

合成二層板の合成度に関する
実用的評価式についてPRACTICAL EVALUATIONS ON COMPOSITE DEGREE
OF TWO-LAYERED COMPOSITE PLATES

佐藤 浩一*

By Koichi SATO

This paper offers a set of practical evaluations on composite degree designed to enable static and buckling analyses of partial composite plates consisting of two thin bonded layers of isotropic materials. Partial composite plates described in this paper signify simply supported rectangular and circular composite plates containing simply supported composite girders. Composite degree of two-layered composite plates is defined by α . $\alpha=1$ signifies complete composite plates. $0<\alpha<1$ signifies partial composite plates. $\alpha=0$ signifies individual plates that do not interact. The paper also analyzes the relationship of lateral deflections and critical loads among complete composite plates, partial composite plates and individual plates that do not interact by practical evaluations on composite degree defined by α .

1. まえがき

現在用いられている鋼とコンクリートとの合成構造物の設計ガイドラインとして、最近、文献¹⁾が出版され、異種材料を合成し複合構造物として設計することが今後益々重要になるものと思われる。

例えば、橋梁における合成構造物の一つに鋼桁とコンクリート床版とを頭つきスタッドジベルで完全に剛に一体として結合した合成桁(完全合成桁)があるが、実際の合成桁は完全合成桁と重ね梁の中間の挙動を示す不完全合成桁である。これらについては多くの研究がなされている²⁾⁻¹²⁾。しかしながら、合成度を評価する簡易な式に関してはあまり発表されていないようである。

一方、CS橋¹³⁾のように鋼板とコンクリート床版とを用い頭つきスタッドジベルで一体として結合した合成板においても上述の不完全合成桁と同じように不完全合成板となり、完全合成板と重ね板との中間の挙動を示すはずである。頭つきスタッドジベルの変形を考慮した合成板の面外荷重による解析理論として文献¹⁴⁾があるが、この理論では鋼板厚はコンクリート板厚に比較して非常に小さいとし、断面諸元の算定においてある部分で鋼板厚を零としている。文献^{15), 16), 17), 18)}は鋼板厚をも考慮した解析理論を誘導し、文献¹⁴⁾を包含していることを示し、文献¹⁴⁾との差異を比較検討している。また、有限要素法を用いて不完全合成板の解析をした研究も報告されている¹⁹⁾。

本論文では、鋼板とコンクリート床版からなる合成板に限定せず、等方性材料であり、弾性係数、 ρ

* 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

アソン比、板厚等の異なる二枚の板を接着剤で合成した合成板（二層板）を考える。ただし、一枚ごとの板厚は一定とする。合成桁において離散的に配置された頭つきスタッドジベルの変形を考慮する場合はこの離散的配置をならして同じ強さの連続的配置に置換して解析しているので⁶⁾、頭つきスタッドジベルの代わりに連続的配置の接着剤を用いることができるものとする。従って、接着が完全に剛であるならば、完全合成二層板と考えることができる。ここでは接着は完全に剛でなく接着剤の変形を考慮した場合の合成二層板について考える（以下、不完全合成二層板という）。このような考えに基づいた不完全合成二層板の解析例として長方形板と正方形板の全体座屈解析がなされているが^{2,8)}、不完全合成二層円板の全体座屈解析例は示されていない。一枚ごとの板厚が等厚である場合の不完全合成二層円板の全体座屈解析は、直交座標を極座標に変換して解析すれば可能である。

以上のように、これら長方形板、正方形板、円板、桁など合成構造物の静的解析および全体座屈解析が個々に行われており、合成度を用いて系統的に評価する式が示されていない。即ち、このような不完全合成二層板（不完全合成桁を含む）の合成度に関する簡単な実用的評価式とその適用についての研究はあまりなされていないようである。

そこで、本論文は全周辺単純支持の長方形板、正方形板および円板、また、長方形板の特別の場合としての桁の合成度に関する非常に簡単な代数式で表示される実用的評価式を誘導し、式中で定数を入れ換えるだけで、系統的に上述の構造物の静的解析および全体座屈解析とが同時にできることを示すものである。また、定数を比較するだけで上述の構造物の合成度の大小が判定できることを示すものである。この二点が本論文の主な目的である。具体的には、構造物の静的解析および全体座屈解析ごとに無次元量として α , β , γ なるパラメータを示し、これらのパラメータは両解析において同一になることを示すものであり、数値解析により不完全合成二層板（不完全合成桁を含む）の特性を示す。即ち、無次元量の $\alpha = 1$ の場合が完全合成二層板であり、 $0 < \alpha < 1$ の場合が不完全合成二層板であり、 $\alpha = 0$ の場合が重ね二層板であることを示すものである。数値解析にはパソコンで十分である。また、新しい型のジベルを用いた合成床版の合成度の評価²¹⁾に文献¹⁵⁾を適用している。この文献¹⁵⁾を更に利用しやすい代数式で表示したものが、本論文の合成度に関する実用的評価式である。本論文の解析内容は過去に著者が発表したものであり、形状の異なる板に拡張適用したものが大半であり新規性はないが、将来、新素材を用いた不完全合成板の解析の場合にも本論文の実用的評価式は適用できるものと思われる。

