

二層円筒殻の弾性衝撃応答解析

IMPACT RESPONSE ANALYSIS OF TWO-LAYERED
CYLINDRICAL SHELLS

三上 隆* 佐伯 昇** 芳村 仁***

By Takashi MIKAMI, Noboru SAEKI and Jin YOSHIMURA

A modal analysis is used to predict the impact response of a simply supported elastic circular cylindrical shell composed of two bonded isotropic layers. The governing equations for a two-layered cylindrical shell are derived on the basis of an improved theory for the single-layer shell which includes the effects of transverse shear deformation and rotary inertia. Calculations are made for the specific case of the steel-concrete cylindrical shell subjected to a suddenly applied load. The solutions show that the method yields very good results. Therefore, the proposed method is useful not only for a better understanding of the response characteristics of the shell but also available for a check on other numerical methods such as FEM.

1. はじめに

衝撃荷重を受ける円筒殻の挙動の解明は、古くから研究課題に取上げられている。しかし、それらのほとんどは単一材料から成る構造であり、厳しい環境条件下において有効と思われる異種材料の組合せによって構成される複合あるいは合成構造に対しては極めて少ないのが現状である。最近では、異方性弾性の考え方を連続繊維複合材料の場合に拡張、発展させた多層積層殻¹⁾の解析も行れつつあるが、これらの基礎となる等方性材料からなる二層円筒殻に限定すれば、Weingarten²⁾や Markus³⁾の固有振動問題の解析、Bushnell⁴⁾の動的応答解析等があるが、いずれも応力波の伝播特性を適切に表現しえない古典殻理論に基づく場合である。

本研究では、厚さ方向の応力波伝播特性を正確に表すことは出来ないが、殻厚が比較的厚い場合から薄い場合に対しては軸方向の応力波伝播特性をほぼ忠実に表し得る修正殻理論⁵⁾を二層円筒殻へ適用して新たな運動方程式を導き、衝撃荷重を受ける二層円筒殻の動的挙動を固有関数展開法^{6,7)}により解析する手法を述べたものである。なお運動方程式は、各層の材質が等方で曲げと伸びのカップリング剛性が零の場合についてのみ成立するが、数値例が示すように、応答の基本的特性の理解や有限要素法等の数値解法の精度の確認に有効に利用できるものと思われる。

2. 運動方程式

運動方程式の誘導に当たっては、[1] 各層は完全に接着され、接着面では相対的なすべりが無い、および [2] 各層の材質は等方でポアソン比が等しいと仮定する。

円筒殻の半径を a 、長さを L で表し、経線方向座標を x 、円周方向座標を $y(=a\theta)$ 、法線方向座標を z (外向きを正)

* 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

** 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

*** 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

で表す。座標 (x, y, z) に対応する変位成分を (u, v, w) , および (x, y) 軸に垂直な断面の回転角成分を (β_x, β_y) とする。合応力および合モーメント成分を $(N_x, N_y, N_{xy}, N_{yx}, Q_x, Q_y)$ および $(M_x, M_y, M_{xy}, M_{yx})$ で表示する。時間を t , ポアソン比を ν とし, 各層の弾性係数 E , 厚さ h および単位体積当たりの質量 ρ をそれぞれ, $(E_1, E_2), (h_1, h_2)$ および (ρ_1, ρ_2) と表す。ただし添字 1 は内側の層, 添字 2 は外側の層の諸量を表すものとする (図-1 参照)。

上述の仮定 [1], [2] によれば, 曲げと伸びのカップリング剛性が零になるように新たな参照面を定めることができ, その位置 d (図-1 に示すように二層の境界面からの距離) は次式で与えられる。

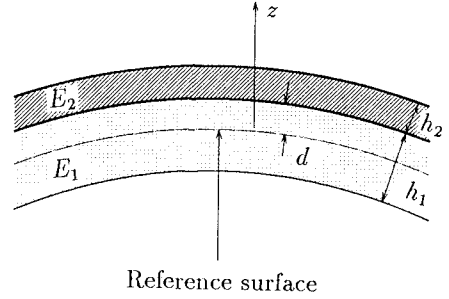


図-1 二層円筒殻

$$d = (E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2) / \{2(E_1 h_1 + E_2 h_2)\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

