

軸対称多層円筒の弾性衝撃応答解析

IMPACT RESPONSE ANALYSIS OF AXISYMMETRIC LAYERED CYLINDERS

小林 治俊,* 松村 弘,** 石丸 和宏,** 園田恵一郎***

By Harutoshi KOBAYASHI, Hiroshi MATSUMURA, Kazuhiro ISHIMARU and Keiichiro SONODA

The propagation of elastic stress waves in axisymmetric layered cylinders subjected to impact pressures is investigated. Based on the two dimensional theory of elastodynamics the method of eigenfunction expansions has been used to obtain exact solutions for this problem. Numerical calculations are made for the steel-concrete composite three layered cylinders, and stresses variations at transient states and long time states of cylinder are shown graphically. For the hoop stress at the inside and outside surfaces, a comparison between the maximum dynamic stress and the corresponding static stress shows the customary dynamic factor of 2 to be low in varying degree depending on the particular loading condition, view points of stress, and ratio of inner and outer radii of cylinder.

1. はじめに

円筒は工学的用途に種々用いられており, そのため円筒が内外周に衝撃荷重を受ける場合の動的挙動に関する研究がなされている. 鈴木[1, 2] は爆発荷重を受ける円筒を等方性平面ひずみ状態の仮定の元に動弾性論に基づく解析を行い数値計算例を通じてその動的挙動を初めて示した. 松本・中原[3] は等分布衝撃荷重を受ける円筒について, 応力波伝播特性を明らかにするとともに円筒内外半径比と動的最大応力との関係を調べている. 宇治橋・松本[4], Pawlik-Reismann[5] は非軸対称問題を取扱い, 集中ないしは部分分布の衝撃荷重を受ける円筒の動的挙動を示している. Liu-Chang[6] は, 円筒が内外周に等分布衝撃荷重を受けるとともに熱荷重をも受ける場合の解析を行っている. Bickford-Warren[7] は材料異方性が動的挙動におよぼす影響を検討するため, 横等方性円筒の解析を行い等方性の場合よりも大きな応力が生じることを示している. 以上いずれの研究においても通常2倍とされている静的応答に対する動的応答倍率は円筒の場合必ずしもそうとは言えず, 半径比, 載荷周の位置に大きく影響を受け, 2倍以上となることが明らかにされている.

一方, 多層円筒を動弾性論に基づき解析した例としては, 松岡ら[8] による周期荷重を受ける二層有限長円柱の解析, 大島ら[9] によるコア材を含む円筒の応力波動解析とその健全度評価への適用に関する研究の他は見受けられないようである. 鋼・コンクリート合成梁や合成平板と同様に, 多層合成円筒が衝撃荷重を受ける際の接合面等での弾性応力変動を応力波伝播の観点より理論的に明らかにしておくことは, 破壊メカ

* 工博 大阪市立大学助教授

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

** 大阪市立大学大学院前期博士課程

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

*** 工博 大阪市立大学教授

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

ニズムの究明に関連して重要であると思われる。

本研究は軸対称多層円筒が衝撃荷重を受ける際の動的挙動を明らかにすることを目的とし、動弾性論による解析を行ったものである。上に記した研究の解析手法としては、文献5, 6, 8, 9が固有関数展開法(モード法) [10]を用い、他は時間に関してラプラス変換を行う解析法を採用している。固有関数展開法によれば、対象とする問題の固有関数を求めることができれば、構造物の動的応答解析で一般に用いられているモード解析に則る解析過程により解を求めることができる利点があり、ラプラス変換法の帰結としての煩雑なラプラス逆変換は不要である。筆者らも [11-13]、多層平面梁や円板の弾性衝撃解析においてその有用性を示した。本研究でもこの固有関数展開法を用いる。