2. 本論文で用いる主な記号

図-1、2 は本解析で用いる第1板と第2板とが接着剤で合成された長方形板（合成二層板）を示している。また、本論文で用いる主な記号は次の通りである。

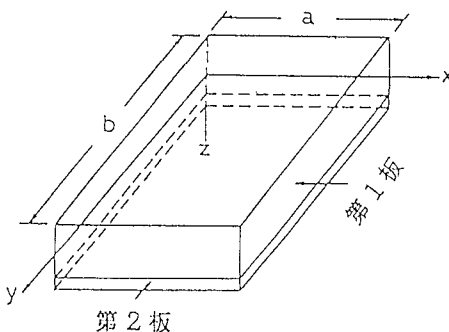


図-1 合成二層板の座標

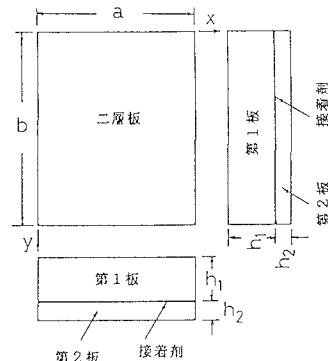


図-2 合成二層板

A_1 = 第1板の単位幅あたりの断面積、 A_2 = 第2板の単位幅あたりの断面積、 $A_v = A_2 + A_1/\bar{n}$ = 第2板に換算した単位幅あたりの合成断面積、 $D_v = \bar{E}_2 I_v$ = 完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性、 E_1 = 第1板のヤング率、 E_2 = 第2板のヤング率、 $\bar{E}_1 = E_1/(1-\nu_1^2)$ 、 $\bar{E}_2 = E_2/(1-\nu_2^2)$ 、 h_1 = 第1板の板厚、 h_2 = 第2板の板厚、 I_1 = 第1板のその重心Cに関する単位幅あたりの断面二次モーメント、 I_2 = 第2板のその重心Sに関する単位幅あたりの断面二次モーメント、 $I_v = I_2 + I_1/\bar{n} + A_v s_1 s_2$ = 第2板に換算した合成断面の単位幅あたりの断面二次モーメント、 K = 単位長さあたりの接着剤のばね定数 ($K=0$ の場合は重ね二層板、 $0 < K < \infty$ の場合は不完全合成二層板、 $K=\infty$ の場合は完全合成二層板)、 $\bar{n} = \bar{E}_2/\bar{E}_1^{1/4}$ 、 $M_{vx}(x,y)$ = 完全合成二層板の単位幅あたりのx方向の曲げモーメント、 $M_{vy}(x,y)$ = 完全合成二層板の単位幅あたりのy方向の曲げモーメント、 $p_z(x,y)$ = 荷重強度、 s = 第1板の重心Cと第2板の重心Sとの距離、 $s_1 = A_2/A_v \times s$ = 合成断面の中立軸Vと第1板の重心Cとの距離、 $s_2 = A_1/(\bar{n} A_v) \times s$ = 合成断面の中立軸Vと第2板の重心Sとの距離、 $w_v(x,y)$ = 完全合成二層板のたわみ、 $w_{ve}(x,y)$ = 不完全合成二層板のたわみ、 α, β, γ = 無次元量パラメータ、 ν = 合成板のポアソン比、 ν_1 = 第1板の単板としてのポアソン比、 ν_2 = 第2板の単板としてのポアソン比。

3. 不完全合成二層平板の面外荷重による解析理論 (偏微分方程式)

本解析理論では次の5つの仮定を用いる。

- (1) 第1板と第2板の応力とひずみ関係は線形である。(2) 接着剤に作用する力と変位は線形である。
- (3) 接着剤は均等に塗布されているものとする。(4) 第1板と第2板のz方向の変位は同じである。
- (5) 接着剤の厚さは無視する。ここでは、文献⁷⁾にある不完全合成桁の場合の誘導方法を不完全合成二層板に適用していくものである。詳細は省略するが、誘導などは文献^{17), 18), 20), 22)}などを参照されたし。以降、重要な式のみを簡単に示す。完全合成二層板のたわみを $w_v(x,y)$ とし、完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性を D_v とすれば^{23), 24)}、

$$\nabla^2 \nabla^2 w_v(x,y) = \frac{p_z(x,y)}{D_v} \quad (1)$$

ここで $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ (直交座標における Laplace 演算子) (2)