新たな参照面に対して, Mirsky-Herrmann⁴⁾ の単層の修正円筒殻理論のひずみ-変位関係式を採用すれば二層円筒殻の合応力および合モーメント成分は次のように得られる。

$$\begin{aligned} N_x &= K u_{,x} + \nu K (v_{,y} + w/a) + D \beta_{x,x}/a, & N_y &= \nu K u_{,x} + (K + D/a^2) (v_{,y} + w/a) - D \beta_{y,y}/a \\ N_{xy} &= (1 - \nu) (K v_{,x} + D \beta_{y,x}/a + K u_{,y})/2, & N_{yx} &= (1 - \nu) \{K v_{,x} + (K + D/a^2) u_{,y} - D \beta_{x,y}/a\}/2 \\ Q_x &= \kappa (1 - \nu) K (w_{,x} + \beta_x), & Q_y &= \kappa (1 - \nu) (K + D/a^2) (w_{,y} - v/a + \beta_y) \\ M_x &= D (\beta_{x,x} + \nu \beta_{y,y} + u_{,x}/a), & M_y &= D (\nu \beta_{x,x} + \beta_{y,y} - v_{,y}/a - w/a^2) \\ M_{xy} &= (1 - \nu) D (v_{,x}/a + \beta_{y,x} + \beta_{x,y})/2, & M_{yx} &= (1 - \nu) D (\beta_{y,x} + \beta_{x,y} - u_{,y}/a)/2 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで, コンマ (,) に続く添字は偏微分を表し, κ はせん断補正係数である。 K と D はそれぞれ次のように表される等価伸び剛性および等価曲げ剛性である。

$$\left. \begin{aligned} K &= (E_1 h_1 + E_2 h_2) / (1 - \nu^2) \\ D &= [E_1 h_1^3 + E_2 h_2^3 - 3(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2 / \{4(E_1 h_1 + E_2 h_2)\}] / \{3(1 - \nu^2)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (3)$$

さて, 等価厚さを h_o , 等価弾性係数を E_o と記し, 式 (3) を次式

$$K = E_o h_o / (1 - \nu^2), \quad D = E_o h_o^3 / \{12(1 - \nu^2)\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

で表せば, 式 (2) は以下に示される等価厚さ h_o および等価弾性係数 E_o 。

$$h_o = (12D/K)^{1/2}, \quad E_o = (1 - \nu^2) (K^3/12D)^{1/2} \quad \dots\dots\dots (5)$$

を有する単層円筒殻の合応力および合モーメントの表示式と等価になる。ただし, 新たな参照面に関する合応力および合モーメントであることに留意されたい。

二層円筒殻の運動方程式は, ひずみエネルギーと運動エネルギーを用いて, Hamilton の原理より次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{y,y} &= (M_1 + M_2/a) u_{,tt} + (M_2 + M_3/a) \beta_{x,tt} \\ N_{y,y} + N_{x,x} + Q_y/a &= (M_1 + M_2/a) v_{,tt} + (M_2 + M_3/a) \beta_{y,tt} \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - N_y/a &= (M_1 + M_2/a) w_{,tt} + p_z \\ M_{x,x} + M_{y,y} - Q_x &= (M_2 + M_3/a) u_{,tt} + M_3 \beta_{x,tt} \\ M_{y,y} + M_{x,x} - Q_y &= (M_2 + M_3/a) v_{,tt} + M_3 \beta_{y,tt} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 p_z は法線方向の作用荷重であり、 M_1 、 M_2 および M_3 はそれぞれ並進慣性、並進一回転慣性および回転慣性を表し次式となる。

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 \\ M_2 &= (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)d - (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)/2 \\ M_3 &= (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)d^2 - (\rho_1 h_1^2 - \rho_2 h_2^2)d + (\rho_1 h_1^3 + \rho_2 h_2^3)/3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

