構造工学論文集 Vol. 40 A (1994年3月)　　土木学会

ディジェネレイション法に基づいた I形／箱形断面部材の有限要素解析手法

A FINITE ELEMENT METHOD BASED ON DEGENERATION APPROACH FOR ANALYSIS OF I- AND BOX-GIRDERS

山口栄輝*，西野文雄**
By Eiki YAMAGUCHI and Fumio NISHINO

There are two distinct approaches in the finite element analysis of structures: the classical and the degeneration approaches. The degeneration approach is taken in the present study. Based on the assumptions made in the mechanics of thin-walled members and the suggestions of existing works, a 12-node brick element is chosen and a degenerate element for the analyses of I- and box-girders is developed. Numerical analyses are conducted and excellent agreement with the exact solutions is observed, which confirms the effectiveness of the present method. It is also noted that since the nodal degrees-of-freedom of the element are only displacement components, the applicability of this method to finite displacement analysis is promising. Because of its simplicity and effectiveness, the proposed method is believed to open a new approach to the study of thin-walled structures.

Key Words: degeneration approach, FEM, thin-walled members

1．はじめに

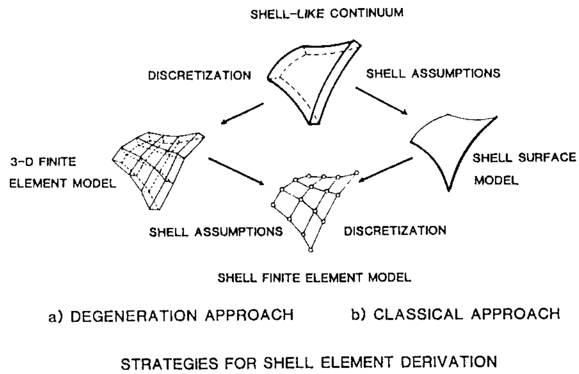
薄肉断面部材の力学に関する研究は，Vlasov[1]をはじめとし国内外で活発に行われてきた．数多くの研究論文が発表されており，仮想仕事の原理に基づいた統一的な薄肉断面部材の基礎理論もすでに構築されている[2]．

しかしながら，薄肉断面部材の理論に基づいて解析的に解が得られるのは，単純な構造物の問題に限られる．そのため，実際的な構造物を解析するには，何らかの数値解法を用いる必要がある．その際よく用いられるのがマトリックス構造解析法や有限要素法であり，これについても多くの研究がなされている．薄肉断面部材の理論における支配方程式をもとに剛性方程式を誘導すると，通常は2節点を有する棒要素が得られる[3]．この場合，各節点は変位3成分，たわみ角2成分，ねじれ角およびその変化率の計7自由度を持つことになる．ねじれ角の変化率は，いわゆる反りモーメントに対応するものである．この反りモーメントは，薄肉断面部材を1次元棒材として扱う際に大きな意味を持つようになる物理量であるが，初学者にとってその物理的意味は必ずしも理解し易いものではない．

ところで，有限要素法で構造解析をする手法にディジェネレイション法がある[4)-7)]．図－1に示すように，古典的手法では構造部材としての仮定を課した上で支配方程式を誘導し，それをもとに有限要素を開発

* Ph. D. 東京大学助教授　工学部土木工学科　(〒113 東京都文京区本郷7-3-1)
** Ph. D. 東京大学教授　工学部土木工学科　(〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

する．これに対し，ディジェネレイション法では，連続体の支配方程式をもとに離散化を行い，有限要素や構成式等に構造部材の仮定を取り込んでゆく．このため，ディジェネレイション法では低次の微分方程式を取り扱うことになり，低次要素の使用も可能となる[5),6)]．また古典的な構造部材の有限要素では，たわみ角が必ず節点自由度となるが，ディジェネレイション法では変位のみを自由度とすることも可能である[6)-9)]．この点は，３次元解析，特に３次元有限変位解析で非常に大きな利点となる．



図－１　有限要素法における２つのアプローチ[7)]

