

平板の初期応力状態と応力波伝播特性に及ぼす境界の影響について

BOUNDARY EFFECT ON INITIAL STRESS STATE AND STRESS WAVE PROPAGATION IN THICK PLATES

小林 治俊,* 石丸 和宏,** 山中 和明,*** 園田恵一郎****

By Harutoshi KOBAYASHI, Kazuhiro ISHIMARU, Kazuaki YAMANAKA and Keiichiro SONODA

In order to examine the boundary effect on the initial stress states in the elastic body under impact loads, response analyses of square and circular plates have been made by using the method of eigenfunction expansions on the basis of theory of three dimensional elastodynamics. The impact load applied is an uniformly distributed load over circle region on the top and bottom surfaces of the plates in space and the step function load in time. Numerical results have been presented graphically to show the well-known fact that the stress states are not affected until the reflected stress waves from their boundaries arrive at the view points, but after then the stress states depend on the boundary shapes and conditions.

1. はじめに

衝撃荷重を受ける弾性体の応答は、衝撃点で発生し物体内部を伝播する応力波が境界の影響を受けるまでは物体の形状、境界条件に影響されないことはよく知られている。しかしながら有限体を対象として、動弾性論に基づきこれを示した解析例はほとんど見受けられないように思われる。物体内部を進行する応力波は、有限体の境界において反射され再び入射波として物体内部を進行する。動弾性論による解析では、時間変動する境界条件を満足する有限体の取扱いが困難であることも一つの理由であろう。

先に筆者ら[1]は衝撃を受ける軸対称円板の応力波伝播特性を動弾性論に基づき明らかにした。そこで、本研究は、上述の応力波伝播特性に及ぼす境界の影響を示すため、円形荷重を受ける円板および正方形板を対象に動弾性論に基づく解析を行い、衝撃荷重を受けた後の初期応力波伝播特性に関して、境界からの反射波の到達前後の応力波伝播の同一性と相違について若干の比較検討を行ったものである。

解析手法にはReismannら[2,3]による動弾性論に基づく固有関数展開法(モード解析)を用いる。本手法を用いた解析を筆者らも円板や平面梁[1,4]、そして多層合成梁および円板[5-7]の弾性衝撃解析で行いその有用性を示した。本手法によれば、対象とする問題の自由振動解析より固有関数を求めることができれば、

* 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

** 大阪市立大学大学院前期博士課程 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

*** 工修 (株)サクラダ 技術開発室 (〒261-01 千葉市中瀬1-3 幕張テクノガーデンB10)

**** 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

動弾性解析で一般に用いられているラプラス変換法の帰結としての煩雑なラプラス逆変換は不要であり、構造物の動的応答解析で用いられているモード解析と同様にして解を求めることができる利点がある。

2. 解析方法

2.1 基礎式

本解析で取り扱う正方形板と円板の座標系を図1(a), (b)に示している。何れの板も半径**b**の円形部分に等分布した衝撃荷重 $q_0 f(t)$ が板の上下面中央に作用するものとする、何れも z 面に対称問題であり、かつ円板は軸対称問題である。変位を矩形板では $u=(u, v, w)$ ，軸対称円板では $u=(u, v(=0), w)$ とし， λ ， μ をLaméの定数， ρ を密度とすれば，これらの等方性板の運動方程式は一括して，

$$\mu \nabla^2 \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (1)$$

と表わすことができる。ここに、ドットは時間 t に関する微分を意味し、演算子 ∇ ， ∇^2 は直角，円柱座標におけるものを用いる。なお、物体力は考慮していない。