式 (2) を式 (6) に代入すれば、運動方程式は変位成分で以下のように表示される。

$$\left. \begin{aligned} L_{11}(u) + L_{12}(v) + L_{13}(w) + L_{14}(\beta_x) + L_{15}(\beta_y) &= (a^2 M_1/K)(I_1 u_{,tt} + a I_2 \beta_{x,tt}) \\ L_{21}(u) + L_{22}(v) + L_{23}(w) + L_{24}(\beta_x) + L_{25}(\beta_y) &= (a^2 M_1/K)(I_1 v_{,tt} + a I_2 \beta_{y,tt}) \\ L_{31}(u) + L_{32}(v) + L_{33}(w) + L_{34}(\beta_x) + L_{35}(\beta_y) &= (a^2 M_1/K)I_1 w_{,tt} + (a^2/K)p_z \\ L_{41}(u) + L_{42}(v) + L_{43}(w) + L_{44}(\beta_x) + L_{45}(\beta_y) &= (a^2 M_1/K)(I_2 u_{,tt} + a I_3 \beta_{x,tt}) \\ L_{51}(u) + L_{52}(v) + L_{53}(w) + L_{54}(\beta_x) + L_{55}(\beta_y) &= (a^2 M_1/K)(I_2 v_{,tt} + a I_3 \beta_{y,tt}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここで微分演算子 $L_{11} \sim L_{55}$ は次のようなものである。例えば、

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= a^2 (\quad)_{,xx} + a^2 \gamma_1 (1+k) (\quad)_{,yy}, & L_{12} = L_{21} &= a^2 \gamma_2 (\quad)_{,xy} \\ L_{13} &= -L_{31} = \nu a (\quad)_{,x}, & L_{14} = L_{41} &= k a^3 \{ (\quad)_{,xx} - \gamma_1 (\quad)_{,yy} \} \\ L_{22} &= a^2 \gamma_1 (\quad)_{,xx} + a^2 (1+k) (\quad)_{,yy} - \gamma_1 \kappa (1+k) \\ L_{23} &= -L_{32} = a (1+k) (1 + \gamma_1 \kappa) (\quad)_{,\theta} \\ L_{25} = L_{52} &= a^3 \gamma_1 k (\quad)_{,xx} - a^3 k (\quad)_{,yy} + a \gamma_1 \kappa (1+k) \\ L_{33} &= a^2 \gamma_1 \kappa (\quad)_{,xx} + a^2 \gamma_1 \kappa (1+k) (\quad)_{,yy} - (1+k) \\ L_{34} = -L_{43} &= a^2 \gamma_1 \kappa (\quad)_{,x}, & L_{35} = -L_{53} &= a^2 \{ k + \gamma_1 \kappa (1+k) \} (\quad)_{,y} \\ L_{44} &= k a^4 (\quad)_{,xx} + a^4 \gamma_1 k (\quad)_{,yy} - a^2 \kappa \gamma_1 \\ L_{45} = L_{54} &= a^4 \gamma_2 k (\quad)_{,xy} \\ L_{55} &= a^4 \gamma_1 k (\quad)_{,xx} + a^4 k (\quad)_{,yy} - a^2 \gamma_1 \kappa (1+k) \\ L_{15} = L_{51} = L_{24} = L_{42} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

ここで、

$$\gamma_1=(1-\nu)/2, \gamma_2=(1+\nu)/2 \dots\dots\dots (10)$$

さらに

$$\left. \begin{aligned} k &= (D/K)/a^2, & I_1 &= 1 + d/a - (h_1/a)(\alpha_2/\alpha_1)/2 \\ I_3 &= (d/a)^2 - (d/a)(h_1/a)(\alpha_2/\alpha_1) + (h_1/a)^2(\alpha_3/\alpha_1)/3 \\ I_2 &= I_1 + I_3 - 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1 &= 1 + (\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1), & \alpha_2 &= 1 - (\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1)^2 \\ \alpha_3 &= 1 + (\rho_2/\rho_1)(h_2/h_1)^3 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

なお式 (8) は、厚さを $h_1 = h_2 = h/2$ 、弾性係数を $E_1 = E_2 = E$ および密度を $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ と置けば、Mirsky-Herrmann⁵⁾の単層の運動方程式のそれになる。