ディジェネレイション法による薄肉断面部材の解析例には，文献 10)がある．そこで提案された要素は，任意断面に適用可能な，非常に一般的で優れたものではあるが，補助節点を必要としたり，たわみ角を節点自由度として有するなど，複雑で計算効率も良くなく，ディジェネレイション法の特長をあまり生かしているとは思われない．ディジェネレイション法の利点を十分に生かせば，よりシンプルで直感的にも理解し易い要素の開発が可能であると考えられ，そのための基礎的研究として，本研究ではＩ形および箱形断面部材を対象とした解析法の提案を行う．ここでは微小変位解析のみを扱うが，有限変位問題への適用性も考慮し，節点自由度としてベクトル量のみを有する要素を考える．

２．Ｉ形／箱形断面部材要素

(1) 要素剛性行列

ディジェネレイション法では，連続体の支配方程式をもとに要素剛性行列を導けばよい．アイソパラメトリック要素を用いることを前提にし，ガラーキンの重みつき残差法を適用して定式化すれば，次式が容易に得られる．

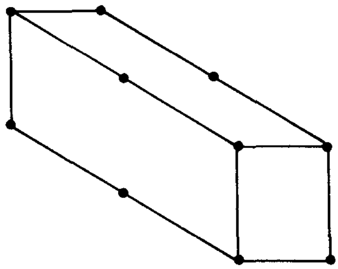
$$K_{ij}^{ab} = \int_{V^e} N^a_{,k}\, C_{ijkl}\, N^b_{,l}\, dV \tag{1}$$

ここで i,j,k,l はテンソル指標，a,b は節点番号，N^a は節点 a に対応した形状関数，C_{ijkl} は応力－ひずみ関係を表すテンソル，V^e は要素の領域を示している．式(1)は，任意のアイソパラメトリック要素に適用可能な要素剛性行列の表現である．

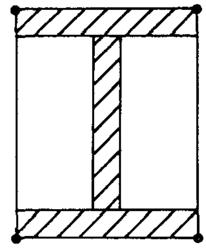
(2) 有限要素

ディジェネレイション法の有限要素は，固体要素に構造部材の基本仮定を取り込んだものとなる．シェルについては，双１次の形状関数をもつ低次のアイソパラメトリック要素をもとに開発された要素が成功を収めているが[5),6)]，より大きな曲げ変形をする梁については，軸方向に２次の形状関数を有する要素の方がはるかに優れていることが指摘され[8)]，それにより高精度の解が得られている[8),9)]．そこで，本研究の薄肉断面部材要素の開発においても，軸方向には２次の形状関数を有するアイソパラメトリック要素を用いることにする．

梁理論においては，変位後も断面の平面性は保たれるという，いわゆる平面保持の仮定がなされる．その延長として，薄肉断面部材においては，断面を構成する各薄板の断面について平面保持を仮定することがで



図－2　１２節点六面体要素



図－3　積分領域（Ｉ形断面）

きる．このため，Ｉ形断面や箱形断面については，断面内に4節点を配すれば，断面の挙動を表すことが可能となる．

以上の議論に基づけば，図－２に示すような，１２節点六面体アイソパラメトリック要素を用いてＩ形および箱形断面部材要素を開発すればよいことになる．この要素自体の断面は四角形であり，Ｉ形や箱形断面とは異なる．しかしながら，四角形断面の一部を空であると考えることにより，任意のＩ形や箱形の断面を取り扱うことが可能となる．すなわち，式(1)の要素剛性行列の計算に際し，実際の断面部についてのみ積分を実行すればよく，例えば図－３に示すＩ形断面の場合，断面積分は斜線部についてのみ実行し，他の部分は無視することになる．なお，この要素の節点自由度は，ベクトル量の変位３成分のみである．