また、曲げモーメント $M_{vx}(x,y)$, $M_{vy}(x,y)$ は

$$M_{vx}(x,y) = -D_v \left(\frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial y^2} \right) \quad (3)$$

$$M_{vy}(x,y) = -D_v \left(\frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial x^2} \right) \quad (4)$$

となる。接着剤のばね定数 K は Newmark²⁾ による押し抜きせん断試験により求めるものとし

$$\kappa^2 = K \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \frac{\bar{n}}{\bar{E}_2 A_1} \frac{s}{s_1} \quad (5)$$

とおく^{17), 18)}。この κ は本論文の目的である静的および全体座屈の系統的解析における合成度を評価するために重要なパラメータの一つである。不完全合成二層板(接着剤の弾性変形を考慮した場合の合成二層板)のたわみ $w_{ve}(x,y)$ で整理すれば、

$$D_v \nabla^2 \nabla^2 w_{ve}(x,y) - D_v \kappa^2 \nabla^2 w_{ve}(x,y) = -\kappa^2 D_v \nabla^2 w_v(x,y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x,y) \quad (6)$$

となる。また、式(6)に ∇^2 を施せば

$$D_v \nabla^6 w_{ve}(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^4 w_{ve}(x, y) = -\kappa^2 p_z(x, y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \nabla^2 p_z(x, y) \quad (7)$$

となる。式(6)あるいは式(7)が不完全合成二層板のたわみに関する偏微分方程式である。ここで、不完全合成桁の場合の文献⁷⁾の考え方を適用する。完全合成二層板の場合のたわみが $w_v(x, y)$ であり、接着剤の変形を考慮した場合のたわみが $w_{ve}(x, y)$ であり、 $w_{ve}(x, y)$ と $w_v(x, y)$ との差を $w_e(x, y)$ とすれば、 $w_v(x, y)$ に関しては式(1)、即ち、式(9)が成立する。また、 $w_e(x, y)$ に関しては式(6)と式(1)との差より、

$$D_v \nabla^4 w_e(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x, y) \quad (8)$$

となる。結局、式(6)は次の2個の偏微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla^4 w_v(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_v} \\ \nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_e} \end{array} \right. \quad (9)$$

$$\quad (10)$$

$$\text{ただし、} \quad D_v = \bar{E}_2 I_v, \quad D_e = D_v \frac{\bar{n} I_2 + I_1}{A_1 s_1 s}, \quad (11)$$

$$\bar{E}_2 = E_2 / (1 - \nu_2^2), \quad \bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_1^2), \quad \bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1,$$

$$I_v = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_2 s_2 s = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_1 s_1 s / \bar{n} = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_v s_1 s_2$$

式(11)の D_v は文献²⁵⁾の p.5 および文献²⁴⁾の p.391 にある二層板の場合の D_v と一致することを確認してある。式(10)は面外荷重($p_z(x, y)$)が作用する他に面内荷重(引張力)に相当する $D_e \cdot \kappa^2$ が合成断面の中立面に作用する平板に対する基礎偏微分方程式と同形である。

なお、本解析理論と文献¹⁴⁾との断面諸元の算定には次のような差異があるようである¹⁷⁾。文献¹⁴⁾では、第1板厚 h_1 に比べて、第2板厚 h_2 は非常に小さいとしている。即ち、 $A_v \rightarrow A_1 / \bar{n}$, $s \rightarrow 0.5 \times h_1$, $s_1 \rightarrow 0$, $s_2 \rightarrow s \rightarrow 0.5 \times h_1$, $I_2 \rightarrow 0$, $I_v \rightarrow I_1 / \bar{n} + h_2 \times 0.5 h_1 \times 0.5 h_1$ とし、

$$C_0 = \frac{\bar{E}_2 A_2}{\bar{E}_1 A_1} = \frac{\bar{E}_2 h_2}{\bar{E}_1 h_1} = \bar{n} \frac{h_2}{h_1} \quad (12)$$

とにおいて、 $D_v \rightarrow \bar{E}_2 I_v$ としている。即ち、 $D_v \rightarrow \bar{E}_1 I_1 (1 + 3C_0)$ としている。具体的には

$$D_v = \frac{\bar{E}_1 h_1^3}{12} (1 + 3C_0) \quad (13)$$

としている。このように文献¹⁴⁾では、 A_v , s , s_1 , s_2 , I_2 , I_v , D_v の算定において、第2板厚 h_2 を省略している。ただし、 A_2 だけは考慮しているようである。なお、文献¹⁴⁾の断面諸元は著者が文献¹⁴⁾より推察したものである。文献^{17), 18)}に差異を詳細に比較している。

4. 不完全合成二層円板の面外荷重による解析理論 (常微分方程式)