2. 自由振動解析

最初に自由振動解析により固有関数(モード関数)を誘導する。図1は取扱う軸対称3層円筒の座標系を示しており、円筒は等方性平面ひずみ状態にあるものとする。座標 (r, θ) 方向の変位を (u, v) とすると軸対称問題であるから変位は u のみ生じ($v=0, \tau_r \theta=0$)、変位 u で表わした運動方程式は物体力が存在しない場合には次のように与えられる。

$$c_1^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = \ddot{u} \quad (1)$$

ここに、ドット($\ddot{}$)は時間微分を示し、 c_1 は縦波の速度であり、

$$c_1^2 = \frac{2(1-\nu)G}{1-2\nu\rho} \quad (2)$$

また ρ, G, ν はそれぞれ密度、せん断弾性係数、ポアソン比である。

応力・変位関係式は次のように表せる。

$$\sigma_r = \frac{2G}{1-2\nu} \left[(1-\nu) \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{u}{r} \right] \quad (3a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{2G}{1-2\nu} \left[\nu \frac{\partial u}{\partial r} + (1-\nu) \frac{u}{r} \right] \quad (3b)$$

いま、固有円振動数 ω の調和振動、

$$u(r) = U(r) \cos \omega t \quad (4)$$

を仮定し、式(1)へ代入すれば次式を得る。

$$\frac{d^2 U}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dU}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{1}{r^2} \right) U = 0 \quad (5)$$

ただし、 $\alpha = \omega/c_1$ である。これはベッセルの微分方程式であるから解は、

$$U(r) = AJ_1(\alpha r) + BY_1(\alpha r) \quad (6)$$

で与えられる。 $J_n(\cdot), Y_n(\cdot)$ は n 次の第1種および第2種ベッセル関数、 A, B は境界条件より定まる積分定

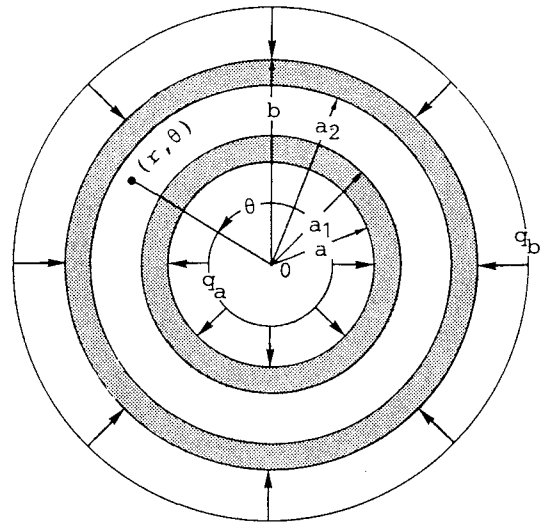


図1 3層円筒の座標系

数である。式(4)、(6)を用いて応力式を求めれば次のようになる。

$$\sigma_r = (\sigma_r) \cos \omega t, \quad (\sigma_r) = 2G\alpha \left\{ A \left[\nu_1 J_0(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] + B \left[\nu_1 Y_0(\alpha r) - \frac{Y_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] \right\} \quad (7a)$$

$$\sigma_\theta = (\sigma_\theta) \cos \omega t, \quad (\sigma_\theta) = 2G\alpha \left\{ A \left[\nu_2 J_0(\alpha r) + \frac{J_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] + B \left[\nu_2 Y_0(\alpha r) + \frac{Y_1(\alpha r)}{\alpha r} \right] \right\} \quad (7b)$$

ここに、 $\nu_1 = (1-\nu)/(1-2\nu)$, $\nu_2 = \nu/(1-2\nu)$ 。

以上の展開は円筒の各層において成立するので、以後関連する諸量に添字 k ($k=1, 2, 3$) を付して k 層目の円筒における諸量を表すことにする。

次に、円筒の内外周の自由境界条件および接合面の連続条件は次式で与えられる。

$$\sigma_{r1} = 0 \quad (r=a) \quad (8)$$

$$u_1 = u_2, \quad \sigma_{r1} = \sigma_{r2} \quad (r=a_1) \quad (9)$$

$$u_2 = u_3, \quad \sigma_{r2} = \sigma_{r3} \quad (r=a_2) \quad (10)$$

$$\sigma_{r3} = 0 \quad (r=b) \quad (11)$$

先に得られた変位・応力式をこれらの条件式に代入すれば、積分定数 $A = (A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3)^T$ に関する次の6元連立同次方程式を得る。