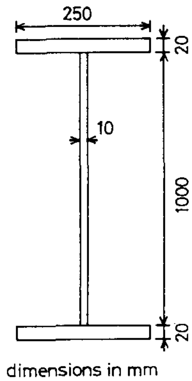
(3) 構成則

薄肉断面部材は１次元棒材としてとらえることができ，直応力は軸方向成分のみが非零であると仮定される．このため，構成則には残りの直応力成分に関する項は，理論上，必要ない．しかしながら，Kanoku-Nukulchai らがシェル要素に関して詳しく論じているように，数値計算を安定させるためには，これらの項にも仮想剛性として非零値を与える必要がある[6]．当然のことながら，仮想剛性の大きさにより計算結果は変化するが，仮想剛性の値がある範囲内であれば，その大きさの影響は無視できる．仮想剛性が取るべき値の範囲はかなり大きなものであり[6],[8]，２次元梁の場合には，仮想剛性として弾性係数（ヤング率）を与えれば十分によい結果が得られることが報告されている[8],[9]．そこで，本研究の薄肉断面部材要素でも，弾性係数を仮想剛性にあてることとする．

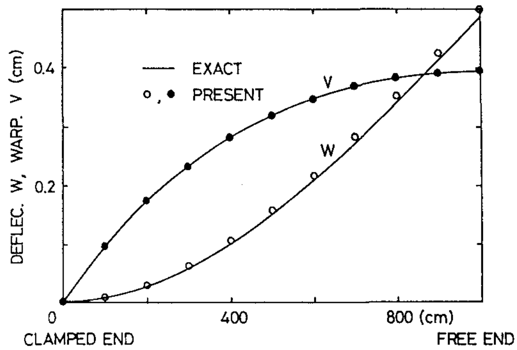
(4) 計算法

曲げ問題において，要素剛性行列を計算する際に厳密な積分を行うと，剛性が過大に評価され良い結果が得られないことがある[11]．これは棒材の深さや板厚が小さい場合に特に大きな問題となる．この現象はシアーロッキングと呼ばれており，その対策として選択的次数低減積分がある[11]．棒軸方向に２次の形状関数を有する２次元のディジェネレイト梁要素の場合，せん断変形に関する項について厳密な積分を行うには棒軸方向に３個のガウス点を取った数値積分を行う必要があるが，実際には２個のガウス点を用いた選択的次数低減積分による計算の方がよい結果が得られる[8],[9]．このため，本研究においても，式(1)の積分計算に際し，棒軸方向にはすべての項について２個のガウス点を用いることとする．

薄肉断面部材は十分に薄い板で構成されているため，断面内のせん断応力は薄肉中心線方向成分のみを考えればよく，ねじり定数もそれに基づき計算される[2]．しかし，本研究では薄肉断面を四角形断面の一部として扱うため，薄肉の厚さ方向のねじり抵抗も評価され，式(1)を計算する際に断面積分を厳密に行うと，断面のねじり定数を過大評価してしまう．剛性を低下させる方法としては，ある定数を乗じる方法や低減積分を適用することが考えられるが，ここではいくつかの数値実験を行い，Ｉ形断面の場合にはフランジのせ



図－４　Ｉ形断面



図－５　Ｉ桁のたわみと反り（1000 cm）

表－１　自由端でのたわみと反り
（Ｉ桁：1000 cm）

	たわみ	反り
本解析法	0.49817 cm	0.39318 cm
厳密解	0.48525 cm	0.39330 cm

表－２　自由端でのたわみと反り
（Ｉ桁：10000 cm）

	たわみ	反り
本解析法	485.38 cm	0.50694 cm
厳密解	485.25 cm	0.50700 cm

ん断変形に関する項を（フランジ厚／フランジ幅）^{2} 倍し，箱形断面の場合には各薄肉の断面積分においてガウスの１点積分を適用することとした．

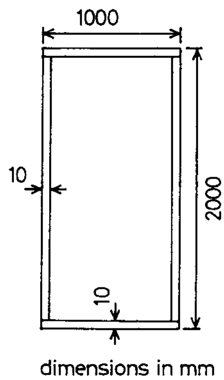
３．数値計算例

本要素の有効性，妥当性を検討するために数値解析を行った．精度の検証を行うことを念頭におき，厳密解（通常の薄肉断面部材理論に基づいた解）を容易に得ることのできる，自由端に鉛直荷重とねじれモーメントを受ける片持梁を解析対象とした．埋め込み端では軸方向変位も拘束されるため，これは典型的な反りねじれ問題となっている．なお以下のすべての解析例で，ヤング率 2.0×10^6 kgf/cm^2，ポアソン比 0.3 を仮定した．