平板のたわみ問題は一般的には2個の独立変数 x と y に関する二次元問題であるが、円板に軸対荷重が作用し、また円板の支持方法も軸対称である場合には、1個の独立変数 r に関する一次元問題とな

り、桁の場合と同様に簡単に解ける。円板を解析する場合、式(1)の支配方程式を図-3に示すように極座標で表示すれば、便利である。式(1)から式(10)までの Laplace 演算子 ∇^2 を Laplace 演算子 ∇_r^2 に、直交座標(x,y)を極座標(r, ϕ)に置換すればよい。軸対称の場合は $\phi = 0$ とすればよい。従って、式(2)の Laplace 演算子は

$$\nabla_r^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \quad (14)$$

となる^{23), 24)}。また、式(9), (10)を極座標(r)で表示すれば

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) = \frac{p_z(r)}{D_v} \\ \nabla_r^4 w_e(r) - \kappa^2 \nabla_r^2 w_e(r) = \frac{p_z(r)}{D_e} \end{array} \right. \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) = \frac{p_z(r)}{D_v} \\ \nabla_r^4 w_e(r) - \kappa^2 \nabla_r^2 w_e(r) = \frac{p_z(r)}{D_e} \end{array} \right. \quad (16)$$

となる。式(15), (16)が不完全合成二層円板のたわみに関する常微分方程式である。式(16)は面外荷重と面内荷重(引張力)に相当する $H(=D_e \cdot \kappa^2)$ が合成断面の中立面に作用する円板の基礎常微分方程式と同形である。

5. 不完全合成桁の面外荷重による解析理論 (常微分方程式)

式(6), (8), (9), (10), (11)において、 $\nabla^4 w_v \rightarrow w_v^{(4)} = d^4 w_v / dx^4$, $\nabla^4 w_e \rightarrow w_e^{(4)} = d^4 w_e / dx^4$, $\nabla^2 w_e \rightarrow d^2 w_e / dx^2$, $D_v \rightarrow E_s I_v$ とすれば、即ち、yに関する項およびポアソン比を零とすれば不完全合成桁の場合の常微分方程式となる^{7), 12), 17)}。従って、式(6)は次式ようになる。

$$E_s I_v \frac{d^4 w_v}{dx^4} - E_s I_v \kappa^2 \frac{d^2 w_v}{dx^2} = -\kappa^2 \cdot E_s I_v \frac{d^2 w_v}{dx^2} + \frac{n I_v}{n I_s + I_c} p \quad (17)$$

文献⁷⁾と同様に考えて、完全合成桁の場合のたわみが w_v であり、また、不完全合成桁の場合のたわみが w_v であり、 w_v と w_v との差を w_e とすれば、 w_v に関しては式(19)が成立する。また、 w_e に関しては式(17)と式(19)との差より

$$E_s I_v \frac{d^4 w_e}{dx^4} - E_s I_v \kappa^2 \frac{d^2 w_e}{dx^2} = \frac{A_c s_c s}{n I_s + I_c} p \quad (18)$$

となる。結局、式(17)は次の2個の常微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 w_v}{dx^4} = \frac{p}{E_s I_v} \\ \frac{d^4 w_e}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 w_e}{dx^2} = \frac{p}{E_s I_e} \end{array} \right. \quad (19)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^4 w_v}{dx^4} = \frac{p}{E_s I_v} \\ \frac{d^4 w_e}{dx^4} - \kappa^2 \frac{d^2 w_e}{dx^2} = \frac{p}{E_s I_e} \end{array} \right. \quad (20)$$

$$\text{ただし、} \quad I_e = I_v \frac{n I_s + I_c}{A_c s_c s}, \quad n = \frac{E_s}{E_c} \quad (21)$$

式(21)における不完全合成桁の場合の断面積 A_c の単位は長さの2乗であり、断面二次モーメント I_s, I_c, I_v, I_e の単位は長さの4乗である。また、 E_c, E_s はパーの付かないものである。

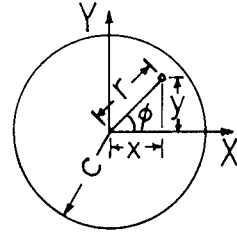


図-3 極座標

不完全合成二層板(長方形板、正方形板および円板)と不完全合成桁のたわみは、 w_v と w_e との代数和で計算される⁷⁾。従って、たわみ w_{ve} は

$$w_{ve} = w_v + w_e \hookrightarrow \frac{1}{D_v} + \frac{1}{D_e} \quad (22)$$

で求まる。 w_v は完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性 D_v に反比例するのは明らかである。また、 w_e は単位幅あたりの換算板剛性 D_e に反比例するのは明らかである。