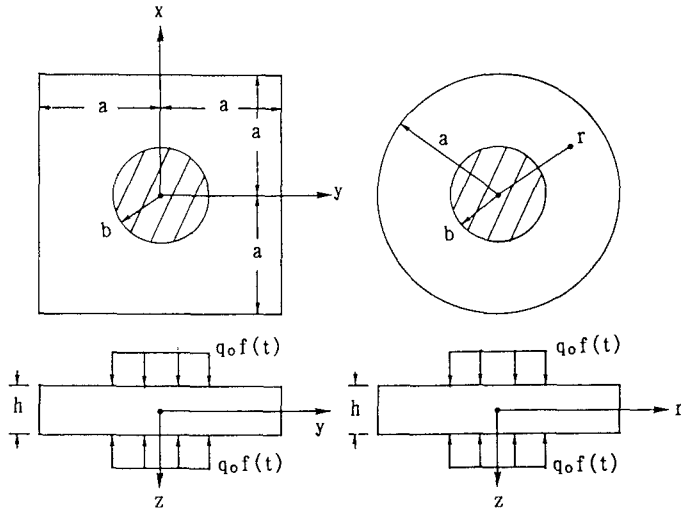


図1 座標系：(a)正方形板，(b)軸対称円板

応力・変位関係式を具体的に表示すれば、次のようになる。

(1) 矩形板の場合：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda e, \quad \sigma_y = 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} + \lambda e, \quad \sigma_z = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda e \\ \tau_{xy} &= \mu \left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right], \quad \tau_{yz} = \mu \left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right], \quad \tau_{zx} = \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (2)$$

(2) 円板の場合：

$$\begin{aligned} \sigma_r &= 2\mu \frac{\partial u}{\partial r} + \lambda e, \quad \sigma_\theta = 2\mu \frac{u}{r} + \lambda e, \quad \sigma_z = 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda e \\ \tau_{rz} &= \mu \left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right], \quad \tau_{z\theta} = \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

上式で e は各座標系で表示された体積ひずみ.

2.2 境界条件

正方形板の場合, 境界条件は周面($x = \pm a, y = \pm a$)では単純支持とすると次のように与えられる.

$$x = \pm a \text{において, } v = w = \sigma_x = 0 \quad (4)$$

$$y = \pm a \text{において, } u = w = \sigma_y = 0 \quad (5)$$

$$z = \pm h/2 \text{において, } \sigma_z = -q(x, y)f(t), \tau_{xz} = \tau_{zx} = 0 \quad (6)$$

図1に示す円形荷重 $q(x, y)$ のフーリエ級数展開は次のように与えられる[8].

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi q_0 b J_1(\gamma_{mn} b)}{\gamma_{mn}} \cos(\alpha_m x) \cos(\beta_n y) \quad (7)$$

ここに, $\alpha_m = (m - 0.5)\pi/a$, $\beta_n = (n - 0.5)\pi/a$, $\gamma_{mn} = (m^2 + n^2)^{1/2}\pi/2a$, J_1 は1次のBessel関数である.

一方, 円板の場合, 周面($r = a$)で単純支持条件($w = \sigma_r = 0$)を満足する解を求めることは, 動的問題では静的問題と異なって変数分離形がとれず解析的にきわめて複雑となり[9], 得られた解は本解析手法の固有関数展開法には不適当である. そこで本研究では解析の便を考慮して次の境界条件を用いることにする.

$$r = a \text{において, } w = \sigma_z = 0 \quad (8)$$

$$z = \pm h/2 \text{において, } \sigma_z = -q(r)f(t), \tau_{rz} = 0 \quad (9)$$

式(8)の条件は, 文献[6]に記したが, 円板周面では $u \neq 0$, $\sigma_r \neq 0$ となるので, 単純支持と固定の中間のものと見なすことができる. 次に, 図1に示す円形荷重 $q(r)$ を次のBessel級数に展開する.

$$q(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2q_0 b J_1(\varepsilon_m b)}{\varepsilon_m a [J_1(\varepsilon_m a)]^2} J_0(\varepsilon_m r) \quad (10)$$

なお, J_0 は0次のBessel関数, ε_m は $J_0(\varepsilon a) = 0$ の m 番目の正根である.

2.3 衝撃応答解析

衝撃問題に対する支配式(1)の解を, 慣性力の影響を無視した静荷重(式(7), (10))による解 $u^s(\mathbf{x})$ (静的解)と慣性力の影響を考慮した解(擾乱解) $u^D(\mathbf{x}, t)$ の和としてつぎのように与える.

$$u(\mathbf{x}, t) = f(t)u^s(\mathbf{x}) + u^D(\mathbf{x}, t) \quad (11)$$

ここに, $\mathbf{x}$ は各座標系での位置ベクトルである.

静的解 $u^s(\mathbf{x})$ は, 式(1)より慣性項を除いた静的問題の解であり次式を満足する.

$$\mu \nabla^2 u^s + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot u^s) = 0 \quad (12)$$

本式は矩形板に対してはGalerkinベクトル[10], 円板に対してはLoveの応力関数[8, 10]による取扱いが可能であり, 容易に静的解が求められるがその詳細は省略する.