$$CA = 0 \quad (12)$$

ここに C は 6×6 の係数行列であり、振動数方程式は $|C| = 0$ で与えられる。これをRegula-Falsi法により数値的に解いて m 次の固有円振動数 ω_m ($m=1, 2, 3, \dots$) を求め対応する積分定数 A_{mk} , B_{mk} を定めれば固有関数 $U_{mk}(r)$ が確定する。

固有関数の直交条件は、相反作用の定理を適用すれば次のように得られる。

$$\sum_{k=1}^3 \int_{r_k}^{r_{k+1}} \rho_k U_{mk}(r) U_{nk}(r) r dr = \delta_{mn} N_m^2 \quad (13)$$

ここに、 $r_1=a$, $r_2=a_1$, $r_3=a_2$, $r_4=b$, δ_{mn} はクロネッカーのデルタ、 N_m はノルムである。

3. 衝撃応答解析

衝撃問題の基礎方程式、円筒各層の接合面の連続条件は自由振動解析の場合と同じであり、衝撃荷重が作用する内周あるいは外周の境界条件が次のように規定される。

$$(1) \text{ 内周载荷の場合: } \sigma_{r1} = -q_a f_a(t) \quad (r=a), \quad \sigma_{r3} = 0 \quad (r=b) \quad (14)$$

$$(2) \text{ 外周载荷の場合: } \sigma_{r1} = 0 \quad (r=a), \quad \sigma_{r3} = -q_b f_b(t) \quad (r=b) \quad (15)$$

q_a , q_b はそれぞれ内外周に作用する全周等分布荷重強度、また $f_a(t)$, $f_b(t)$ は衝撃荷重の時間関数である。以下の解析では内周载荷の場合につき議論を進めるが、外周载荷の場合も同様に適用できる。

衝撃問題に対する式(1)の解は、静荷重としての q_a による解(静的解) $u^s_k(r)$ と慣性力を考慮した解(擾乱解) $u^p_k(r, t)$ の和として与えることができる。すなわち、

$$u_k(r, t) = f_a(t) u^s_k(r) + u^p_k(r, t) \quad (16)$$

ここに、静的解 $u^s_k(r)$ は式(1)より慣性項を省いた次の静的つり合い式を満足する。

$$\frac{d^2 u^s_k}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du^s_k}{dr} - \frac{u^s_k}{r^2} = 0 \quad (17)$$

これを満たす解は、 $u^s_k(r) = C_k r + D_k r^{-1}$ であり、積分定数 C_k 、 D_k は境界条件および接合面の連続条件より決定できるがここではこれを省略する。

次に、擾乱解 $u^p_k(r, t)$ を $Q_m(t)$ を未定の時間関数とし前節で求めた固有関数 $U_{mk}(r)$ よりなる級数：

$$u^p_k(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} Q_m(t) U_{mk}(r) \quad (18)$$

に表し、式(16)、(18)を式(1)に代入し、式(5)、(17)を考慮して式を変形すれば次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} [\ddot{Q}_m(t) + \omega_m^2 Q_m(t)] U_{mk}(r) = -\ddot{f}_s(t) u^s_k(r) \quad (19)$$

両辺に $U_{nk}(r)$ を掛け積分し固有関数の直交条件を利用すれば、 $Q_m(t)$ に関する次の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}_m(t) + \omega_m^2 Q_m(t) = Z_m \ddot{f}_s(t) \quad (20)$$

ここに係数 Z_m は、

$$Z_m = \frac{-1}{N_m^2} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{r_k}^{r_{k+1}} \rho_k u^s_k(r) U_{mk}(r) r dr \right] \quad (21)$$