6. 不完全合成二層長方形板と円板の座屈に関する微分方程式

前節までの荷重は静的な面外荷重である。ここでは合成二層板の中立面に作用する面内荷重の圧縮力による座屈について考察する。式(9)は単位幅あたりの換算板剛性が D_v で面外荷重($p_z(x,y)$)が作用する完全合成二層板の鉛直たわみに関する偏微分方程式である。同様に、式(10)は単位幅あたりの換算板剛性が D_e で面外荷重($p_z(x,y)$)が作用する他に面内荷重の引張力に相当する $H(=D_e \cdot \kappa^2)$ が中立面に作用する平板の鉛直たわみに関する偏微分方程式である。図-4に示すような面内荷重 p_{vex} と p_{vey} が作用する合成二層長方形板を考える。面内荷重 p_{vex} と p_{vey} を式(22)と同様に考えて、

$$\frac{1}{p_{vex}} = \frac{1}{p_{vx}} + \frac{1}{p_{ex}} \hookrightarrow \frac{1}{D_v} + \frac{1}{D_e} \quad (23)$$

$$\frac{1}{p_{vey}} = \frac{1}{p_{vy}} + \frac{1}{p_{ey}} \hookrightarrow \frac{1}{D_v} + \frac{1}{D_e} \quad (24)$$

で与えられるとする。 p_{vx} および p_{vy} は D_v に比例し、 p_{ex} および p_{ey} は D_e に比例する。従って、式(9),(10)は次のような偏微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^4 w_v(x,y) &= \frac{1}{D_v} \left[p_z(x,y) - p_{vx} \frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial x^2} - p_{vy} \frac{\partial^2 w_v(x,y)}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla^4 w_e(x,y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x,y) &= \frac{1}{D_e} \left[p_z(x,y) - p_{ex} \frac{\partial^2 w_e(x,y)}{\partial x^2} - p_{ey} \frac{\partial^2 w_e(x,y)}{\partial y^2} \right] \end{aligned} \right. \quad (26)$$

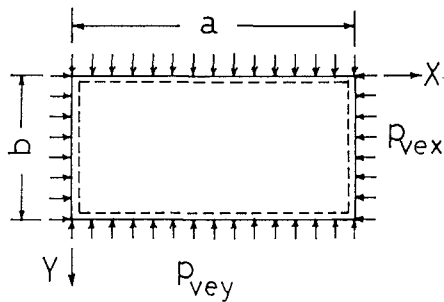


図-4 面内荷重 p_{vex} と p_{vey} が作用する全周単純支持合成二層長方形板

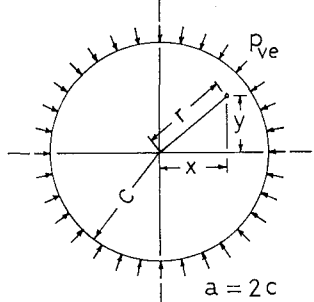


図-5 面内荷重 p_{ve} が作用する全周単純支持合成二層円板

図-5に示すような合成二層円板の中立面に作用する面内荷重の圧縮力(p_{ve})による座屈について考察する。式(15),(16)は次のような常微分方程式になる。

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_v(r) = \frac{1}{D_v} \left[p_z(r) - p_v \nabla_r^2 w_v(r) \right] \end{array} \right. \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla_r^4 w_o(r) = \frac{1}{D_o} \left[p_z(r) - (p_o - H) \nabla_r^2 w_o(r) \right] \end{array} \right. \quad (28)$$

7. 全周辺単純支持の不完全合成二層長方形板と円板の静的解析と全体座屈解析

本論文の解析内容は過去に著者が発表したものであり、形状の異なる板に拡張適用したものが大半であり、新規性はないが、ここでは全周単純支持の境界条件の場合に限定して記述する。

次のような4ケースの場合の無次元量パラメータ α_{11} , β_{11} , γ_{11} を求める。

7.1 長方形板の場合の静的解析における α_{11} , β_{11} , γ_{11}

長方形板の境界条件が四辺単純支持ならば、式(25), (26)の長方形板のたわみ曲面を次式のように仮定することができる。

$$w_v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} v_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (29)$$

$$w_o(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} o_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (30)$$

($m = 1, 2, \dots$; $n = 1, 2, \dots$)

式(25), (26)において、面外荷重 $p_z(x, y) = p_z$ (等分布満載荷重の場合)ならば、式(29), (30)の v_{mn} , o_{mn} は次のように求まる²³⁾。

$$v_{mn} = \frac{16 p_z}{D_v \pi^8 mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{p_{vx} m^2}{\pi^2 D_v a^2} - \frac{p_{vy} n^2}{\pi^2 D_v b^2} \right]} \quad (31)$$

$$o_{mn} = \frac{16 p_z}{D_o \pi^8 mn \left[\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{p_{ox} m^2}{\pi^2 D_o a^2} - \frac{p_{oy} n^2}{\pi^2 D_o b^2} + \frac{\kappa^2}{\pi^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \right]} \quad (32)$$