$x=0$ と $x = L$ における境界条件は $(u, N_x), (v, N_{xy}), (\beta_x, M_x), (w, Q_x)$ および (β_y, M_{xy}) の適当な組合せで規定され、本研究で取上げる両端単純支持に対しては次式となる。

$$w = v = \beta_y = N_x = M_x = 0 \dots\dots\dots (13)$$

3. 自由振動問題

式(13)の境界条件を満足する変位関数として次式を採用する。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_m \sum_n a U_{mn}^\circ \cos(\alpha x) \cos(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a U_{mn} T_{mn}(t) \\ v(x, y, t) &= \sum_m \sum_n a V_{mn}^\circ \sin(\alpha x) \sin(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a V_{mn} T_{mn}(t) \\ w(x, y, t) &= \sum_m \sum_n a W_{mn}^\circ \sin(\alpha x) \cos(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a W_{mn} T_{mn}(t) \\ \beta_x(x, y, t) &= \sum_m \sum_n a X_{mn}^\circ \cos(\alpha x) \cos(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a X_{mn} T_{mn}(t) \\ \beta_y(x, y, t) &= \sum_m \sum_n a Y_{mn}^\circ \sin(\alpha x) \sin(ny/a) T_{mn}(t) = \sum_m \sum_n a Y_{mn} T_{mn}(t) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

ここで $U_{mn}^\circ \sim Y_{mn}^\circ$ は固有振動モードの係数, $T_{mn}(t)$ は一般化座標, $\alpha = m\pi/L$ である。

さて式(8)で $p_z=0$, 式(14)で $T_{mn}(t) = \exp(i\omega t)$ [ω =固有円振動数]と表し, 式(14)を式(8)に代入すれば, 次の固有振動数方程式が得られる。

$$[K] - \Omega_{mn}^2 [M] \{\Delta\} = \{0\} \dots (15)$$

ただし, 固有振動モードの係数を成分とするベクトル Δ と無次元化固有振動数 Ω_{mn}^2 は次のようなものである。

$$\{\Delta\}^T = \{U_{mn}^\circ \ V_{mn}^\circ \ W_{mn}^\circ \ X_{mn}^\circ \ Y_{mn}^\circ\}, \quad \Omega_{mn}^2 = a^2 \omega^2 (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2) / K \dots (16)$$

マトリックス $[K]$ と $[M]$ の非零成分のみを示せば以下となる。

$$\left. \begin{aligned} K_{11} &= \lambda^2 + (1+k)n^2\gamma_1, & K_{12} &= k_{21} = -\lambda n\gamma_2 \\ K_{13} &= K_{31} = -\nu\lambda, & K_{14} &= K_{41} = k(\lambda^2 - n^2\gamma_1) \\ K_{22} &= \gamma_1\lambda^2 + (1+k)(n^2 + \kappa\gamma_1), & K_{23} &= K_{32} = (1+k)(1 + \kappa\gamma_1)n \\ K_{25} &= K_{52} = \gamma_1\kappa\lambda^2 - kn^2 - (1+k)\kappa\gamma_1, & K_{33} &= \gamma_1\kappa\lambda^2 + (1+k)(1 + \kappa\gamma_1n^2) \\ K_{34} &= K_{43} = \gamma_1\kappa\lambda, & K_{35} &= K_{53} = -\{k + (1+k)\kappa\gamma_1\}n, & K_{44} &= k\lambda^2 + (\kappa + kn^2)\gamma_1 \\ K_{45} &= K_{54} = -\lambda nk\gamma_2, & K_{55} &= \gamma_1k\lambda^2 + kn^2 + (1+k)\kappa\gamma_1 \\ M_{11} &= M_{22} = M_{33} = I_1, & M_{14} &= M_{25} = M_{41} = M_{52} = I_2, & M_{44} &= M_{55} = I_3 \end{aligned} \right\} \dots (17)$$

ここで

$$\lambda = m\pi a / L \dots (18)$$

4. 衝撃応答解析

自由振動問題の固有振動モードの直交性の性質より, ノルム J_{mn} は次のように得られる。

$$J_{mn} = \int_0^L \int_0^{2\pi a} \left[I_1(U_{mn}^2 + V_{mn}^2 + W_{mn}^2) + 2I_2(X_{mn}U_{mn} + Y_{mn}V_{mn}) + I_3(X_{mn}^2 + Y_{mn}^2) \right] dx dy \dots (19)$$

さて固有関数展開法(ノーマルモード法)^{6,7)}によれば, 一般化座標 $T_{mn}(t)$ に対する次の2階の微分方程式が得られる。

$$d^2 T_{mn}(t) / dt^2 + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = Q_{mn}(t) \dots (20)$$

ここで, $Q_{mn}(t)$ は一般化力と呼ばれるもので, ノルム J_{mn} および並進慣性 M_1 を用いて以下のように表される。

$$Q_{mn}(t) = \int \int p_z W_{mn} dx dy / (J_{mn} M_1) \dots (21)$$

変位と速度が零の初期条件に対する式 (20) の解は、

$$T_{mn}(t) = \frac{1}{\omega_{mn}} \int_0^t Q_{mn}(\eta) \sin \omega_{mn}(t - \eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (22)$$