で与えられ、式(20)の解は次のように得られる。

$$Q_m(t) = Q_m(0) \cos \omega_m t + \frac{1}{\omega_m} \dot{Q}_m(0) \sin \omega_m t + \frac{Z_m}{\omega_m} \int_0^t \ddot{f}_s(\tau) \sin[\omega_m(t-\tau)] d\tau \quad (22)$$

積分定数 $Q_m(0)$ 、 $\dot{Q}_m(0)$ は次のように決定できる。今、衝撃を受ける前の円筒は静止しているものとすれば、

$$u_k(r, 0) = \dot{u}_k(r, 0) = 0 \quad (23)$$

式(16)より、

$$u^p_k(r, 0) = -f_s(0) u^s_k(r), \quad \dot{u}^p_k(r, 0) = -\dot{f}_s(0) u^s_k(r) \quad (24)$$

上式の左辺に式(18)を代入したのち両辺に $U_{nk}(r)$ を掛け積分し、固有関数の直交性を利用すれば、

$$Q_m(0) = -Z_m f_s(0), \quad \dot{Q}_m(0) = -Z_m \dot{f}_s(0) \quad (25)$$

4. 数値計算例

ここでは、時間に関してステップ状の衝撃荷重 $[f_s(t) = f_b(t) = H(t)]$ を受ける内外層が鋼、中間層がコンクリートの円筒の応答計算を行った。等分布荷重強度は内周・外周荷重ともに $q (=q_s = q_b)$ とする。鋼厚はすべて円筒半径 b の $1/20$ とし、3種類の形状比：(Case 1) $a/b = 0.5$ 、 $a_1/b = 0.55$ 、 $a_2/b = 0.95$ 、(Case 2) $a/b = 0.65$ 、 $a_1/b = 0.70$ 、 $a_2/b = 0.95$ 、(Case 3) $a/b = 0.80$ 、 $a_1/b = 0.85$ 、 $a_2/b = 0.95$ 、を取り扱う。また、鋼、コンクリー

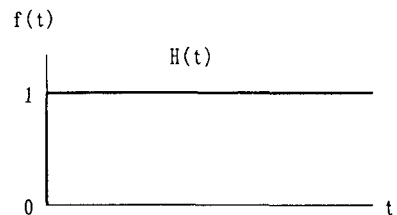


図2 ステップ関数

トの材料定数は、密度： $\rho_s=7.85\text{tf/m}^3$ ， $\rho_c=2.3\text{tf/m}^3$ ，ヤング率： $E_s=2.1\times10^7\text{tf/m}^2$ ， $E_c=2.4\times10^6\text{tf/m}^2$ ，ポアソン比： $\nu_s=0.3$ ， $\nu_c=0.167$ を用いた．計算に用いた級数解の項数は収束状況を考慮し $m=500$ とし，全ての計算を倍精度で行った．なお，時間は無次元時間 $\tau(=ct/b)$ で取扱う．すなわち，コンクリート内部を進行する縦波（速度 $c=\sqrt{2G_c(1-\nu_c)/\rho_c(1-2\nu_c)}$ ）が円筒外径長 b を進むに要する時間を1とする．

図3は，Case 1の応力 σ_r の初期応答曲線であり，時間刻み $\Delta\tau=0.01$ として描いている．図において応答曲線が不連続的に変動している箇所は応力波の波面が到達したことを示している．波線理論[14]により，着目点に到着する応力波の種類，伝播経路，到達時刻を幾何学的考察により説明できるが，本例は円筒の内周または外周に等分布載荷された場合であるため応答は主として縦波に依存している．特に内外鋼層内で反射・透過を繰り返す応力波の波面が到達する度に小刻みに不連続な変動を繰り返している．

