

Spline Prism法を用いた扇形厚板
の3次元解析について

THREE DIMENSIONAL-ANALYSIS OF ANNULAR SECTOR THICK PLATES BY USING THE SPLINE PRISM METHOD

高木信治*

水澤富作**

BY SHINJI TAKAGI and TOMISAKU MIZUSAWA

This paper presents application of the spline prism method which is a semi-analytical model based on the three-dimensional elasticity theory to analyse stress and vibration of thick, annular sector plates. To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and the results are compared with those obtained by other numerical methods. Stable convergence and good accuracy are obtained using the higher-order spline prism models. The effects of thickness ratio, sector angle, radii ratio on the stress distributions through thickness and frequencies of annular sector plates, are investigated.

Key Words : spline prism method, annular sector thick plate,
vibration, stress analysis

1. まえがき

構造物の大型化や重量化に伴いかなり分厚い平板が用いられ、また曲線スラブ橋やタンクの底板などに扇形厚板が採用されるので、このような構造要素の構造解析が設計上重要になっている。このような厚板問題では、薄板理論では無視される横せん断変形、回転慣性や板厚方向のひずみ(応力)成分や表面載荷などの影響が無視できなくなる。したがって、板の厚さ方向の応力分布特性、厳密な荷重載荷条件や境界条件を考慮するために、3次元弾性理論や種々の高次せん断変形板理論に基づく厳密解法や種々の数値解析法が提案されてきている。これらの厚板理論では、3次元的な力学量のうち平板としての特性に着目し、その特性を解析仮定の中に取り込み、解析を簡単化し近似理論としての弾性平板の高次理論である。すなわち、これらの2次元化理論は、厚さ方向に級数展開を行い、板厚方向の影響が近似的に考慮されている。したがって、厚さ方向の級数展開を高めれば、より高次の厚板理論が導けるが、解式が複雑になり、未知数の数も増大してくる。また、高次の厚板理論では物理的に不明瞭な力学量を考慮しなければならず、また境界条件の取扱いも複雑になる¹⁾。したがって、3次元弾性体である厚板のより正確な応力と変形状態や振動特性を知るためには、厳密な弾性理論に基づかなければならない。これまでにも、3次元弾性理論に基づく厳密解法²⁾、選

* 大同工業大学大学院生 工学研究科建設工学専攻 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

** 工博 大同工業大学助教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

点法³⁾、Rayleigh-Ritz法⁴⁾、有限要素法¹⁾や節点プリズム法⁵⁾などの数値解析法を用いて、長方形厚板の振動解析や応力解析が行われている。しかしながら、これらの解析法では、境界条件の制約、未知数の増大や解析精度などに問題点が見受けられる。

一方、扇形厚板は長方形厚板と比較して、その構造特性により非対称な力学的性状を示す。これまでも、薄板理論や一次せん断変形理論に基づく扇形板の振動解析や応力解析が報告されているが^{1,6)}、3次元弾性理論に基づく研究は非常に少ないように思われる。奥村ら^{1,9)}は、Papkovich-Neuberの解法を用いて部分分布荷重を受ける2つの相対する2辺がそれぞれ単純支持及び自由な扇形厚板の三次元応力解析を行っている。さらに奥村ら^{1,8)}は、Loveの理論に基づく扇形厚板理論を提案し、表面分布荷重を受ける扇形厚板の応力解析を行い、薄板理論の適用限界についても考察している。有限要素法の欠点である未知数の増大を低減する手法¹⁷⁾として、ZienkiewiczとTooら⁹⁾は、アイソパラメトリック要素の離散化概念と一次元方向に変位をフーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である有限プリズム法(Finite Prism Method)を提案し、曲線ばりや厚肉曲線箱桁橋の応力解析に適用している。また、Cheungら⁷⁾、水澤⁸⁾は、この有限プリズム法を用いて扇形厚板の振動解析を行っている。

最近、著者ら⁹⁾は有限プリズム法と同様な離散化概念に基づくSpline Prism法を用いて長方形厚板の振動解析を行い、数値安定性の高い解析結果を得ている。また、従来の有限プリズム法と比較して、未知数をかなり低減できる。

本研究では、3次元弾性理論に基づくSpline Prism法を用いて、半径方向の2つの支持辺で単純支持された扇形厚板の応力解析や振動解析を行っている。この方法は、一方向に固有関数を仮定し、他の2方向にB-spline関数を用いた3次元の曲線帯板モデルである。本手法の解析精度や収束性に与えるスプライン次数やプリズム要素の分割数の影響について検討する。また、表面分布荷重を受ける扇形厚板の厚さ方向の応力や変位分布特性や振動特性に与える板厚比、中心角、半径比や境界条件などの影響についても明らかにしている。

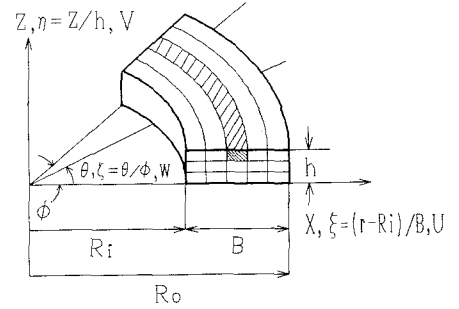


図-1 曲線プリズム要素と座標系

2. 解析手法

3次元弾性理論とポテンシャルエネルギー最小化原理を用いて、図-1に示すような曲線Spline Prism要素モデルを導く。このSpline Prism法は、2方向の変位にB-spline関数を仮定し、他の一方向に変位をフーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。このSpline関数の次数を高めることにより、任意の高次のSpline Prismモデルが導かれる。

式の定式化にあたり、次式で表される無次元極座標系を用いる。

$$\xi = (r - R_i)/B, \quad \eta = z/h, \quad \zeta = \theta/\phi \quad (1)$$

ここで、 $B = R_o(\delta - 1)$ 、 $\delta = R_o/R_i$ 、 B は扇形板の幅、 h は厚さ、 ϕ は中心角、 r は半径であり、また R_i と R_o はそれぞれ扇形板の内径と外径を示す。

プリズム要素で仮定される ξ 、 η 、 ζ 方向の変位関数 U, V, W は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\ell=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{iR} \sum_{n=1}^{iZ} A_{mn} N_{m,\kappa}(\xi) N_{n,\kappa}(\eta) \right\} Z_{\ell}(\zeta) = \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_A\}_{\ell} \\ V &= \sum_{\ell=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{iR} \sum_{n=1}^{iZ} B_{mn} N_{m,\kappa}(\xi) N_{n,\kappa}(\eta) \right\} Z_{\ell}(\zeta) = \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_B\}_{\ell} \\ W &= \sum_{\ell=1}^R \left\{ \sum_{m=1}^{iR} \sum_{n=1}^{iZ} C_{mn} N_{m,\kappa}(\xi) N_{n,\kappa}(\eta) \right\} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) = \sum_{\ell=1}^R [N]_{mn} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) \{\delta_C\}_{\ell} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $ir=k-1+Mr$, $iz=k-1+Mz$, $Z_l(\xi)$ と $\overline{Z}_l(\xi)$ は、それぞれ半径方向の支持辺で与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は正規化されたB-spline関数であり、 $k-1$ はB-spline関数のスプライン次数、 Mr と Mz はそれぞれ r と z 方向のプリズム要素の分割数である。 R は、固有関数の級数の項数である。また、式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = \sum_{l=1}^R [S]_{mn}^l \{\Delta\}_l \quad (3)$$