と得られ、衝撃荷重下の二層円筒殻の変位、応力は式 (14)、式 (2) 等より求められる。

5. 数値計算例

数値計算モデルは、図-2 に示すように、 $L/2 - \varepsilon_2 < x < L/2 + \varepsilon_2$ 、 $-\varepsilon_1 < a\theta < \varepsilon_1$ の領域に一様な分布荷重 (荷重強度 p_0) が、時間に関してステップ関数状に作用する場合である。断面は内側 (1 層) がポアソン比 $\nu=0.3$ でコンクリートと同じ弾性係数 E_1 の材料、外側 (2 層) がポアソン比が 1 層目と同じ $\nu=0.3$ で、鉄と同じ弾性係数 E_2 からなる材料で構成されるものとし、構造・材料諸元には弾性係数比 $E_2/E_1=8.75$ 、密度比 $\rho_2/\rho_1=3.4$ 、層厚比 $h_2/h_1=0.1$ 、内層厚半径比 $h_1/a=0.085$ 、スパン半径比 $L/a=3$ およびせん断補正係数 $\kappa = \pi^2/12$ を用いた。荷重載荷条件は $\varepsilon_2/\varepsilon_1=1$ 、 $\varepsilon_2/L=0.05$ である。なお、参照面は二層の境界面より内側 $d=0.02068a$ の位置である。

図-3 は、固有振動数曲線 (円周方向波数 n に対する固有振動数の変化) を軸方向波数 $m=1, 3, 5$ について示した。これを見ると、軸方向モードに対する最小の固有振動数は $n=2$ あるいは $n=3$ でとることがわかる。

表-1 は、 $x = L/2, \theta=0$ における変位 w 、軸方向応力 (参照面 $z=0$ における σ_x) の時間応答値に及ぼす級数の打ち切り項数 m と n の影響を調べたものである。これによれば、いずれの m と n に対して収束状況は良好であり、以下では $m = n = 80$ を採用する。

図-4 は、スパン中央、 $\theta=0$ における半径方向変位 (w) の時間応答を示したものである。図の横軸は無次元化時間 $\tau = ct/a$ を表す。ここで $c = \sqrt{K/M_1}$ は、

$$c = \sqrt{\frac{E_1 h_1 + E_2 h_2}{(1 - \nu^2)(\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2)}}$$

と表される等価な縦波の伝播速度である。なお図より、変位 w はほぼ $\tau=40$ の周期で変動していることがわかる。

図-5 および図-6 はそれぞれ、スパン中央、 $\theta=0$ における軸方向応力 σ_x および周方向応力 σ_θ の時間応答である。各図の太い実線は $z = d$ (内層と外層の境界面) の応力を、細い実線は $z=0$ (参照面) における内層の膜応力を示す。図において興味深い点は、軸方向応力の大きさが、殻の両端での軸方向拘束がないにもかかわらず、軸方向慣性力のため、周方向応力と同程度の値で生じていることである。応答初期では軸方向応力に引張応力が生じていること、参照面における周方向応力には圧縮応力と引張応力が短周期で交互に生じていることもわかる。

図-7 は、着目点 $x = 0.1L$ と $x = 0.2L$ における $z = d$ での軸方向応力の初期応答を示したものである。応答は、荷重端より発した等価伝播速度 c の縦波の到達時刻 $\tau=1.05$ および $\tau=0.75$ で立ち上がっており、応力波の伝播現象をほぼ表していると判断できる。

図-8 は、無次元化時間 $0 < \tau < 40$ の時間帯における軸、周方向応力の殻厚に沿った分布を示す。外層 (鉄) と内層 (コンクリート) の境界面での応力値の不連続性は、弾性係数の値の違い ($E_2 > E_1$) によるものである。図-5 および図-6 と同様に、内層に引張応力が発生しており、特に下面の周方向応力に顕著なことがわかる。