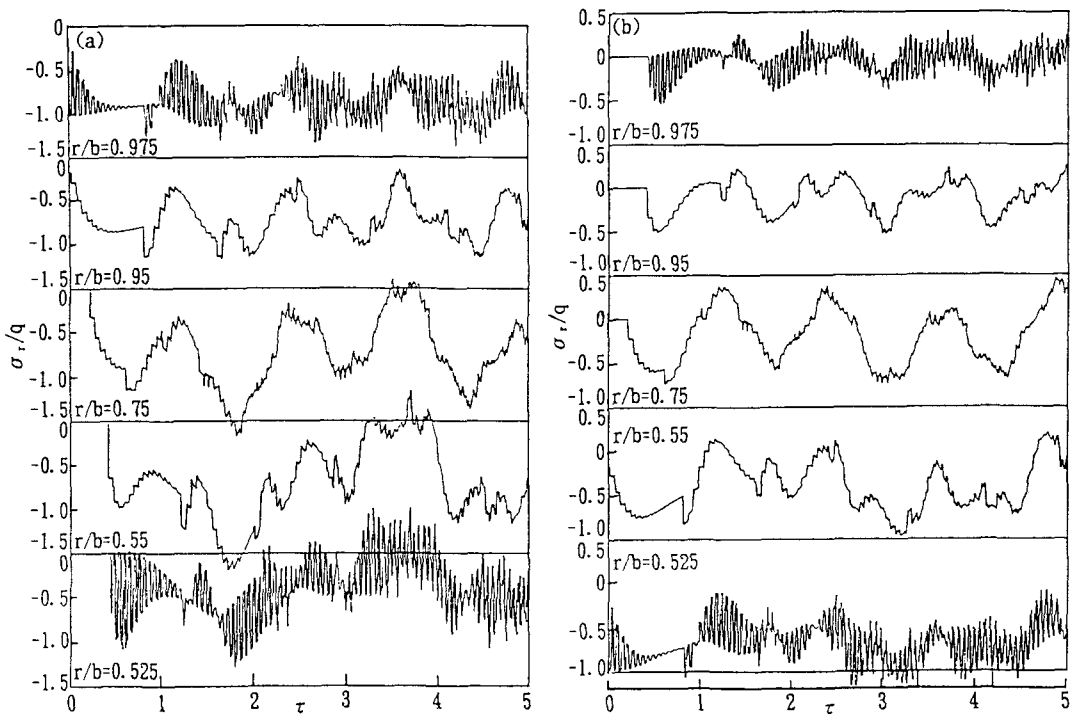


図3 σ_r の初期応答曲線 ($a/b=0.5$) : (a)外周載荷，(b)内周載荷

接合面での σ_r の最初の応答は，内外周載荷ともに載荷面で発生した縦波が剛性の高い鋼から低いコンクリートに入射する場合には入射波より小さく，続いてコンクリート内部を進行し鋼に入射する際には逆に大きくなっていることが分かる．これは，鋼・コンクリート合成円板の衝撃解析においても示したが[12]，剛性の違う異種材料間の入射波の低減，増大を示すものである．また，内周載荷の場合はコンクリート内部に部に引張応力が発生しているが，外周載荷では，ここに示した時間帯では引張応力はほとんど生じないようである．

図4－図6に σ_θ の長期応答曲線を示している．いずれも応力波の到達とともに応答が始まっている．接合面での

表1 σ_θ の最大応答倍率

a/b	外周載荷		内周載荷	
	外周	内周	外周	内周
0.5	1.88	2.41	2.40	1.98
0.65	1.93	2.20	2.20	2.04
0.8	1.93	2.06	2.07	2.04