一方, 擾乱解 $u^D(\mathbf{x}, t)$ は未定の時間関数 $Q^{(p)}(t)$ と固有関数 $\phi^{(p)}(\mathbf{x})$ (モード関数)より成る級数:

$$u^D(\mathbf{x}, t) = \sum_{p=1}^{\infty} Q^{(p)}(t) \phi^{(p)}(\mathbf{x}) \quad (13)$$

に置くことができ, 固有関数は次の自由振動方程式および直交条件を満足する.

$$\mu \nabla^2 \phi^{(p)} + (\lambda + \mu) \nabla(\nabla \cdot \phi^{(p)}) = -\rho(\omega^{(p)})^2 \phi^{(p)} \quad (14)$$

$$\int_V \phi^{(p)} \phi^{(q)} dV = \delta_{pq} N_p^2 \quad (15)$$

以上において、 $\omega^{(p)}$ は p 次の固有円振動数、 δ_{pq} はKroneckerのデルタ、 N_p はノルムであり、積分は物体全体(V)に行う。式(14)より求められる円板の固有関数は文献[1]に、矩形板の固有関数は文献[3, 11]に示されているので詳細は省略する。

式(11)、式(13)を式(1)に代入し、式(12)、式(14)を利用すると次式が得られる。

$$\sum_{p=1}^{\infty} [\ddot{Q}^{(p)}(t) + (\omega^{(p)})^2 Q^{(p)}(t)] \phi^{(p)}(\mathbf{x}) = -\ddot{f}(t) u^s(\mathbf{x}) \quad (16)$$

上式の両辺に $\phi^{(q)}(\mathbf{x})$ を掛け、物体全体に積分し、固有関数の直交性を利用すると、 $Q^{(p)}(t)$ に関する次の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}^{(p)}(t) + (\omega^{(p)})^2 Q^{(p)}(t) = Z_p \ddot{f}(t) \quad (17)$$

ここに、係数 Z_p は、

$$Z_p = -\frac{1}{N_p^2} \int_V u^s(\mathbf{x}) \phi^{(p)}(\mathbf{x}) dV \quad (18)$$

式(17)の解は、周知のように次のように与えられる。

$$Q^{(p)}(t) = Q^{(p)}(0) \cos(\omega^{(p)} t) + \frac{1}{\omega^{(p)}} \dot{Q}^{(p)}(0) \sin(\omega^{(p)} t) + \frac{Z_p}{\omega^{(p)}} \int_0^t \ddot{f}(\tau) \sin[\omega^{(p)}(t-\tau)] d\tau \quad (19)$$

積分定数 $Q^{(p)}(0)$ 、 $\dot{Q}^{(p)}(0)$ は次のように決定できる。いま、衝撃を受ける前は静止しているものとすれば、

$$u(\mathbf{x}, 0) = \dot{u}(\mathbf{x}, 0) = 0 \quad (20)$$

ゆえに、式(11)より、

$$u^p(\mathbf{x}, 0) = -f(0) u^s(\mathbf{x}), \quad \dot{u}^p(\mathbf{x}, 0) = -\dot{f}(0) u^s(\mathbf{x}) \quad (21)$$

上式の左辺に式(3)を代入した後両辺に $\phi^{(p)}(\mathbf{x})$ を掛け積分し、固有関数の直交性を利用すれば、

$$Q^{(p)}(0) = -Z_p f(0), \quad \dot{Q}^{(p)}(0) = -Z_p \dot{f}(0) \quad (22)$$

3. 数値計算例

荷重が時間に関してステップ状に作用する場合 ($f(t) = H(t)$: ステップ関数) を取り扱う。正方形板、円板ともに板厚比 $h/2a = 1/5$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ とし、載荷幅比 b/a は周面境界の影響が応答にできるだけ早く出るように大きく取り、 $b/a = 0.6, 0.8, 1$ の3ケースを考え、数値計算を全て倍精度で行った。本衝撃応答計算で使用した級数の項数は、擾乱解の収束性の検討より円板では $m=100, n=1000$ (m, n はそれぞれ r, z 方向の波数)、正方形板では $m=n=100, l=500$ (m, n, l はそれぞれ x, y, z 方向の波数) とした。また、時間は無次元時間 τ ($=c_1 t/h$: c_1 は縦波の速度であり、 $c_1 = \sqrt{2G(1-\nu)/(1-2\nu)\rho}$) で取り扱い、縦波が板厚 h を進むのに要する時間を1としている。なお、周面境界の影響が出ない無限板の応答計算が比較検討上必要であるが、無限板を円柱座標系で取り扱う場合、0次のHankel変換により解はBessel関数を含む無限積分形で与えられる。そこで本研究では数値計算の便宜上、対象円板の5倍の半径を持つ円板 ($h/2a = 1/20$) の応答計算結果を比較の対象とした(以後これを比較円板と言う)。また、本研究の主眼が正方形板の応力波伝播特性を調べるものではないので、検討する応答は、板中央(正方形板: $x=y=z=0$, 円板: $r=z=0$) での応力 σ_z のみとした。