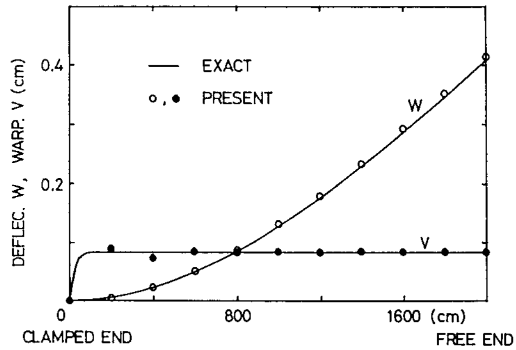
(1) Ｉ桁

図－４のＩ形断面を有する長さ 1000 cm の片持梁に鉛直荷重 1000 kgf，ねじれモーメント 10^5 kgf･cm が作用する場合の解析を，５要素を用いて行った．計算結果として，図－５に軸線に沿ったたわみと反りの分布，また表－１には自由端でのたわみと反りを厳密解とともに示している．なお，図－５の本解析法の結果は節点変位である．

軸線方向の変化は，たわみが３次関数，反りが双曲線関数で表されるが，本解析手法の計算結果は厳密解と良く一致したものとなっている．特に反りは，誤差が梁の全長にわたって 1 % を大きく下回っており，高精度の解となっている．比較的大きな誤差がたわみに見られるものの，最大でも自由端の 2.7 % に過ぎない．たわみの誤差は，厳密解と本解析手法における基本仮定の違いに起因するものと考えられる．すなわち，厳密解の算出に用いた理論ではせん断変形としてサン・ブナンのねじりによるもののみを許すと仮定しているのに対し，本研究の薄肉断面部材要素はティモシェンコ梁としてのせん断変形も許すものになっている．せん断変形のたわみへの影響は，梁高ｄと梁の長さＬの比ｄ／Ｌの値が小さくなるにつれ減少する[3]．このため，2.7 % の誤差自体は実用上無視できるものであるが，上述の議論を実証するため，断面形状は維



図－6　箱形断面



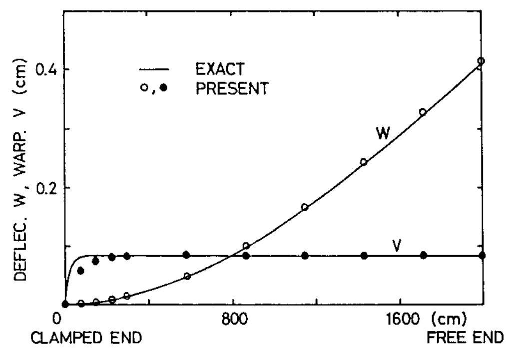
図－7　箱桁のたわみと反り（2000 cm）

表－3　自由端でのたわみと反り
（箱桁：2000 cm）

	たわみ	反り
本解析法	0.41164 cm	0.085397 cm
厳密解	0.40690 cm	0.083735 cm

表－4　自由端でのたわみと反り
（箱桁：20000 cm）

	たわみ	反り
本解析法	406.69 cm	0.085053 cm
厳密解	406.90 cm	0.083735 cm



図－8　箱桁のたわみと反り（要素分割修正後）

持したまま部材長を10倍にして解析を行った．計算結果として自由端での値を表－2に示しているが，たわみの誤差は 0.02 % に減少しており，たわみの誤差はせん断変形に関する基本仮定の違いによるものであることが理解される．

(2) 箱桁

図－6の長方形断面を有する長さ 2000 cm の片持梁を5要素でモデル化して解析した．鉛直荷重 1000 kgf，ねじれモーメント 10^8 kgf·cm が自由端に作用するものとして計算し，解析結果として，図－7に軸線に沿ったたわみと反りの分布，また表－3には自由端でのたわみと反りを厳密解とともに示している．