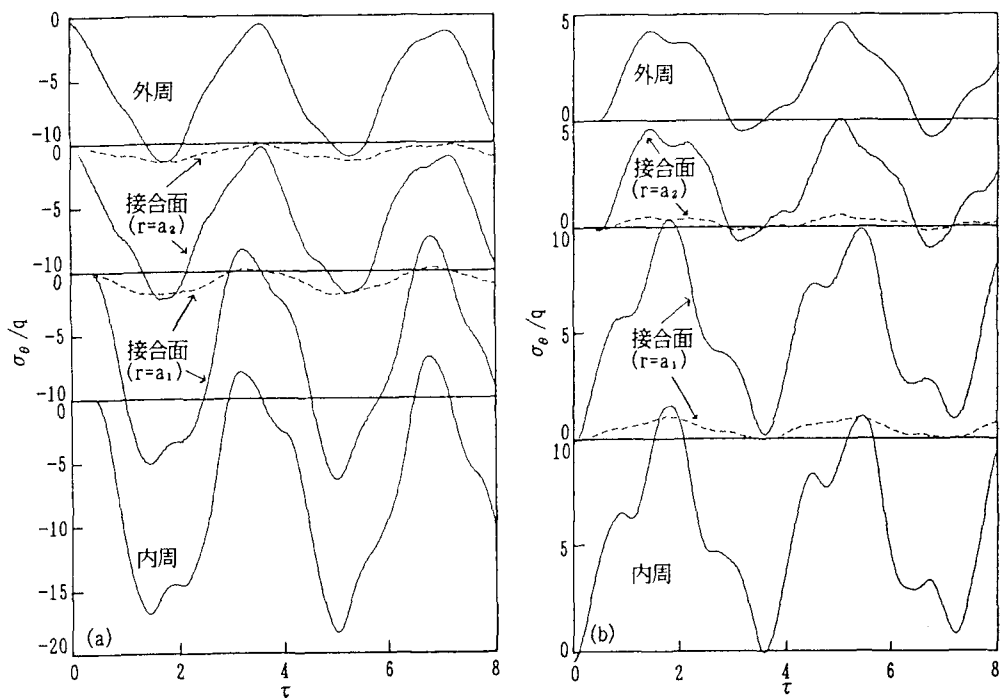


図4 σ_θ の長期応答曲線 ($a/b=0.5$) : (a)外周載荷, (b)内周載荷 (— 鋼, ----コンクリート)

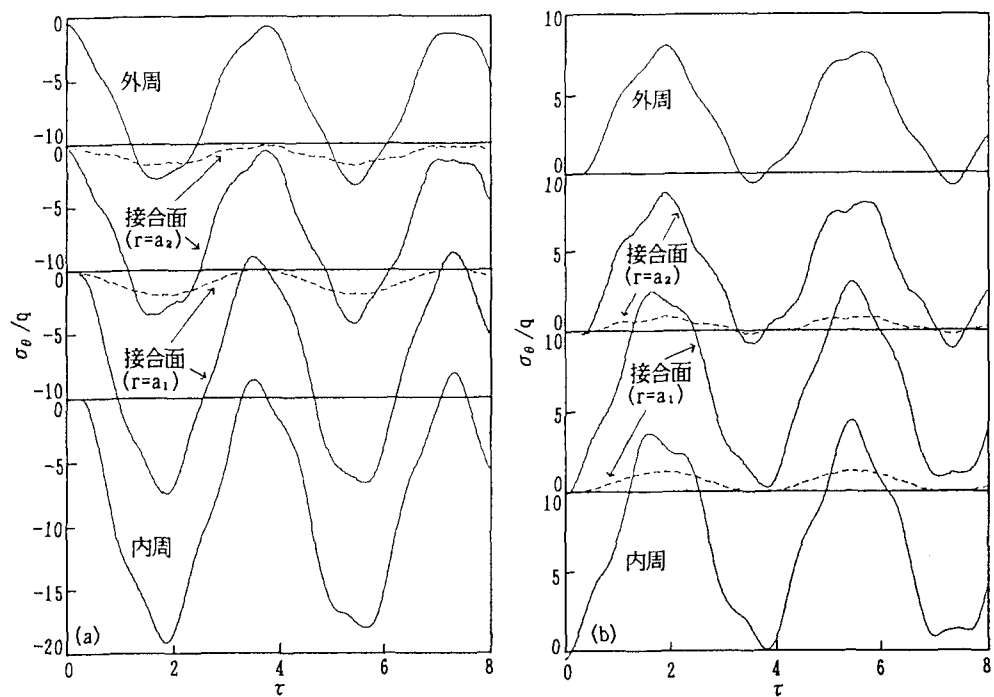


図5 σ_θ の長期応答曲線 ($a/b=0.65$) : (a)外周載荷, (b)内周載荷 (— 鋼, ----コンクリート)

