方向のRはそれぞれ0.8111, 0.9447, 0.5983である。

図—5 (a) ~ (c) および図—6 (a) ~ (c) は、表—2と3に示したd/ARに対応する変位モードおよび動圧力を、構造本体付近に着目し示したものである。ただしd/AR=0.174については、d/AR=0.131との差が現れないので省略した。なお各図で、点線は構造本体の初期位置を表し、太い実線は本体の剛性を考慮した結果を、細い実線は本体を剛体とみなした結果を表す。動圧力は、式(12)、(14)および式(15)より求めた。

図より、肉厚dを増加させることにより構造本体の剛性が増して剛体に近づき、係留索の剛性の影響が減少して、ほぼ上下対称な剛体の変位モードへと、弾性体の変位モードが接近するのがわかる。動圧力分布でも同様である。また変位、圧力分布とも、肉厚dがd/AR=0.087を越えれば、ほぼ剛体とみなした結果と一致している。

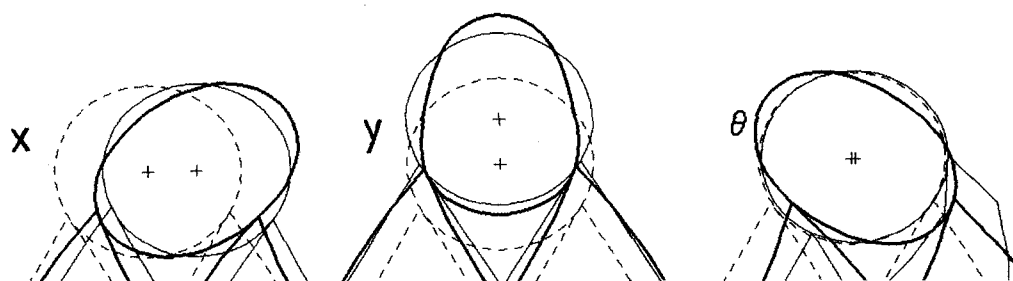
3. 2 付加質量係数

ここでは式(1)で付加質量の影響を無視した時の振動状態を基準にして、流体の周期に及ぼす影響を、付加質量係数として明らかにする。

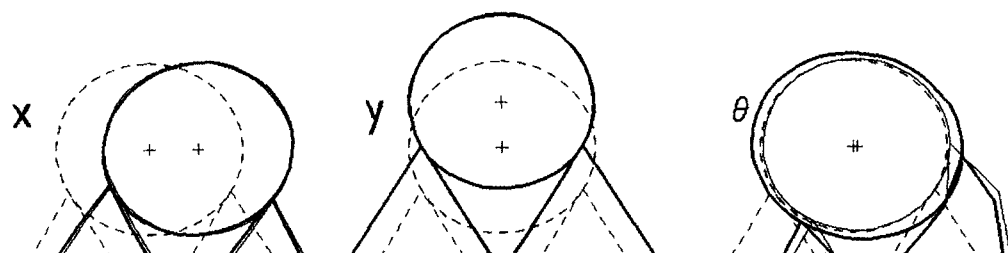


図—4 弾性体と剛体の固有周期の比

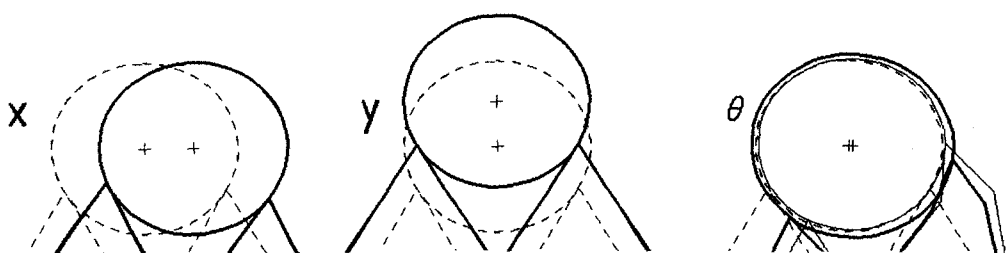
- : x方向
- : y方向
- -○- -: θ方向



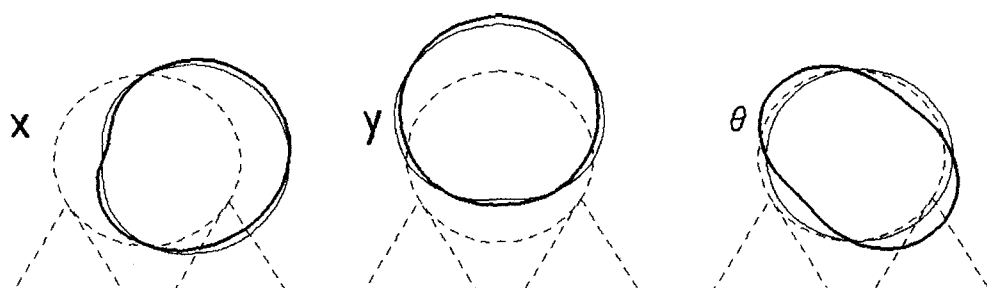
図—5 (a) 肉厚を変化させた時の構造本体の変位モード ($d/AR = 0.044$)