ただし、 $\{d\} = \{U, V, W\}^T$, $\{\Delta\}_l = \{\{\delta_u\}_l, \{\delta_v\}_l, \{\delta_w\}_l\}^T$ であり、 $[S]_{mn}^l$ は、

$$[S]_{mn}^l = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Z_l(\xi) & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} Z_l(\xi) & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{mn} \overline{Z}_l(\xi) \end{bmatrix} \quad (4)$$

で表される。

次に、3次元弾性理論で定義される垂直ひずみ及びせん断ひずみを無次元極座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{z\theta} \end{Bmatrix} = (1/B) \begin{Bmatrix} \partial U / \partial \xi \\ (B/h)(\partial V / \partial \eta) \\ \{U/(\xi+Ri/B) + (1/\xi+Ri/B)(1/\phi) \partial W / \partial \xi\} \\ \{\partial V / \partial \xi + (B/h) \partial u / \partial \eta\} \\ \{\partial W / \partial \xi - W/(\xi+Ri/B) + (1/\xi+Ri/B)(1/\phi) \partial U / \partial \xi\} \\ \{1/(\xi+Ri/B)(1/\phi)(\partial V / \partial \xi) + (B/h)(\partial W / \partial \eta)\} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

また、式(2)を式(5)に代入すれば、次式の関係式で表される。

$$\{\varepsilon\} = \sum_{l=1}^R [B]_{mn}^l \{\Delta\}_l \quad (6)$$

ここで、 $[B]_{mn}^l$ はひずみマトリックスであり、次式で与えられる。

$$[B]_{mn}^l = \sum_{m=1}^{ir} \sum_{n=1}^{iz} (1/B) \begin{bmatrix} \dot{N}_{m,k} N_{n,k} Z_l & 0 & 0 \\ 0 & (B/h) \dot{N}_{m,k} \dot{N}_{n,k} Z_l & 0 \\ (1/g) \dot{N}_{m,k} N_{n,k} Z_l & 0 & -(1/g\phi) \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \dot{\overline{Z}}_l \\ (B/h) \dot{N}_{m,k} \dot{N}_{n,k} Z_l & \dot{N}_{m,k} N_{n,k} Z_l & 0 \\ (1/g\phi) \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \dot{\overline{Z}}_l & 0 & \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \overline{Z}_l - (1/g) \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \overline{\dot{Z}}_l \\ 0 & (1/g\phi) \dot{N}_{m,k} N_{n,k} \dot{\overline{Z}}_l & (B/h) \dot{N}_{m,k} \dot{N}_{n,k} \overline{\dot{Z}}_l \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし、 $\dot{N}_{m,k} = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$, $\dot{N}_{n,k} = \partial N_{n,k}(\eta) / \partial \eta$, $\dot{Z}_l = \partial Z_l(\xi) / \partial \xi$, $\dot{\overline{Z}}_l = \partial \overline{Z}_l(\xi) / \partial \xi$, g は $\xi+Ri/B$ である。

等方性、等質の扇形厚板の構成式は、次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (8)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_r, \sigma_z, \sigma_\theta, \tau_{rz}, \tau_{\theta r}, \tau_{z\theta}\}$ ，また弾性マトリックスは、次式で示される。

$$[D] = D_0 \begin{pmatrix} 1 & D_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & D_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし、 $D_1 = \nu/(1-\nu)$ ， $D_2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$ ， $D_0 = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$ であり、 E はヤング係数、 ν はポアソン比である。

したがって、等厚、等方性な扇形厚板のひずみエネルギー、 U_p と運動エネルギー、 T は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U_p &= (B^2 h \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \{\xi+1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= (B^2 h \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^Q \{\Delta\}^T \ell [B]_{mn}^T [D] [B]_{ij}^s \{\Delta\}_s \{\xi+1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= (1/2) \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^Q \{\Delta\}^T \ell [K]_{\ell s} \{\Delta\}_s \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} T &= (\rho \omega^2 B^2 h \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{U^2 + V^2 + W^2\} \{\xi+1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= (\rho \omega^2 B^2 h \phi / 2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^Q \{\Delta\}^T \ell [S]_{mn}^T [S]_{ij}^s \{\Delta\}_s \{\xi+1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= (\omega^2 / 2) \sum_{\ell=1}^R \sum_{s=1}^Q \{\Delta\}^T \ell [M]_{\ell s} \{\Delta\}_s \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $[K]_{\ell s}$ と $[M]_{\ell s}$ はそれぞれ剛性マトリックスと質量マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[K]_{\ell s} = (B^2 h \phi) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [B]_{mn}^T [D] [B]_{ij}^s \{\xi+1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \quad (12)$$

$$[M]_{\ell s} = (\rho B^2 h \phi) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [S]_{mn}^T [S]_{ij}^s \{\xi+1/(\delta-1)\} d\xi d\eta d\zeta \quad (13)$$

ただし、 ρ は扇形板の密度であり、 ω は円振動数(rad/sec)である。

次に、 $\eta = \eta_0$ 面に作用する等分布荷重、 q_0 と集中荷重、 P_0 による外力ポテンシャル、 F は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} F &= \int_0^1 \int_0^1 q_0 \cdot V(\xi, \eta, \zeta) \{\xi+1/(\delta-1)\} d\xi d\zeta \big|_{\eta=\eta_0} + P_0 \cdot V(\xi_0, \eta_0, \zeta_0) \\ &= \sum_{\ell=1}^R \{f\}_{\ell} \{\Delta\}^T \ell \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、 $\{f\}_{\ell}$ は荷重ベクトルであり、 $\xi_0 = (r_0 - R_i)/B$ ， $\eta_0 = z_0/b$ ， $\zeta_0 = \theta_0/\phi$ は、それぞれ荷重の作用する位置を示す。

いま、2つの相対する円弧辺の境界面 ($\xi = \xi_{ic}$) で任意の幾何学的境界条件を考慮するため、仮想バネ法⁹⁾を用いる。すなわち、 $\xi = \xi_{ic}$ の境界面で、それぞれ変位 U, V, W に対応する仮想バネ係数、 α, β, γ を導入すれば、これらのバネによるひずみエネルギー、 U_b は、次式で与えられる。

$$U_b = (h \phi / 2) \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 \{\alpha U^2 + \beta V^2 + \gamma W^2\} d\eta d\zeta \big|_{\xi=\xi_{ic}} \quad (15)$$