式(31), (32)において、 $p_{vx} = p_{vy} = 0$, $p_{ox} = p_{oy} = 0$ とおけば、静的解析の場合のたわみ曲面が求まる。また、式(31), (32)において、第1項のみをとり²⁶⁾、次のような比をとる。

$$\gamma_{11} = \frac{w_o(0.5a, 0.5b)}{w_v(0.5a, 0.5b)} = \frac{o_{11}}{v_{11}} = \frac{D_v}{D_o} \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha_{11}) \quad (33)$$

ここで、

$$\beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\pi^2 \mu_{11}^2}} = 1 - \alpha_{11} \quad (34)$$

ここで、

$$\text{長方形板の場合 } \mu_{11}^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \text{正方形板の場合 } \mu_{11}^2 = \frac{2}{a^2} \quad (35)$$

以上の説明の詳細は文献²⁶⁾を参照されたい。

7.2 円板の場合の静的解析における $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$

円板の境界条件が全周辺単純支持で、面外荷重 $p_z(r) = p_z$ (等分布満載荷重の場合) のみによる場合の円板中央点のたわみ $w_{0v}(0)$ は式(27)を解けば、次式のように簡単に求まる^{(23), (27)}。

$$w_{0v}(0) = \frac{p_z c^4}{64 D_v} \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \quad (36)$$

同様に、面外荷重 $p_z(r) = p_z$ (等分布満載荷重の場合) のみによる場合の円板中央点のたわみ $w_{0e}(0)$ は式(28)を解けば、次式のように簡単に求まる^{(23), (27)}。

$$w_{0e}(0) = \frac{p_z c^4}{64 D_e} \frac{5 + \nu}{1 + \nu} \quad (37)$$

次に、これらの解、即ち、式(36), (37)を用いれば、式(27), (28)の解 $w_v(0), w_e(0)$ は次式のように簡単に求まる^{(23), (27)}。ここで、 c は円板の半径である。

$$w_v(0) = \frac{w_{0v}(0)}{1 - \frac{p_v \cdot c^2}{4 \cdot 20 D_v}} \quad (38), \quad w_e(0) = \frac{w_{0e}(0)}{1 - \frac{(p_e - H) \cdot c^2}{4 \cdot 20 D_e}} \quad (39)$$

式(38), (39)において、 $p_v = 0, p_e = 0$ とおけば、静的解析の場合のたわみ曲面が求まる。また、次のような比をとり、式(11)を代入する。ただし、 $H = D_e \cdot \kappa^2$ である。

$$\gamma_{11} = \frac{w_e(0)}{w_v(0)} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot c^2}{4 \cdot 20}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha_{11}) \quad (40)$$

$$\text{ここで} \quad \beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot c^2}{4 \cdot 20}} = 1 - \alpha_{11} \quad (41)$$

不完全合成二層板(長方形板、正方形板および円板)のたわみは、 w_v と w_e との代数和である⁽⁷⁾。従って、たわみ w_{ve} は

$$w_{ve} = w_v + w_e = w_v \cdot (1 + \gamma_{11}) \quad (42)$$

で求まる。この γ_{11} が不完全合成二層板と考えた場合の増加分であり、完全合成二層板を基準にしている。また、 w_v は完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性 D_v に反比例するのは明らかである。

7.3 長方形板の場合の全体座屈解析における $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$

式(31)において、分母を零とする p_{vx} と p_{vy} の限界値が全体座屈荷重である。

$$\frac{(p_{vx})_{cr} \cdot m^2}{\pi^2 D_v a^2} + \frac{(p_{vy})_{cr} \cdot n^2}{\pi^2 D_v b^2} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (43)$$

$$p_{vx} = p_{vy} = p_v \text{ の場合, } (p_v)_{cr} = \pi^2 D_v \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (44)$$

また、式(32)において、分母を零とする p_{ex} と p_{ey} の限界値が全体座屈荷重である。

$$\frac{(p_{ex})_{cr} m^2}{\pi^2 D_e a^2} + \frac{(p_{ey})_{cr} n^2}{\pi^2 D_e b^2} = \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 + \frac{\kappa^2}{\pi^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (45)$$

$$p_{ex} = p_{ey} = p_e \text{ の場合、} \quad (p_e)_{cr} = \pi^2 D_e \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} + \frac{\kappa^2}{\pi^2} \right) \quad (46)$$

次のような比をとり、式(11)を代入すれば、

$$\gamma_{11} = \frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha_{11}) \quad (47)$$

$$\text{ここで、} \quad \beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\pi^2 \mu_{11}^2}} = 1 - \alpha_{11} \quad (48)$$

ここで、

$$\text{長方形板の場合} \quad \mu_{11}^2 = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}, \quad \text{正方形板の場合} \quad \mu_{11}^2 = \frac{2}{a^2} \quad (49)$$