なお、これまでに示したいずれの応答の最大値は、静的最大応答値の約 1.5~2 倍である。

6. おわりに

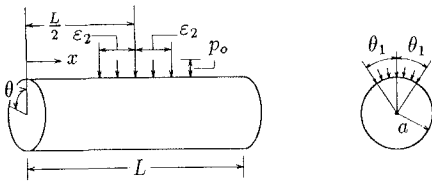
本研究は、単層の修正円筒殻理論を、各層の材質が等方性でポアソン比が等しい二層円筒殻へ適用して新たな基礎方程式を導出し、固有関数展開法 (ノーマルモード法) により衝撃応答解析を行う方法について述べたものである。本解析結果は数値例が示すように、応力波の伝播現象をほぼ正確に表しており、本解法はこの種の構造物の基本的な応答特性の把握や他の近似解法の精度比較にも有効と思われる。

参考文献

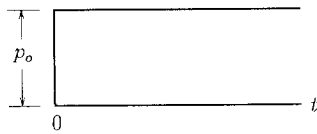
1) Vinson, J.R. and Sierakowski, R.M. : The Behavior of Structures Composed of Composite Materials, Martinus Nijhoff Pub., 1986.
2) Weingarten, I. : Free vibrations of multilayered cylindrical shells, Experimental Mechanics, pp.200-205, 1964.

表-1 収束性の検討 ($z=0, \theta=0$)

τ	$-E_1 w / a p_o$			$-\sigma_x / p_o$		
	$m=n=40$	$m=n=80$	$m=n=160$	$m=n=40$	$m=n=80$	$m=n=160$
2	0.6846	0.6848	0.6848	0.0162	0.0165	0.0164
6	3.9947	3.9947	3.9949	0.4853	0.4853	0.4853
10	6.2018	6.2019	6.2019	0.8141	0.8141	0.8141
50	4.5925	4.5924	4.5924	0.5286	0.5286	0.5286
100	4.1012	4.1008	4.1008	0.4805	0.4808	0.4808



(a) Spatial distribution



(b) Time distribution

図-2 数値計算モデル

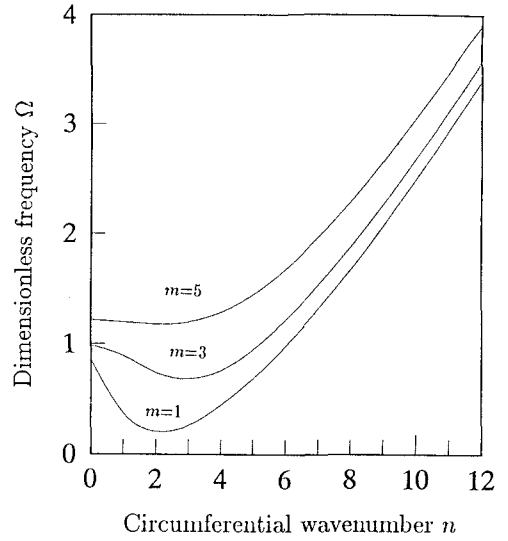


図-3 固有振動数曲線

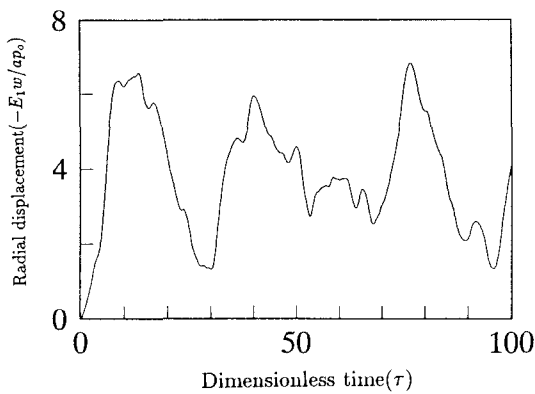


図-4 半径方向変位 w の応答曲線
($x = L/2, \theta = 0$)

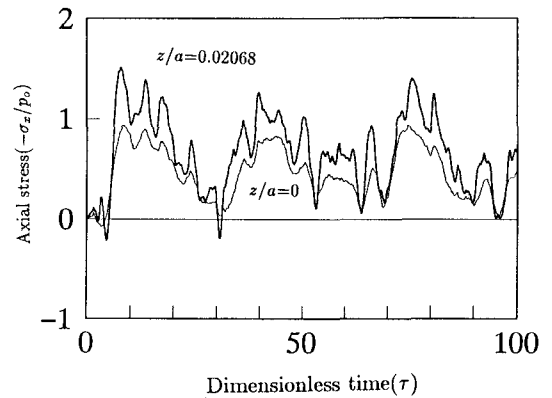


図-5 軸方向応力 σ_x の応答曲線
($x = L/2, \theta = 0$)