自由端において 1.2 % の誤差がたわみに生じているため，I形断面の場合と同様に，部材長を１０倍にして解析を行った．ただし，5要素でこの解析を行うと反りが 0.03785 cm となり厳密解とかけ離れるため，要素数を１０個に増やして解析を行った．その結果をまとめたのが表－4である．たわみの誤差は 0.05 % に減少しており，十分満足のゆく結果となっている．

ところで，図－7に示す反り分布では，固定端近傍の有限要素解に乱れが見られる．これは，反りが固定端近傍で急激に増加することの影響と考えられるため，この領域で要素が小さくなるように要素分割を調節して解析を行った．その結果を表すのが図－8であり，図－7の結果に比べると，かなり改善されたものとなっている．さらにまた，要素数を１０個に増加した解析も行ったが，その場合でも，反りには 1～2 % 程

度の誤差が生じた．しかしながら，基本的に箱形薄肉断面はねじれ剛性が大きく反りが小さいため，この程度の誤差は実用上全く問題ないと思われる．

4．おわりに

ディジェネレイション法に基づきＩ形／箱形断面部材要素を開発した．これは３次元連続体から誘導したもので，薄肉断面部材の力学における基本仮定は有限要素のタイプや構成則等に取り込んでいる．節点自由度は変位の３成分のみであり，初学者にとって物理的意味を把握しにくい反りモーメントやねじれ角の変化率といった概念を必要とせず，薄肉断面部材の力学を連続体力学の範疇でとらえる際にも役に立つ解析法であると思われる．

数値解析例により本解析手法の有効性を検討した．箱形断面の反りについてはまだ若干改善の余地はあるものの，全般的には十分に満足のゆく高精度の結果が得られた．本研究では精度の検証に主眼を置き，容易に厳密解が得られる問題のみを扱ったが，この解析手法は，本来，任意形状の薄肉断面部材の非線形解析に適用可能であると考えられ，今後はそうした問題への適用性について検討してゆく予定である．提案した要素の節点自由度はベクトル量である変位成分のみであるため，本解析手法は有限変位解析において特に大きな利点を有するものと考えている．

参考文献

1) Vlasov, V.Z.: Thin-Walled Elastic Beams, National Science Foundation, Washington D.C., 1961.
2) 西野文雄：薄肉断面部材の基礎理論，鋼構造の研究（岡本舜三編），奥村敏恵教授還暦記念，技報堂出版，1977年．
3) 西野文雄・長谷川彰夫：構造物の弾性解析，新体系土木工学７，技報堂出版，1983年．
4) Ahmad, S., Irons, B.M. and Zienkiewicz, O.C.: Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.2, pp.419-451, 1970.
5) Kanok-Nukulchai, W.: A simple and efficient finite element for general shell analysis, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol.14, pp.179-200, 1979.
6) Kanok-Nukulchai, W., Taylor, R.L. and Hughes, T.J.R.: A large deformation formulation for shell analysis by the finite element method, Comput. Structures, Vol.13, pp.19-27, 1981.
7) Kanok-Nukulchai, W., Hasegawa, A. and Nishino, F.: Generic formulation procedure for large deformation analysis of structural elements, Proc. of JSCE, No.368/I-5, pp.65-73, 1986.
8) Kanok-Nukulchai, W. and Sze, K.H.: An accurate degenerate beam element for large deformation analysis, Proc. Int. Conf. on Finite Element Methods, Shanghai, pp.727-733, 1982.
9) 山口栄輝・Kanok-Nukulchai, W.・太田俊昭：有限要素法による棒材の有限変位解析に関する研究，構造工学論文集，土木学会，Vol.35A, pp.175-183, 1989年．
10) Kanok-Nukulchai, W. and Sivakumar, M.: Degenerate elements for combined flexural and torsional analysis of thin-walled structures, J. Struct. Eng., ASCE, Vol.114, pp.657-674, 1988.
11) Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L. and Too, J.M.: Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, Int. J. Numer. Meth. Engng., Vol.3, pp.275-290, 1971.

（1993年9月16日受付）