ここで、式(47),(48),(49) と式(33),(34),(35) を比較してみれば、同一であることがわかる。

7.4 円板の場合の全体座屈解析における $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$

式(38),(39)において、分母を零とする p_v と p_e の限界値が全体座屈荷重である。これらを求めると

$$p_v = \frac{4.20 D_v}{c^2} \quad (50), \quad p_e = \frac{4.20 D_e}{c^2} + \kappa^2 \cdot D_e. \quad (51)$$

次のような比をとり、式(11)を代入すれば、直径 $a=2c$ として

$$\gamma_{11} = \frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha_{11}) \quad (52)$$

$$\text{ここで、} \quad \beta_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2 \cdot a^2}{16.80}} = 1 - \alpha_{11} \quad \text{円板の場合} \quad (53)$$

ここで、式(52),(53)と式(40),(41) を比較してみれば、同一であることがわかる。 $(p_v)_{cr}$ あるいは $(p_e)_{cr}$ は単位幅あたりの全体座屈荷重であり、 D_v あるいは D_e は単位幅あたりの換算板剛性である。全体座屈荷重は D_v あるいは D_e に比例することは明らかである。不完全合成二層板(長方形板、正方形板および円板)の全体座屈荷重 $(p_{ve})_{cr}$ は次式で求まる。

$$\frac{1}{(p_{ve})_{cr}} = \frac{1}{(p_v)_{cr}} + \frac{1}{(p_e)_{cr}} = \frac{1}{(p_v)_{cr}} \left[1 + \frac{(p_v)_{cr}}{(p_e)_{cr}} \right] \quad (54)$$

式(47),(52)の γ_{11} を式(54)の $(p_{ve})_{cr}$ に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p_{ve})_{cr}} &= \frac{1}{(p_v)_{cr}} (1 + \gamma_{11}) = \frac{1}{(p_v)_{cr}} \left(1 + \beta_{11} \cdot \frac{I_{12v}}{I_{12}} \right) \\ &= \frac{1}{(p_v)_{cr}} \cdot \frac{(I_{12} + \beta_{11} \cdot I_{12v})}{I_{12}} \end{aligned} \quad (55)$$

$$\text{ここで、} I_v = I_{12} + I_{12v} ; I_{12} = I_2 + \frac{I_1}{\bar{n}} ; I_{12v} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n}} \quad (56)$$

式(54),(55)における p_v と p_{ve} の "v" と "ve" はそれぞれ完全合成二層板および不完全合成二層板を意味している。以上より、長方形板、正方形板および円板の合成度 α_{11} は簡単な代数式で表示できることがわかる。一方、不完全合成桁のこれらのパラメータは、式(19),(20)をフーリエ級数で展開すれば、同様に求めることができる。結果のみを示せば次のとおりである。

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\pi^2}{\kappa^2 \cdot a^2}} = 1 - \beta_{11} \quad (57)$$

ただし、 a をスパン長とする。

以上をまとめると、長方形板、正方形板、円板および桁の合成度 α_{11} は次式の定数だけが異なるが、全く同一の式になる。定数は表-1のようである。

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\text{定数}}{\kappa^2 \cdot a^2}} = 1 - \beta_{11} \quad (58)$$

表-1 式(58)における定数

	長方形板	正方形板	円板	桁
定数	$(1 + \frac{a^2}{b^2}) \cdot \pi^2$	$2\pi^2$	16.80	π^2

式(58)と表-1の定数を用いれば、合成度 $\alpha_{11} (= 1 - \beta_{11})$ を簡単に求めることができる。この定数が小さい方が合成度が大きいことがわかる。この β_{11} に D_v/D_o を乗ずれば γ_{11} が求まる。次に、完全合成二層板あるいは完全合成桁における たわみ (w_v) および全体座屈荷重 ($(p_v)_{cr}$) を求めておく。これらの値は完全合成二層板の単位幅あたりの換算板剛性 D_v を式(11)で求めておきさえすれば、公式集⁵⁾、設計便覧^{2,7)} やその他の参考書(例えば文献^{2,3), 28)}) などを利用すれば簡単に求めることができる。次に、 $(1 + \gamma_{11})$ を計算する。不完全合成二層板(長方形板、正方形板、円板あるいは桁)のたわみ w_{ve} は式(42)より次式で求まる。

$$w_{ve} = w_v \cdot (1 + \gamma_{11}) \quad (59)$$

不完全合成二層板(長方形板、正方形板、円板あるいは桁)の全体座屈荷重 $(p_{ve})_{cr}$ は式(55)より次式で求まる。

$$(p_{ve})_{cr} = (p_v)_{cr} / (1 + \gamma_{11}) \quad (60)$$

8. 全周辺単純支持の不完全合成二層板の静的および全体座屈特性

合成二層板は式(58)で定義される α_{11} (あるいは β_{11}) の値によって、大きく次の3つに分類される。

- 1) $\beta_{11} = 0$, 即ち, $\alpha_{11} = 1$, $\gamma_{11} = 0$, の場合は完全合成二層板である。
- 2) $0 < \beta_{11} < 1$, 即ち, $\alpha_{11} = 1 - \beta_{11}$, $\gamma_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$, の場合は不完全合成二層板である。
- 3) $\beta_{11} = 1$, 即ち, $\alpha_{11} = 0$, $\gamma_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は重ね二層板である。