ただし、 N_c は境界辺の数である。本手法はエネルギー法に基づいているので、幾何学的境界条件のみを考慮すれば、力学的境界条件は変分操作により満足させられる。したがって、単純支持された境界面では $V=W=0$ を仮定し、また固定面では $U=V=W=0$ を用いる。

したがって、扇形厚板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、

$$\Pi = U_p + U_b - T - F \quad (16)$$

で与えられる。ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の基礎方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_l^T = \sum_{s=1}^R \sum_{s=1}^Q ([K]_{ls} \{\Delta\}_s - \omega^2 [M]_{ls} \{\Delta\}_s - \{f\}_s) = 0 \quad (17)$$

剛性マトリックス $[K]_{ls}$ と質量マトリックス $[M]_{ls}$ は、次式のようなサブマトリックスから構成されている。

$$[K]_{ls} = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{bmatrix}_{ls} \quad [M]_{ls} = \begin{bmatrix} [M_{uu}] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{vv}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{ww}] \end{bmatrix}_{ls} \quad (18)$$

これらのサブマトリックス $[K_{ij}]$ と $[M_{ij}]$ は、Appendixに示してある。

ここで、半径方向の支持辺がダイアフラムタイプの単純支持条件 ($\zeta=0,1$; $U=V=\partial W/\partial \zeta=0$) を仮定すれば、この場合の固有関数は、それぞれ次式で与えられる。

$$\begin{aligned} Z_l(\zeta) &= \sin(l\pi\zeta), \\ \bar{Z}_l(\zeta) &= \cos(l\pi\zeta); l=1,2,\dots,R \end{aligned} \quad (19)$$

したがって、これらの固有関数の直交性により、級数の連成項が消えるので、式(17)は、次式のようになる。

$$\sum_{l=1}^R ([K]_{ll} - \omega^2 [M]_{ll}) \{\Delta\}_l - \{f\}_l = 0 \quad (20)$$

ここで、 $[K]_{ll}$ と $[M]_{ll}$ の大きさは、 $3 \times (k-1+M_r) \times (k-1+M_z)$ である。 $k-1$ はスプライン次数であり、 M_r と M_z はブリズム要素の分割数である。

式(20)より、荷重ベクトルを無視すれば振動解析ができ、また $[M]_{ll}$ をはずせば、応力解析ができる。

3. 数値計算例及び考察

3.1 扇形厚板の3次元応力解析 (1) 本手法の収束性と精度の検討

はじめに、本手法で求められた解の収束性や精度などの数値安定性について検討するために、半径方向の支持辺で単純支持され、2つの相対する円弧辺で任意の境界条件を持つ等方性扇形厚板の3次元応力解析を行っている。また、等分布表面荷重を受ける扇形板の板厚方向の応力分布や変位分布特性に与える板厚比、 B/h や半径比、 R_o/R_i 、中心角、 ϕ の影響について示す。ただし、本数値計算例では、厚さ方向と半径方向のブリズム要素の分割数は同一とする。また、式(20)で示される剛性マトリックスと質量マトリックスの数値積分では、高次のスプライン関数を用いるので、低減積分を行わず、多項式の次数、 $k+2$ の積分公式により数値積分を行っている。ただし、 $k-1$ はスプライン関数の次数である。表-1には、等分布表面荷重、 q を受ける2つの相対する円弧辺が固定(SS-CC)された扇形板の中央断面($\xi=0.5$, $\zeta=0.5$)での変位、 V と垂直

表-1 相対する2辺が固定された扇形板の変位と応力に与えるブリズム要素の分割数の影響; $R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.3$, $R=31$, $\xi=0.5$, $\eta=1.0$, $\zeta=0.5$

B/h	k-1	M _r =M _z	V	σ _r	σ _φ
10.0	3	4	- 3.594	- 23.91	- 14.97
		8	- 3.628	- 23.00	- 14.39
		10	- 3.636	- 22.62	- 14.06
		12	- 3.641	- 22.84	- 14.27
	4	12	- 3.649	- 22.86	- 14.31
2.5	3	4	-0.6198	- 1.920	- 1.641
		8	-0.6229	- 1.907	- 1.591
		10	-0.6234	- 1.862	- 1.585
		12	-0.6236	- 1.889	- 1.569
	4	12	-0.6240	- 1.890	- 1.574
multipliers			qB ² /D ₀ h	q	q

応力(σ_r , σ_θ)の収束性に与えるプリズム要素の分割の影響が示してある。ここで、スプライン次数を3にとり、プリズム要素の分割数は4か

表-2 相対する2辺が固定された扇形板の変位と応力に与える級数項の項数の影響; $R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $k=1=3$, $\nu=0.3$, $M_r=M_z=12$, $\xi=0.5$, $\eta=1.0$, $\zeta=0.5$

B/h	R	V	σ_r	σ_θ
5		-3.648	-22.96	-14.54
11		-3.641	-22.82	-14.23
15		-3.641	-22.83	-14.25
21		-3.642	-22.87	-14.32
31		-3.641	-22.84	-14.27
multipliers		$qB^2/D_o h$	q	q

ら12まで変化させている。また、板厚比は $B/h=10.0, 2.5$ 、半径比、 $R_o/R_i=2.0$ 、中心角、 $\phi=45^\circ$ に仮定している。この表より、薄板から厚板まで、プリズム要素の分割数を10分割程度まで高めれば、十分な収束値が得られる。さらに、この問題の解の収束性に与える級数項の項数の影響が表-2に示してある。これより、級数項の項数を11項程度にすれば、収束値が得られている。

次に、表-3には、等分布表面荷重, q を受ける相対する2つの円弧辺が自由 (SS-FF)の境界条件を持つ扇形板の中央断面($\eta=1.0$, $\xi=0.5$)での変位と応力の精度比較が示してある。

ここで、スプライン次数, $k=1=3$ 、プリズム要素の分割数, $M_r=M_z=12$ 、級数の項数, $R=31$ 、板厚比, $B/h=100.0$ 、半径比, $R_o/R_i=1.70926$ 、中心角, $\phi=30^\circ$ である。なお、 D は板の曲げ剛性 ($D=Eh^3/12(1-\nu^2)$) である。また、比較のために芳村¹¹⁾の厳密解、林ら¹²⁾の節点帯板法と岡村ら¹³⁾による解も示してある。これより、本手法で求めた値が、他の方法による結果とよく一致している。