図2は応力 σ_z の応答曲線であり、時間刻みを $\Delta\tau = 0.02$ として描いている。図中①の矢印を付した箇所は荷重端[正方形板: ($x=\pm b, y=0$), ($x=0, y=\pm b$), 円板: $r=b$]より発生した縦波が境界面で反射され最初に着目点に到達した縦波を示しており、この反射縦波が到達するまでは正方形板、円板の応答は比較円板の応答とまったく変わらない。ただし、 $b/a=1$ の場合は荷重端から縦波が直接到着し、 $b/a=0.6, 0.8$

の場合に対応する反射点はそれぞれ、 $z = \pm 6h/7$ 、 $z = \pm 11h/12$ である。円板の場合、その幾何形状の故に境界全周から反射波が同時に着目点に到達し応答に影響を及ぼす。一方、正方形板の場合、円板周面と同じ地点は各面の中央線上のみであり、これより板のコーナー部に近づくにつれ面上の位置は荷重端からの距離が大きくなる。従って、荷重端から発生した応力波は各面中央線上より周面に沿う地点に次々に到達しそこで反射されることになるので、その影響は円板よりも遅れて現れることになる。このため正方形板と円板の応答に差異が生じていることが図からも分かる。②の矢印を付した箇所は正方形板のコーナー部からの反射縦波の到達を示している（反射点は載荷幅比 $b/a = 0.6, 0.8, 1$ に対しそれぞれ $z = \pm 0.317h, \pm 0.349h, \pm 0.387h$ である）。図からは不連続な応答が生じているように見えるが実際には乱れをほとんど生じていない。