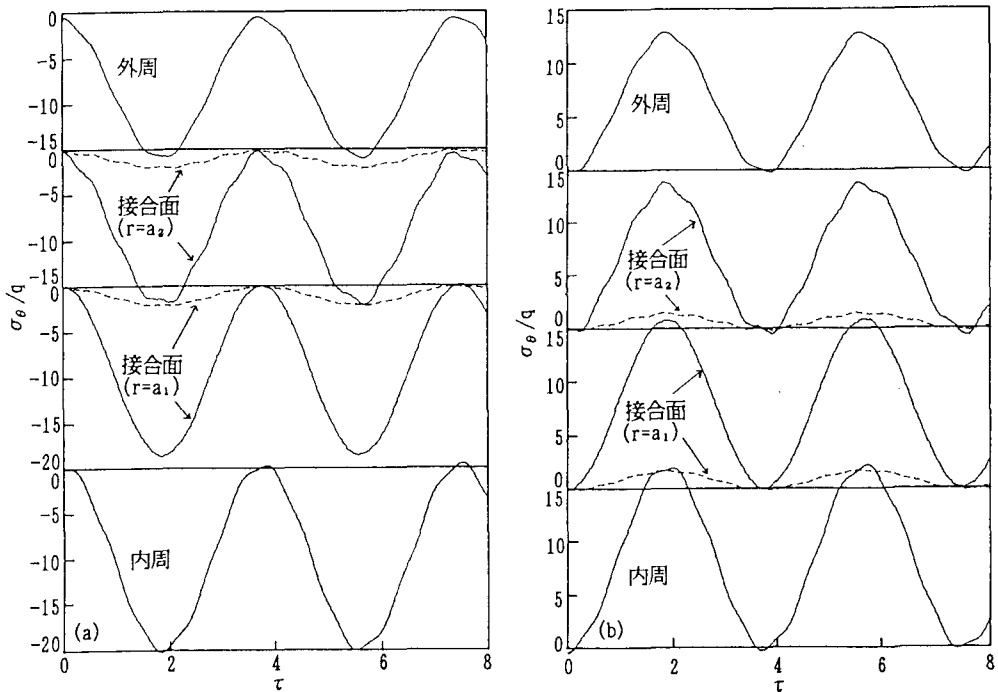


図6 σ_{θ} の長期応答曲線 ($a/b=0.8$) : (a)外周载荷, (b)内周载荷 (— 鋼, ----コンクリート)

鋼とコンクリートの応力値の違いは弾性係数の違いによるものである。また、内外径比が大きくなるほど応答値も大きくなっている。鋼に生じる応力の絶対値の大きさを検討すると、内・外周载荷ともに外周で小さく、内周にかけて大きくなり、図に示した時間帯での最大応答倍率は表1のようになる。外周载荷の場合の最大応答倍率は、外周応力では2を越えず、内周応力では2を越え、内外径比が大きい場合大きな応答倍率を示している。これとは逆に、内周载荷の場合は外周応力にその傾向が見られる。また内外径比が大きくなるにつれて最大応答倍率は何れの場合も2に近づくことが分かる。これらは、単一円筒の場合と同様の傾向にある [3]。なお、応答図で興味深いことは、内周载荷の場合の内周応力、外周载荷の場合の外周応力は、衝撃瞬時に値を持つことである。これは、作用圧縮荷重 q と釣り合う圧縮応力 $\sigma_r = -q$ による周方向のひずみが拘束されるために周方向応力 σ_{θ} が生じるからである。