表-3 等分布荷重を表面に受ける扇形板の精度比較; $k=1=3$, $M_r=M_z=12$, $R=31$, $R_o/R_i=1.7092906$, $B/h=100.0$, $\phi=30^\circ$, $\xi=0.5$, $\eta=1.0$, $\nu=0.0$

ξ	V	σ_r	σ_θ
0.0	芳村 ¹¹⁾	0.7470	-22.29
	林ら ¹²⁾	0.7478	0.0
	岡村ら ¹³⁾	0.7467	0.0
0.25	芳村	1.075	-692.7
	林ら	1.075	-770.9
	岡村ら ¹³⁾	1.072	-869.4
0.5	芳村	1.474	-396.1
	林ら	1.473	-405.6
	岡村ら ¹³⁾	1.472	-403.5
0.75	芳村	1.914	-52.06
	林ら	1.912	-39.24
	岡村ら ¹³⁾	1.911	-97.80
1.0	芳村	2.352	-3.2
	林ら	2.343	0.0
	岡村ら ¹³⁾	2.348	0.0
multipliers	$qB^2/D_o h$	q	q

(2) 板厚方向の応力分布特性

図-1に示すような扇形厚板の厚さ方向の応力分布性状に与える板厚比、半径比や中心角の影響について検討する。なお、局所応力の解析精度を高めるために、 $k=1=3$, $M_r=M_z=12$, $R=31$ を用いる。また、ポアソン比, ν は0.17にとっている。

図-2には、等分布表面荷重を受ける2つの円弧辺が自由な扇形厚板($R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$)の中央断面($\xi=0.5$, $\eta=0.5$)での厚さ方向の応力分布(σ_z , σ_θ)に与える板厚比, B/h の影響が示されている。ここで、板厚比は5.0, 1.6, 1.0と変化させている。これより、 σ_θ に与える板厚比の

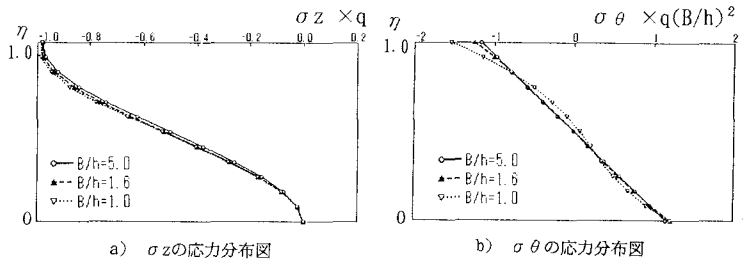


図-2 応力分布に与える板厚比, B/h の影響; SS-FF, $\xi=0.5$, $\zeta=0.5$, $\eta=1.0$, $R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.17$

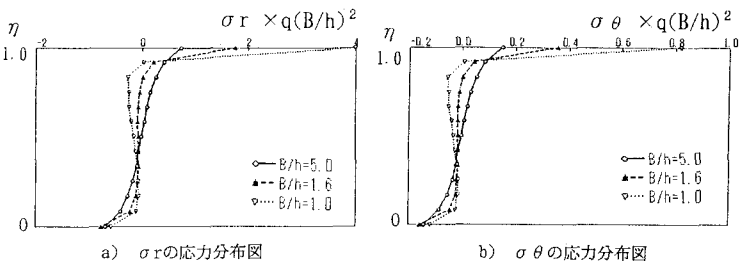


図-3 応力分布に与える板厚比, B/h の影響; SS-CC, $\xi=0.0$, $\zeta=0.5$, $\eta=1.0$, $R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.17$

影響はさほど大きくみられず線形な応力分布を示している。また、厚さ方向の垂直応力, σ_z の応力分布図より、板の上下面での応力の境界条件が正確に満たされている。さらに、同じ条件 ($R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$) を持つ、2つの円弧辺が固定された扇形板の中央断面 ($\xi=0.5$) での σ_r , σ_θ の応力分布が図-3から図-5に示してある。中央断面での応力分布性状は、板厚比がかなり増大した場合に非線形な分布性状をあらわし、荷重表面載荷の影響により非対称な応力分布性状を示している。しかし、固定された両円弧辺では、板厚比にかかわらず、板厚比が大きい場合でもかなり非線形な分布性状を示している。また、表面載荷付近の応力分布に非常に大きな引張りの応力集中が生じている。さらに、内縁 ($\xi=0$) では、外縁 ($\xi=1.0$) よりも大きな応力値を示している。

図-6には、2つの円弧辺が自由な場合に、表面分布荷重を満載した扇形厚板 ($B/h=2.5$, $\phi=45^\circ$) の中央断面 ($\xi=0.5$, $\zeta=0.5$) での応力分布に与える半径比の影響が示してある。ここで、半径比は1.25, 1.5, 2.0と変化させている。この図より、応力分布は線形分布を示し、半径比が増大するにつれて応力値はしだいに減少する。また、2つの円弧辺が固定された扇形板の中央断面 ($\xi=0.5$) での応力分布, σ_r に与える半径比の影響が図-7に示してある。これより、両固定端での応力分布は、半径比に関わらず非線形な応力分布

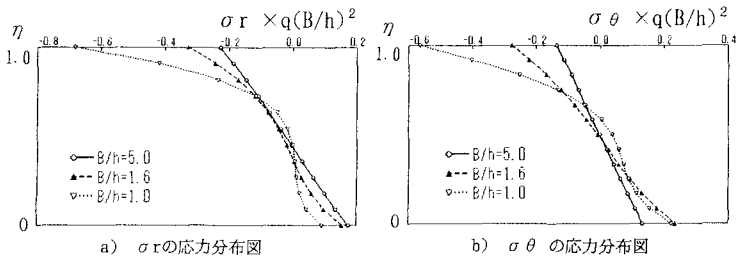


図-4 応力分布に与える板厚比, B/h の影響 ; SS-CC, $\xi=0.5$, $\zeta=0.5$, $\eta_o=1.0$, $R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.17$

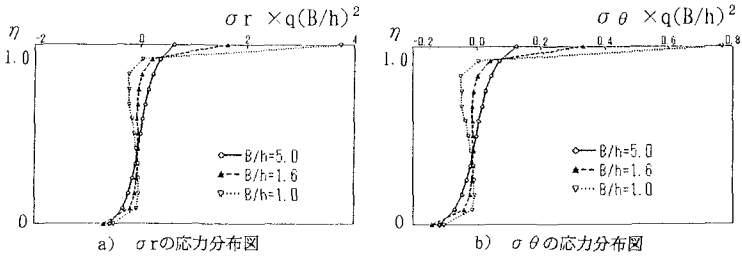


図-5 応力分布に与える板厚比, B/h の影響 ; SS-CC, $\xi=1.0$, $\zeta=0.5$, $\eta_o=1.0$, $R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.17$