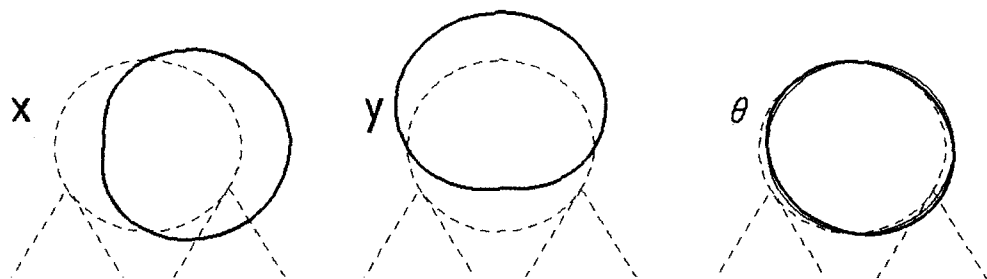
図—5 (b) 肉厚を変化させた時の構造本体の変位モード ($d/AR = 0.087$)



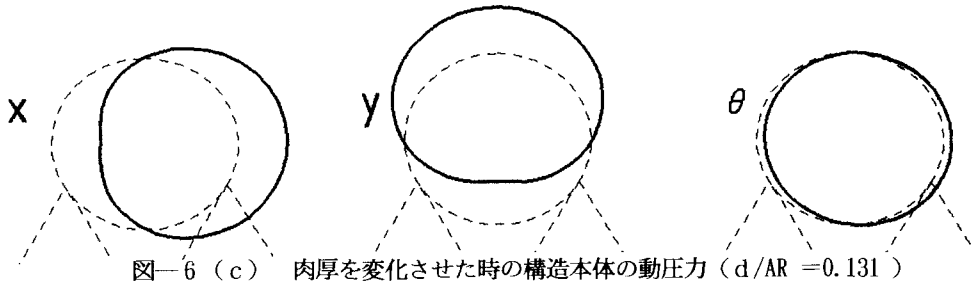
図—5 (c) 肉厚を変化させた時の構造本体の変位モード ($d/AR = 0.131$)



図—6 (a) 肉厚を変化させた時の構造本体の動圧力 ($d/AR = 0.044$)



図—6 (b) 肉厚を変化させた時の構造本体の動圧力 ($d/AR = 0.087$)



図—6 (c) 肉厚を変化させた時の構造本体の動圧力 ($d/AR = 0.131$)

表—4 付加質量を考慮しない固有周期 (秒)

d/AR	x	y	θ
0.044	0.260	0.115	0.121
0.087	0.296	0.153	0.159
0.131	0.353	0.187	0.194
0.174	0.406	0.215	0.227

式 (1) で $M_e = 0$ とした固有周期を表—4 に示す。この時 x, y, θ 方向の卓越する周期が、次式より得られるものとする。

$$T_0(i) = 2\pi \sqrt{\frac{M(i)}{K(i)}} \quad (19)$$

ここで $i = x, y, \theta$ であり、 $M(i)$, $K(i)$ は i に対応する質量および剛性を表すものとする。一方構造—流体連成時の周期 T_f を次式で評価する。

$$T_f(i) = 2\pi \sqrt{\frac{\delta M(i) + M(i)}{K(i)}} \quad (20)$$

ここで $\delta M(i)$ は、流体の影響による付加質量で

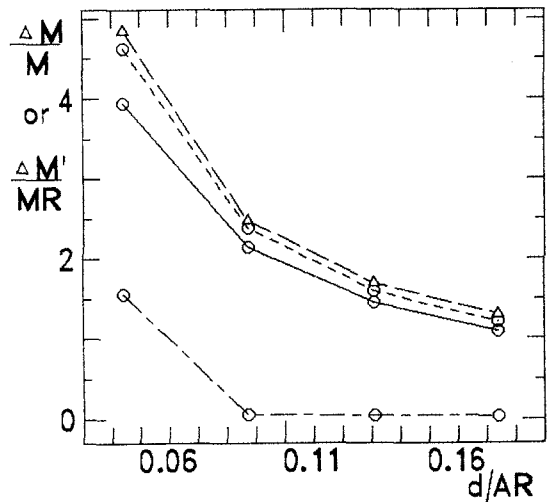
ある。式 (19), 式 (20) より付加質量係数は、式 (21) により算定できる。一方経験的な付加質量係数は、剛体の並進については式 (22) となる。 α は形状係数で円の場合 1.0 である。