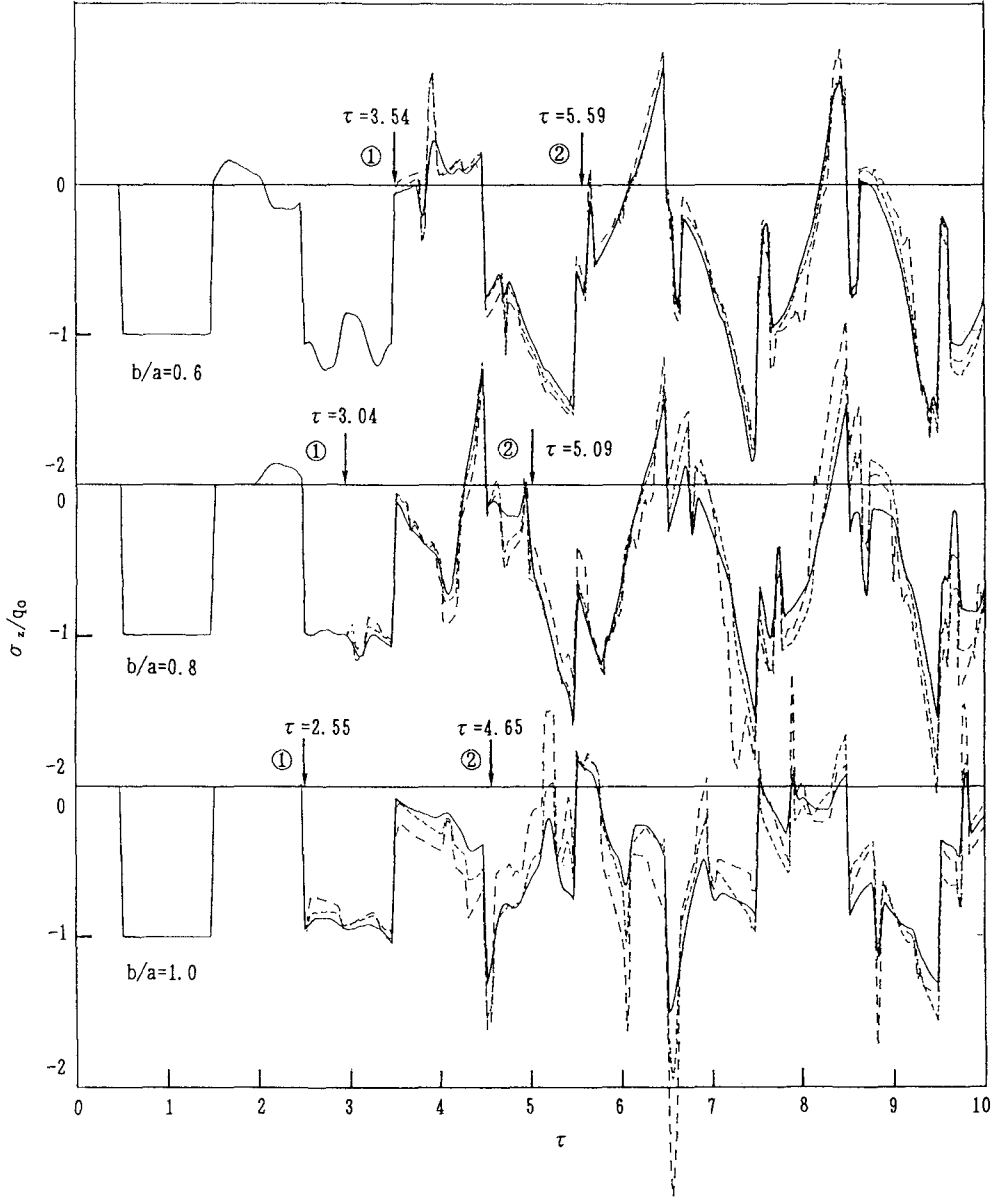


図2 板中央点の応力 σ_z の応答曲線（—— 比較円板，---- 円板，···· 正方形板）

①以後の応答は、正方形板、円板ともに板上下面で反射を繰り返す応力波と周面からの反射縦波・横波が不連続な応答を生じさせている。図に現れる何れの不連続な応答も波線理論[12]を用いればその応力波の種類と伝播経路を判定できるが、ここに示した初期応答ではおおむね文献1に記した応答に沿っている。

なお、本文で取り扱った正方形板と円板の周面境界条件が若干違っている事はすでに述べた。この境界条件の相違による応答の違いは予想されることではあるが、本研究では解析上の都合により示し得なかった。

4. おわりに

応力波の伝播特性に及ぼす有限体の境界の影響を調べるため、円形荷重を受ける円板および正方形板を対象に動弾性論に基づく解析を行い、よく知られた事実ではあるが、衝撃を受けた後の応力変動は境界からの反射波の到達までは物体の形状、境界条件に影響されないことを数値的に示した。

謝 辞

査読者の方々から貴重なご意見を頂いたことを感謝します。

参考文献

- 1) 小林治俊, 園田恵一郎, 山本 新, 中岡健一: 衝撃荷重を受ける厚円盤の応力波伝播解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 14, pp. 275-280, 1990.
- 2) Reismann, H.: On the Forced Motions of Elastic Solids, Applied Scientific Research, Vol. 18, pp. 156-165, 1967.
- 3) Lee, Y. C. and Reismann, H.: Dynamics of Rectangular Plates, International Journal of Engineering Sciences, Vol. 7, pp. 93-113, 1969.
- 4) 小林治俊, 奥田東吾, 園田恵一郎: 衝撃荷重を受ける単純支持はりの応力波伝播解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 1505-1514, 1992.
- 5) 小林治俊, 園田恵一郎, 鹿島光洋: 単純支持された鋼・コンクリート合成梁の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 1489-1496, 1992.
- 6) 小林治俊, 園田恵一郎, 石丸和宏: 鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp. 1497-1504, 1992.
- 7) Kobayashi, H., Sonoda, K. and Ishimaru, K.: Three Dimensional Impact Response Analysis of Axisymmetric Sandwich Circular Plates, Proceedings of the Third Pan American Congress of Applied Mechanics, Sao Paulo, Brazil, Jan. 1993 (to appear).
- 8) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, p. 113, 1959.
- 9) Hutchinson, J. R.: Axisymmetric Flexural Vibrations of A Thick Free Circular Plate, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 139-144, 1979.
- 10) Westergaard, H. M.: Theory of Elasticity and Plasticity, Dover Publications, New York, Chapter VI, 1964.
- 11) 山中和明: 弾性厚板の三次元動的解析に関する一研究, 大阪市立大学工学部修士論文, 1986年3月.
- 12) 佐藤泰夫: 弾性波動論, 岩波書店, 1978.

(1992年9月21日受付)