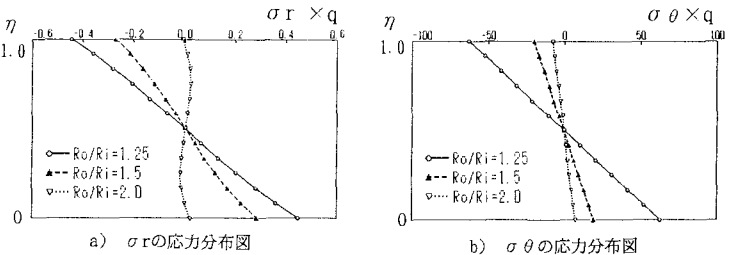


図-6 応力分布に与える半径比, R_o/R_i の影響 ; SS-FF, $\xi=0.5$, $\zeta=0.5$, $\eta_o=1.0$, $B/h=2.5$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.17$

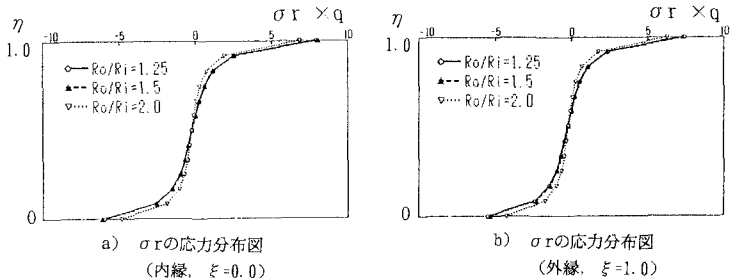


図-7 応力分布に与える半径比, R_o/R_i の影響 ; SS-CC, $\xi=0.5$, $\eta_o=1.0$, $B/h=2.5$, $\phi=45^\circ$, $\nu=0.17$

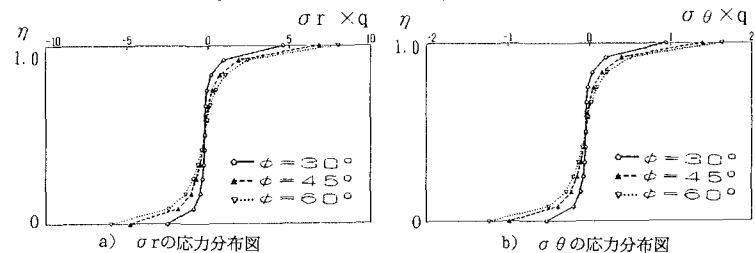


図-8 応力分布に与える中心角, ϕ の影響 ; SS-CC, $\xi=0.0$, $\zeta=0.5$, $\eta_o=1.0$, $R_o/R_i=2.0$, $B/h=2.5$, $\nu=0.17$

になり、内縁の応力値が外縁よりも大きな値を示している。

次に、図-8と図-9には、表面荷重を受ける2つの円弧辺が固定された扇形厚板($B/h=2.5$, $Ro/Ri=2.0$)の中央点($\xi=0.5$, $\eta=0.5$)と固定端($\xi=0.5$, $\eta=0$)での σ_r , σ_θ の応力分布に与える中心角の影響が示されている。

ここで、中心角を 30° , 45° , 60° と変化させている。これより、厚さ方向の応力分布は、中心角の影響を大きく受けており、中心角の増大とともに σ_r の値はかなり大きな値を示している。また、2つの円弧辺が自由の扇形板の応力分布、 σ_θ に与える中心角の影響も図-10に示してある。これより、中心角が増大するに従い応力値が増大するが、その分布形状が線形になっている。

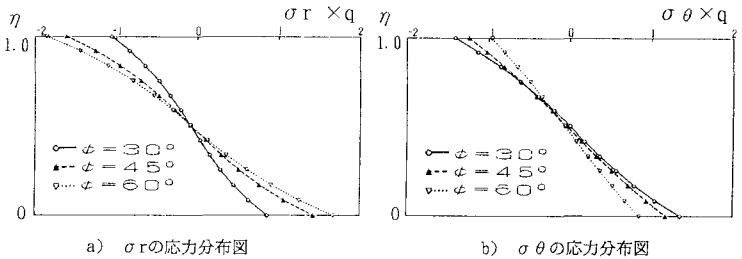


図-9 応力分布に与える中心角, ϕ の影響; SS-CC, $\xi=0.5$, $\xi=0.5$, $\eta=1.0$, $Ro/Ri=2.0$, $B/h=2.5$, $\nu=0.17$

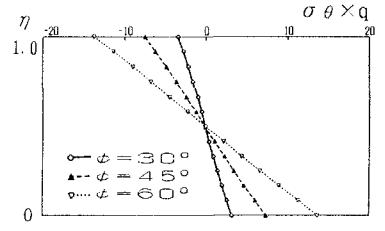


図-10 応力分布に与える半径比, Ro/Ri の影響; SS-FF, $\xi=0.5$, $\xi=0.5$, $\eta=1.0$, $Ro/Ri=2.0$, $B/h=2.5$, $\nu=0.17$

3.2 扇形厚板の振動解析

(1) 本手法の収束性と精度の検討

ここでは、扇形厚板の振動解析への適用性を示すために、半径方向の支持辺で単純支持され、円弧辺の2辺が任意の境界条件をもつ扇形板の振動解析を行い、解の収束性や精度に与えるスプライン次数とプリズム要素の分割数の影響について検討する。また、扇形厚板の振動特性に与える板厚比, B/h 、ポアソン比, ν 、中心角, ϕ などの影響について示す。ただし、計算結果は振動数パラメータ, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ を用いて表している。ここで、 $D=Eh^3/12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性である。

表-4には、2つの円弧辺が自由な境界条件(SS-FF)を持つ扇形板($B/h=10.0$, $Ro/Ri=2.0$, $\phi=45^\circ$)の振動数パラメータ, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与えるスプライン次数, $k-1$ とプリズム要素の分割数, $Mr=Mz$ の影響が示してある。ここで、スプライン次数は2次と3次を用い、プリズムの分割数は2から12まで変化させている。比較のために、Kimら¹⁵⁾により求められた薄板理論による解やMindlin板理論の値¹⁴⁾も示してある。これより、プリズム要素の分割数を増大させると、高次の振動数まで一定値への様な収束状態が得られている。また、スプライン次数を高めると少ない分割数でも安定した収束値が得られ、また、Mindlin板理論による解とよく一致した結果が示されている。薄板理論による解は、かなり大きな値となっている。

本手法の精度を確認するために、円弧辺の2辺がそれぞれ自由と固定された扇形板($Ro/Ri=2.0$, $\phi=60^\circ$)の精度比較が表-5に示されている。ここで、板厚比は10.0と2.5を仮定している。比較のために、Mindlin板理論に基づく有限帯板法⁸⁾とスプライン帯板法(SSM)⁴⁾や有限