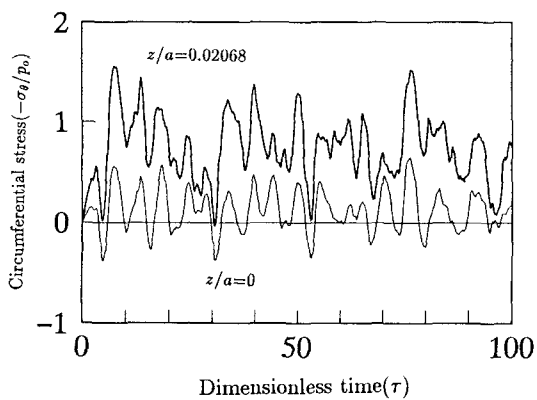


図-6 周方向応力 σ_θ の応答曲線
($x = L/2, \theta = 0$)

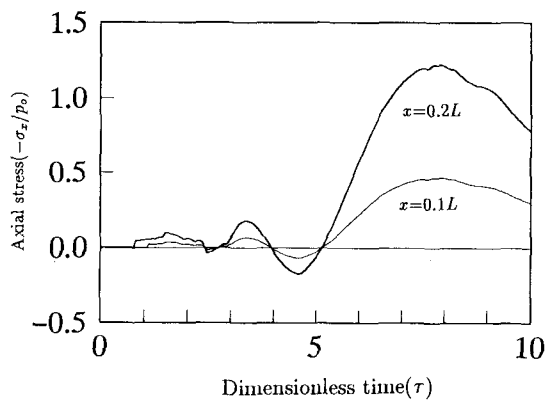


図-7 軸方向応力 σ_x の初期応答曲線
($\theta = 0$)

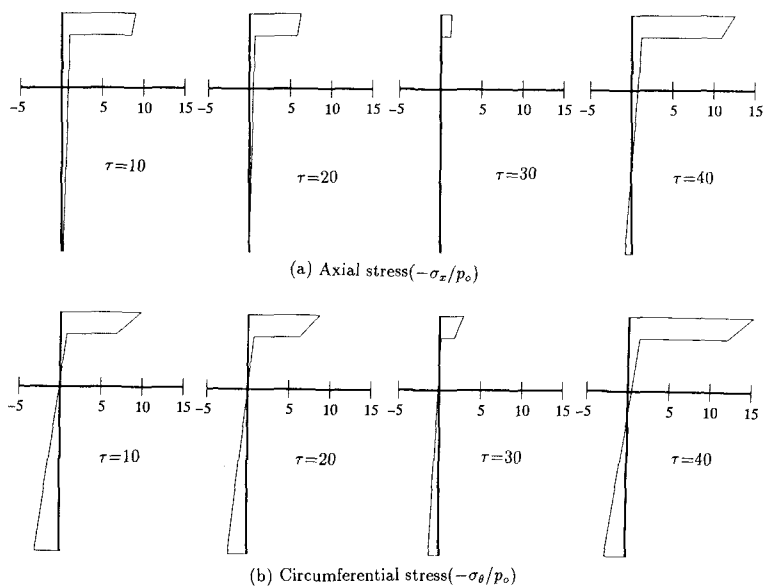


図-8 軸方向応力 σ_x と周方向応力 σ_θ の殻厚方向の分布状況 ($\theta = 0$)

- 3) Markus, S. : The Mechanics of Vibrations of Cylindrical Shells, Elsevier, 1988.
- 4) Bushnell, D. : Dynamic response of two-layered cylindrical shells to time-dependent loads, AIAA J, pp.1698-1703, 1965.
- 5) Mirsky, I. and Herrmann, G. : Nonaxially symmetric motion of cylindrical shells, J. Acoust. Soc. Am., pp.1116-1123, 1957.
- 6) Magrab, E. B. : Vibrations of Elastic Structural Members, Sijthoff & Noordhoff, 1979.
- 7) Reismann, H. and Medige, J. : Forced motion of cylindrical shells, Proc. ASCE, EM5, pp.1169-1182, 1968.

(1992年9月21 受付)