5. おわりに

等分布衝撃荷重を受ける軸対称多層円筒を動弾性論に基づく固有関数展開法により解析する方法を示し、内外層が鋼、中間層がコンクリートよりなる合成3層円筒を対象に時間に関してステップ状の衝撃荷重が作用する場合の数値計算を行い、応力の過渡状態および長期応答性状を示した。円筒の場合動的な最大応答倍率は必ずしも2とはならず、着目点、载荷周置、円筒の内外径比により2を越える応答値を示す。特に内外径比が小さくなるほどその傾向が見られる。また内外周载荷いずれの場合も内周で応力の最大応答を示す。

部分荷重が作用する円筒は非軸対称問題として本解析法の適用が可能であり、また耐衝撃性の観点からは最適な層厚比やその配置決定には広範なパラメトリック解析が必要である。現在これらについて数値計算を続行中であることを付記する。

謝 辞

査読者からは貴重な意見を頂いた。ここに記して感謝の意を表す。

参考文献

- 1) 鈴木真一：内外縁にそって分布衝撃荷重をうける円環の応力集中について，日本機械学会論文集（第1部），31巻，231号，pp. 1571-1581, 1965.
- 2) Suzuki, S.: Dynamic Elastic Response of a Ring to Transient Pressure Loading, Journal of Applied Mechanics, Vol. 25, pp. 261-266, June 1966.
- 3) 松本浩之，中原一郎：内外面に等分布衝撃圧力を受ける有孔円板および円筒，日本機械学会論文集（第1部），32巻，237号，pp. 709-717, 1966.
- 4) 宇治橋貞幸，松本浩之：非軸対称衝撃荷重をうける円環の変形と応力（第1報，二次元動弾性理論による解析），日本機械学会論文集，40巻，331号，pp. 701-709, 1974.
- 5) Pawlik, P.S. and Reismann, H.: Forced Plane Strain Motion of Cylindrical Shells-A Comparison of Shell Theory With Elasticity Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 32, pp. 725-730, September 1973.
- 6) Liu, C.K. and Chang, C.H.: Thermal and Dynamic Response of an Infinite Hollow Cylinder, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 2 (Edited by W.A. Shaw), Pergamon Press, Oxford, pp. 487-501, 1965.
- 7) Bickford, W.B. and Warren, W.E.: The Propagation and Reflection of Elastic Waves in Anisotropic Hollow Spheres and Cylinders, Developments in Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 3 (Edited by W.A. Shaw), Pergamon Press, Oxford, pp. 433-445, 1967.
- 8) 松岡健一，菅田紀之，岸 徳光，能町純雄：部分分布周期荷重を受ける二層円柱の応答解析，構造工学論文集，Vol. 33A, pp. 615-622, 1987.
- 9) 大島俊之，三上修一，重清浩司，能町純雄：複合円盤部材の応力波動解析と内部構造の決定，構造工学論文集，Vol. 34A, pp. 827-836, 1988.
- 10) Reismann, H.: On the Forced Motions of Elastic Solids, Applied Scientific Research, Vol. 18, pp. 156-165, 1967.
- 11) 小林治俊，園田恵一郎，鹿島光洋：単純支持された鋼・コンクリート合成梁の弾性衝撃応答解析，構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1489-1496, 1992.
- 12) 小林治俊，園田恵一郎，石丸和宏：鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析，構造工学論文集，Vol. 38A, pp. 1497-1504, 1992.
- 13) Kobayashi, H., Sonoda, K. and Ishimaru, K.: Three Dimensional Impact Response Analysis of Axisymmetric Circular Sandwich Plates, Proc. of the Third Pan American Congress of Applied Mechanics, Sao Paulo, Brazil, Jan. 1993 (to appear).
- 14) 佐藤泰夫：弾性波動論，岩波書店，1978.

(1992年9月21日受付)