表-4 振動数パラメータ, $n^*=\omega B^2\sqrt{\rho h/D}$ の収束性に与えるスプライン要素の分割数の影響; $Ro/Ri=2.0$, $B/h=10.0$, $\phi=45^\circ$

k-1	Mr=Mz	Mode				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
2	2	5.209	16.48	19.70	37.43	38.02
	4	5.198	16.15	19.62	34.77	37.12
	6	5.191	16.06	19.58	34.06	37.09
	8	5.188	16.04	19.56	33.89	37.08
	10	5.186	16.02	19.55	33.83	37.08
	12	5.185	16.02	19.54	33.80	37.08
3	2	(1.1)	(1.2)	(2.1)	(1.3)	(1.4)
	4	5.202	16.17	19.64	34.87	37.13
	6	5.190	16.05	19.57	33.99	37.08
	8	5.186	16.02	19.55	33.82	37.08
	10	5.185	16.02	19.54	33.79	37.08
	12	5.184	16.01	19.54	33.78	37.08
Mizusawa et.al. ¹⁴⁾		5.182	15.99	19.51	33.698	*
Kim et.al. ¹⁵⁾		5.267	16.68	20.40	36.603	*

ここで、(i, m)はそれぞれr方向, ϕ 方向のモードの次数を表す。

プリズム法(FPM)⁸⁾により求められた結果も示してある。これより、本手法で得られた解が他の方法と比較して、低次の振動数から高次の振動数までよく一致した結果が得られている。

(2) 扇形板の振動特性

表-6には、2つの相対する円弧辺がそれぞれ自由と固定をもつ扇形厚板の振動数パラメータ、 $n^* = \omega B^2 \sqrt{\rho h/D}$ に与える板厚比の影響が示されている。ここで

、 $Ro/Ri=2.0$ 、 $\phi=45^\circ$ および $\nu=0.3$ と仮定し、また板厚比を10.0から1.0まで変化させている。比較のためにMindlin板理論に基づくスプライン帯板法(SSM)による結果¹⁴⁾も示してある。これより、板厚比が減少するに従い振動数パラメータが減少するが、その影響は固定辺を持つ場合に大きく見られる。また、Mindlin板理論による結果と比較して、板厚比が小さくなるほど両者の差が大きくみられる。ただし、表中の*は、Mindlin板理論では表せない板の厚さ方向の断面変形モードが生じてくる。

表-7には、2つの円弧辺が自由な場合と、固定された場合の扇形厚板($Ro/Ri=2.0$ 、 $B/h=2.5$)の振動数パラメータに与える中心角の影響が示してある。ここで、中心角は、 30° 、 45° 、 60° と変化させている。これより、中心角の増大とともに、振動数パラメータが減少してくるが、その影響は2つの相対する円弧辺が自由の場合に顕著に表れる。相対する2つの円弧辺がそれぞれ自由な場合と固定されている場合の扇形厚板(B/h

表-5 振動数パラメータ、 n^* の精度比較; $k=3$ 、 $Mr=Mz=12$ 、 $Ro/Ri=2.0$ 、 $\phi=60^\circ$ 、 $\nu=0.3$ 、

Boundary Condition	B/h	Method	1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
SS-CC	10.0	Present	23.08	31.27	46.58	56.17	64.38
		FPM ⁸⁾	23.27	31.54	47.02	57.00	65.33
		FSM ⁸⁾	22.91	31.08	46.30	55.68	63.81
		SSM ¹⁴⁾	22.87	31.05	46.26	55.52	63.68
	2.5	Present	13.62	18.46	26.60	27.70	30.79
		FPM	14.15	19.11	26.85	27.66	31.97
		FSM	13.34	18.10	25.36	25.87	29.96
		SSM	13.28	18.04	25.76	25.28	29.86
SS-FF	10.0	Present	2.824	11.42	11.44	24.23	27.31
		FPM	2.931	11.73	11.88	24.03	25.06
		FSM	2.823	11.40	11.43	24.19	27.24
		SSM	2.823	11.41	11.43	24.18	27.25
	2.5	Present	2.591	8.747	9.089	16.62	18.13
		FPM	2.611	5.757	8.947	9.261	14.71
		FSM	2.587	8.699	9.046	16.49	17.91
		SSM	2.585	8.687	9.030	16.45	17.87

表-6 振動数パラメータ、 n^* に与える板厚比の影響について; $Ro/Ri=2.0$ 、 $\phi=45^\circ$ 、 $\nu=0.3$

Boundary Condition	B/h	1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
SS-FF	10.0	5.1841	16.012	19.537	33.773	37.079
		SSM	5.1820	15.992	19.511	33.698 *
	5.0	5.0212	14.707	17.801	18.539	29.109
		SSM	5.0149	14.652	17.729	* 28.940
	2.5	4.5511	9.2692	11.754	14.052	18.581
		SSM	4.5341	*	11.645	13.925 *
	1.6	4.0300	6.1813	9.3149	11.183	12.362
		SSM	3.9411	*	8.9332	10.760 *
	1.0	3.1328	3.7155	5.9658	7.3146	7.6788
		SSM	3.1037	*	5.8817	* 7.5931
	10.0	5.1841	16.012	19.537	33.773	37.079
		SSM	5.1820	15.992	19.511	33.698 *
SS-CC	5.0	21.111	33.759	44.249	50.910	52.647
		SSM	20.801	33.311	43.360	* 51.819
	2.5	14.808	23.272	25.451	27.705	29.107
		SSM	14.449	22.723	*	26.839 *
	1.6	10.772	16.227	16.761	18.547	19.092
		SSM	10.434	16.242	*	18.348 *
	1.0	7.3393	9.8848	11.252	11.299	11.809
		SSM	7.0476	*	10.826	* 11.609

SSMは、Mindlin板理論に基づくスプライン帯板法¹⁴⁾である。

表-7 振動数パラメータ、 n^* に与える中心角の影響; $B/h=2.5$ 、 $Ro/Ri=2.0$ 、 $\nu=0.3$

Boundary Condition	ϕ	1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
SS-FF	30°	9.0891	15.978	18.126	24.479	25.231
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)
	45°	4.5511	9.2692	11.754	14.052	18.581
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)
	60°	2.5913	5.7542	8.7472	9.0891	14.714
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)
SS-CC	30°	18.461	29.814	30.788	34.168	35.434
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)
	45°	14.808	23.272	25.451	27.705	29.107
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)
	60°	13.623	18.461	22.449	25.908	26.602
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(3,1)	(1,3)