$$\frac{\delta M(i)}{M(i)} = \frac{T_f^2(i) - T_0^2(i)}{T_0^2(i)} \quad (21)$$

$$\frac{\delta M'}{M_R} = \frac{\alpha \rho_0 \pi AR^2}{M_R} \quad (22)$$

また剛体の回転変位に対する付加質量は、構造の断面が円断面の場合 0 に近い。構造本体が剛体的な回転変位だけを起こせば、構造本体は円形断面だから運動は流体と連成せず、付加質量も生じないが、実際には係留索があるために水平方向の並進運動が連成するので、その並進が流体との連成を起こし、そこから付加質量が加わる。しかし水平方向の変位は回転変位 (回転角振幅 $\times$ 回転半径) に比較して、円断面の場合小さいので、その効果も僅かである。これは構造本体を剛体とした固有方程式に、経験的な付加質量を加えて解く事によっても確認できる。表—2 と表—4 の数値から式 (21) で計算した付加質量係数を図—7 に示す。さらに式 (22) の経験的な付加質量 $\delta M'$ を使い、経験的な付加質量係数 $\delta M' / M_R$ もあわせて図—7 に示す。ここで式 (22) は剛体を念頭においた式なので M_R としては、構造本体の総質量を採用する。

図—7 において、x, y 方向の振動に対する付加質量については、 d/AR が 0.087 以下であっても経験式



図—7 付加質量係数

- : x 方向
- : y 方向
- ...○...: θ 方向
- △--: 剛体運動と経験式に基づく付加質量係数

との差は大きくないが、回転変位については、ほぼ0から大きく変化する。これは動圧力図、図—6 (a) ～ (c) から理解できて、 d/AR が0.087 以下であっても x , y モードの圧力分布は剛体のものと余り差はないが、回転モードの圧力分布は弾性体のものが、大きく変化する。

以上、弾性体と剛体の周期の比、付加質量係数の変化からみても、 d/AR が0.087 以上であれば、概ね剛体とみなせる事がわかる。またそうであれば、付加質量係数は経験式から大きくはずれない。

4. まとめ

流体と連成する水中構造物の固有振動問題を、有限要素法と境界要素法の併用により定式化し、数値計算例では、構造本体の剛性を考慮した場合と剛体とみなした場合を解析し、構造本体の剛性の取扱い方の動特性に与える影響を調べた。ここで取り上げた中空円形断面の場合には、以下のように要約される。

(1) 固有周期、固有モードおよび付加質量係数の比較より、構造本体を剛体として取り扱える肉厚は、 $d/AR \geq 0.087$ である。 $d/AR \geq 0.087$ であれば、固有周期の差は5 %以内である。

(2) 構造本体を弾性体として、境界要素法により計算した付加質量係数と、構造本体を剛体として経験式により計算した付加質量係数との差は、構造本体が剛体とみなせる間 ($d/AR \geq 0.087$) は、剛体・経験式の付加質量係数を規準とした場合、水平方向で最大13%、鉛直方向で最大3.9 %と小さく、回転方向の付加質量係数も、0.058 でありじゅうぶん0に近い。構造本体が剛体とみなせる間は、付加質量係数は経験式のものに概ね一致する。

参考文献

- 1) 榎本享編, 波と漂砂と構造物 第二章, pp. 51～148, 技報堂出版 1991.
- 2) 瀬戸秀幸, 水面波動問題における開境界処理と数値計算法, 日本造船学会誌第638号, pp. 2～16, 日本造船学会, 1982.
- 3) 井島武夫 周宗仁, グリーンの公式による二次元水面波の境界値問題の解析, 土木学会論文報告集第252号, pp. 57～71, 土木学会, 1976.
- 4) 井島武夫 吉田明德 山本督夫, 任意断面浮体の2次元係留運動と波の変形, 土木学会論文報告集第272号, pp. 53～63, 土木学会, 1978.
- 5) 清川哲志 大山巧, ハイブリッド法による軸対称構造物に作用する流体力および周辺場の解析, 土木学会論文集第345号/II ー1, pp. 131～141, 土木学会, 1984.
- 6) 小林昭夫 増田光一 高木儀昌 佐久田昭 加藤渉, Hybrid型境界要素法を用いた海洋構造物に作用する流体力解析について, 第一回境界要素法シンポジウム研究発表論文集, pp. 25～30, J A S C O M, 1984.
- 7) 松井徹哉 加藤賢治 白井貴志, 境界要素法による海洋波の回折・発散問題の解析, 第一回境界要素法シンポジウム研究発表論文集, pp. 31～36, J A S C O M, 1984.
- 8) 加藤賢治 松井徹哉, 境界要素法による波浪中の近接浮体群に働く流体力解析, 境界要素法論文集第2巻, pp. 185～190, J A S C O M, 1985.
- 9) 川上哲太郎 北原道弘, 積分方程式法による構造物一流体系の動的応答解析, 境界要素法論文集第2巻, pp. 191～196, J A S C O M, 1985.
- 10) K. Kakuda and N. Tosaka, NUMERICAL ANALYSIS OF COUPLED FLUID-ELASTICITY SYSTEMS USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD, Boundary Elements, pp. 1005～1016, Springer-Verlag, 1983.
- 11) 鷺津久一郎監修, 境界要素法—基礎と応用 第10章, pp. 231～243, 丸善株式会社, 1982.
- 12) 鷺津久一郎他, 有限要素法ハンドブック I, II, 培風館, 1981.

(1993年9月16日受付)