ここで、(ℓ, m)はそれぞれ r 方向、 ϕ 方向のモードの次数を表す。

表-8 振動数パラメータ、 n^* に与える半径比の影響; $B/h=2.5$ 、 $\phi=45^\circ$ 、 $\nu=0.3$

Boundary Condition	Ro/Ri	1st	2nd	Mode 3rd	4th	5th
SS-FF	1.25	0.6642	1.5455	2.6859	3.1180	5.3183
		(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)
	1.5	1.9851	4.2663	6.0653	7.1797	12.327
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(2,2)
	2.0	4.5511	9.2692	11.754	14.052	18.581
		(1,1)	(1,2)	(1,3)	(2,1)	(1,4)
SS-CC	1.25	12.684	13.371	14.791	17.015	17.710
		(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(1,2)
	1.5	13.167	16.047	20.726	21.240	26.073
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(3,1)	(1,3)
	2.0	14.808	23.272	25.451	27.705	29.107
		(1,1)	(2,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)

ここで、(ℓ, m)はそれぞれ r 方向、 ϕ 方向のモードの次数を表す。

=2.5, $\phi=45^\circ$)の振動数パラメータに与える半径比の影響が表-8に示されている。ここで、 R_o/R_i は1.25, 1.5, 2.0にとっている。これより、半径比を大きくとれば振動数パラメータが増大してくるが、その高次の振動モード形状に大きな変化がみられる。

最後に、表-9には、2つの相対する円弧辺が自由な扇形板($R_o/R_i=2.0$, $\phi=45^\circ$)の振動数パラメータ, n^* に与えるポアソン比の影響が示してある。ここで、板厚比は5.0, 2.5, 1.6にとり、ポアソン比を0.0, 0.15, 0.3に変化させている。これより、板厚比に関係なく、振動数パラメータに与えるポアソン比の影響が顕著にみられ、また、ポアソン比の増大とともに振動数パラメータは減少してくる。

表-9 振動数パラメータ, n^* に与えるポアソン比の影響;
 $\phi=45^\circ$, $R_o/R_i=2.0$

B/h	ν	Mode				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
5.0	0.0	5.4846	15.682	19.550	20.630	31.454
	0.15	5.3028	15.271	18.826	19.787	30.383
	0.3	5.0212	14.707	17.801	18.539	29.109
2.5	0.0	5.0361	10.315	12.843	15.845	20.712
	0.15	4.8380	9.8935	12.378	15.072	19.937
	0.3	4.5511	9.2692	11.754	14.052	18.581
1.6	0.0	4.5111	6.8765	10.381	12.834	13.808
	0.15	4.3103	6.5962	9.9202	12.104	13.282
	0.3	4.0300	6.1813	9.3149	11.183	12.362

4. あとがき

本研究では、表面載荷を受ける半径方向の2つの支持辺で単純支持された扇形厚板の3次元応力解析と振動解析へのSpline Prism法の適用性について検討し、厚板方向の応力分布や変位分布特性および振動数パラメータに与える板厚比、半径比や中心角などの影響を明らかにした。本文で得られた主な結果をまとめると、以下ようになる。

(1) 3次元応力解析

- 1) Spline Prism法を用いた解析では、半径方向の相対する2辺に境界条件の制約を受けるが、従来の有限ブリズム法などと比較して、未知数をかなり低減できる。
- 2) ブリズムの要素数を増加すれば、一定値への安定した収束状態が示された。また、スプライン次数を高めれば少ない分割数でも、他の方法による結果とよく一致した結果が得られた。
- 3) 等分布荷重を受ける扇形板の応力値は、境界条件や幾何学的条件にかかわらず、外縁よりも内縁で大きな値を示す。
- 4) 板厚比が減少すると、板厚方向の応力分布形状は非線形になり、また表面等分布荷重の影響により非対称な応力分布を示す。
- 5) 固定辺の応力分布は、板厚比、半径比や中心角に関わらず、板厚比が大きい場合でも非線形分布になる。

(2) 振動解析

- 1) 高次のSpline Prismモデルを用いれば、少ないブリズム要素数でも高次の振動数まで安定した収束性が示され、また精度の高い解析結果が得られた。
- 2) 板厚比が減少するに従い振動数パラメータは減少するが、その影響は固定辺を持つ場合に大きくみられる。また、Mindlin板理論による解と比較して板厚比が小さくなるほど差が大きくなり、Mindlin板理論では表せない板の厚さ方向の断面変形モードが生じてくる。
- 3) 中心角が増大するとともに振動数パラメータが減少し、その影響は2つの相対する円弧辺が自由の場合に大きく表れる。
- 4) 半径比が大きくなるに従い振動数パラメータも増加し、高次の振動モード形状に大きな影響が表れる。
- 5) 振動数パラメータに与えるポアソン比の影響は板厚比に関係なく顕著にみられ、またポアソン比の増大とともに振動数パラメータは減少してくる。

最後に、本研究は大同工業大学研究奨励金及び平成5年度科学研究費(一般研究(C))の援助を受けて行ったもので、ここに関係各位に謝意を表します。数値計算には、大同工業大学と名古屋大学大型計算機センターを利用させて頂きました。また、貴重なご意見を頂いた査読者に謝意を表します。

APPENDIX

式(18)で与えられるサブ剛性マトリックスは、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}
 [K_{uu}] &= (h\phi D_0) \{ I_{mi}^{111} J_{nj}^{00} A_1 + D_1 I_{mi}^{010} J_{nj}^{00} A_1 + D_1 I_{mi}^{100} J_{nj}^{00} A_1 \\
 &\quad + I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_1 + D_2 (B/h)^2 I_{mi}^{001} J_{nj}^{11} A_1 + D_2 (1/\phi)^2 I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_2 \} \\
 [K_{uv}] &= (h\phi D_0) \{ D_1 (B/h) I_{mi}^{101} J_{nj}^{01} A_1 + D_1 (B/h) I_{mi}^{000} J_{nj}^{01} A_1 \\
 &\quad + D_2 (B/h) I_{mi}^{011} J_{nj}^{10} A_1 \} \\
 [K_{uw}] &= (h\phi D_0) \{ D_1 (1/\phi) I_{mi}^{100} J_{nj}^{00} A_3 + (1/\phi) I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_3 \\
 &\quad + D_2 (1/\phi) I_{mi}^{010} J_{nj}^{00} A_4 + D_2 (1/\phi) I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_4 \} \\
 [K_{vu}] &= (h\phi D_0) \{ D_1 (B/h) I_{mi}^{011} J_{nj}^{10} A_1 + D_1 (B/h) I_{mi}^{000} J_{nj}^{10} A_1 \\
 &\quad + D_2 (B/h) I_{mi}^{101} J_{nj}^{01} A_1 \} \\
 [K_{vv}] &= (h\phi D_0) \{ (B/h)^2 I_{mi}^{001} J_{nj}^{11} A_1 + D_2 I_{mi}^{111} J_{nj}^{00} A_1 \\
 &\quad + D_2 (1/\phi)^2 I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_2 \} \\
 [K_{vw}] &= (h\phi D_0) \{ D_1 (B/h) (1/\phi) I_{mi}^{000} J_{nj}^{10} A_3 + D_2 (1/\phi) (B/h) I_{mi}^{000} J_{nj}^{01} A_3 \} \\
 [K_{wu}] &= (h\phi D_0) \{ D_1 (1/\phi) I_{mi}^{010} J_{nj}^{00} A_4 + (1/\phi) I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_4 \\
 &\quad + D_2 (1/\phi) I_{mi}^{100} J_{nj}^{00} A_5 + D_2 (1/\phi) I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_5 \} \\
 [K_{wv}] &= (h\phi D_0) \{ D_1 (B/h) (1/\phi) I_{mi}^{000} J_{nj}^{01} A_5 + D_2 (B/h) (1/\phi) I_{mi}^{000} J_{nj}^{10} A_5 \} \\
 [K_{ww}] &= (h\phi D_0) \{ (1/\phi)^2 I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_7 + D_2 (I_{mi}^{111} J_{nj}^{00} A_8 \\
 &\quad + I_{mi}^{100} J_{nj}^{00} A_8 + I_{mi}^{010} J_{nj}^{00} A_8 \\
 &\quad + I_{mi}^{00-1} J_{nj}^{00} A_8 + (B/h)^2 I_{mi}^{001} J_{nj}^{11} A_8) \}
 \end{aligned}$$

また、サブ質量マトリックスは、次式で表される。

$$\begin{aligned}
 [M_{uu}] &= (\rho B^2 h \phi) \{ I_{mi}^{000} J_{nj}^{00} A_1 \}, \quad [M_{vv}] = (\rho B^2 h \phi) \{ I_{mi}^{000} J_{nj}^{00} A_1 \} \\
 [M_{ww}] &= (\rho B^2 h \phi) \{ I_{mi}^{000} J_{nj}^{00} A_8 \}.
 \end{aligned}$$

ただし、 I_{mi}^{tuc} と J_{nj}^{tu} は、次式で示される。

$$\begin{aligned}
 I_{mi}^{tuc} &= \int_0^1 N_{m,k}^{(t)}(\xi) N_{n,k}^{(u)}(\xi) \{ \xi + 1/(\delta - 1) \}^{(c)} d\xi d\xi \\
 J_{nj}^{tu} &= \int_0^1 N_{n,k}^{(t)}(\eta) N_{n,k}^{(u)}(\eta) d\xi d\xi
 \end{aligned}$$

ここで、 t, u は、それぞれ導関数の次数である。また、 C は乗数である。

A_i は、次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \int_0^1 Z_t(\xi) Z_p(\xi) d\xi, \quad A_2 = \int_0^1 \dot{Z}_t(\xi) \dot{Z}_p(\xi) d\xi \\
 A_3 &= \int_0^1 Z_t(\xi) \dot{\overline{Z}}_p(\xi) d\xi, \quad A_4 = \int_0^1 \dot{Z}_t(\xi) \overline{Z}_p(\xi) d\xi \\
 A_5 &= \int_0^1 \overline{Z}_t(\xi) \dot{Z}_p(\xi) d\xi, \quad A_6 = \int_0^1 \dot{\overline{Z}}_t(\xi) Z_p(\xi) d\xi \\
 A_7 &= \int_0^1 \dot{\overline{Z}}_t(\xi) \dot{\overline{Z}}_p(\xi) d\xi, \quad A_8 = \int_0^1 \overline{Z}_t(\xi) \overline{Z}_p(\xi) d\xi
 \end{aligned}$$

ただし、 $\dot{\cdot}$ は導関数である。

参考文献

- 1) Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M.: A high-order theory of plate deformation - Part I - Homogeneous plates. J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663-668, 1977.
- 2) Srinivas, S, Joga Rao, C.V. and Rao, A.K. : An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. J. Sound Vib., Vol. 12, pp. 187-199, 1970.
- 3) 島田 功、岡村宏一 : 厚い長方形スラブの応力と変形. 土木学会論文報告集, No. 233, pp.13-23, 1975.
- 4) McGee, O.G. and Leissa, A.W. : Three-dimensional free vibrations of thick skewed cantilevered plates. J. Sound Vib., Vol. 144, pp. 305-322, 1991.
- 5) 林 正, 小林享市 : 節点プリズム法による3次元応力解析. 土木学会論文集, No. 450/I-20, pp. 95-101, 1992.
- 6) Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M.: The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. Proc. Inst. Civil Engrs, Vol. 53, pp. 147-172, 1972.
- 7) Cheung, M.S. and Cheung, Y.K.: Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method. Comput. Struct., Vol. 14, pp. 79-88, 1981.
- 8) Mizusawa, T.: Vibration of thick annular sector plates using semi-analytical methods. J. Sound Vib., Vol. 150, pp. 245-259, 1991.
- 9) 水澤富作、高木信治 : Spline Prism法を用いた長方形厚板の振動解析について. 構造工学論文集, Vol.39A, pp. 1-12, 1993
- 10) Zienkiewicz, O.C.: The finite element method. McGraw-Hill, 1977.
- 11) 芳村 仁 : 曲線直交異方性扇形平板の曲げについて. 土木学会論文集, No. 82, pp. 1-8, 1962.
- 12) 林 正、坂田敦、西谷雅弘 : サブパラメトリック帯板要素による薄板の曲げ解析. 土木学会論文集, No. 398/I-10, pp. 217-225, 1988.
- 13) 岡村宏一、石川一美 : 多径間曲線平板構造の一解法. 土木学会論文集, No. 374/I-6, pp. 379-388, 1986.
- 14) Mizusawa, T., Kito, H. and Kajita, T. : Vibration of annular sector Mindlin plates by the spline strip method. Compt. and Struct. (to appeared).
- 15) C.S.Kim and S.M.Dickinson, On the free transverse vibration of annular and circular, thin, sectorial plates subjected to certain complicating effects. J.Sound Vib., Vol.134, pp. 407-421, 1989.
- 16) Kobayashi, H., Ishikawa, K. and Furuichi, K. : A Survey of literature on bending, buckling and dynamics of sectorial plates. Mem. Fac. Eng., Osaka City Univ. Vol 33, pp. 115-136, 1992.
- 17) 水澤富作, 梶田建夫: 離散化帯板要素と構造解析への適用に関する考察. 大同工業大学紀要, Vol. 25, pp. 67-83, 1991.
- 18) 奥村勇、本田祐也、芳村仁 : 一厚板理論による扇形平板の解析について. 土木学会論文集, No. 326, pp. 217-225, 1982.
- 19) Okumura, A.O, Miyake, K. : On stresses displacements in a thick circular ring sector plate based on the three-dimensional theory of elasticity. Theoretical and Applied Mech., Vol. 29, pp. 127-138, 1981.

(1993年 9月16日受付)