長方形板および正方形板の場合において、縦軸に α_{11} をとり、横軸に κa をとり図化したものが文献

15), 17), 18), 26) などに示されているので、ここでは省略する。また、不完全合成桁の場合において、同様に図化したものが文献^{15), 17)}に示されているので、ここでは省略する。もし、これらの図が手元になければ、次に示す手順で解析できる。その手順を数値計算例によって説明しよう。材料は特に指定しないが、ここでは計算上、第1板はコンクリート板と第2板は鋼板と考える。不完全合成二層板の一般的な諸元は次のようであるとする(図-1、2参照)。円板の直径は $a=3\text{ m}$ とする。円板と比較するために長方形板の大きさは $a \times b=3\text{ m} \times 3\text{ m}$ の正方形板とする。次に、コンクリートのヤング率は $E_1=3.0 \times 10^6\text{ ton/m}^2$ 、鋼のヤング率は $E_2=2.1 \times 10^7\text{ ton/m}^2$ 、式(56)において $I_{12}=1.42859 \times 10^{-6}\text{ m}^4/\text{m}$ 、 $I_{12v}=2.49396 \times 10^{-6}\text{ m}^4/\text{m}$ 、 $I_v=3.92255 \times 10^{-6}\text{ m}^4/\text{m}$ 、接着剤のばね定数は $K=8660\text{ ton/m/m}$ (この値は文献¹⁰⁾の p.67 に記載されている $\phi-13$ のスタッドジベルのばね定数の平均値 135ton/cm/本 を 130 ton/cm/本 とし、 15 cm 間隔で配置したものとして 86600 ton/m/m とし、仮にその 10 分の 1 とした)、コンクリート厚は $h_1=0.05\text{ m}$ 、鋼板厚は $h_2=0.006\text{ m}$ 、 $\bar{n}=7.385$ 、合成二層板のポアソン比は $\nu=0.3$ (仮定する)、コンクリート板のポアソン比は $\nu_1=0.2$ 、鋼板のポアソン比は $\nu_2=0.3$ 、コンクリート板の重心と鋼板の重心との距離は $s=0.028\text{ m}$ 、合成断面の中立軸とコンクリート板の重心との距離は $s_1=0.013155\text{ m}$ 、合成断面の中立軸と鋼板の重心との距離は $s_2=0.014845\text{ m}$ 、コンクリート板の単位幅あたりの断面積は $A_1=0.05\text{ m}^2/\text{m}$ 、鋼板の単位幅あたりの断面積は $A_2=0.006\text{ m}^2/\text{m}$ 、合成断面の単位幅あたりの断面積は $A_v=0.0127708\text{ m}^2/\text{m}$ 、合成断面の単位幅あたりの換算板剛性は $D_v=90.5205\text{ ton}\cdot\text{m}^2/\text{m}$ とする。

これらの諸元を用いれば、完全合成二層正方形板の場合は式(5)を用いて、 $\kappa=5.69/\text{m}$ 、 $\kappa a=17.07$ と求まり、次に式(58)と表-1の正方形の場合の定数 $2\pi^2$ を用いて、 $\alpha_{11}=0.9366$ 、 $\beta_{11}=0.0634$ 、 $\gamma_{11}=0.1107$ 、および $(1+\gamma_{11})=1.1107$ と求まる。一方、完全合成二層円板の場合は全く同様にして式(5)を用いて、 $\kappa=5.69/\text{m}$ 、 $\kappa a=17.07$ と求まり、次に表-1の円板の場合の定数 16.80 を用いて、 $\alpha_{11}=0.9455$ 、 $\beta_{11}=0.0545$ 、 $\gamma_{11}=0.0951$ 、および $(1+\gamma_{11})=1.0951$ と求まる。また、前述のように円板の場合の合成度 α_{11} が正方形板の場合の合成 α_{11} よりわずかではあるが大きいことがわかる。完全合成二層正方形板の中央点のたわみは $p_z=10\text{ ton/m/m}$ として文献⁵⁾より 3.6330 cm と求まる。従って、不完全合成二層正方形板の中央点のたわみは $3.6330 \times 1.1107=4.0352\text{ cm}$ と求まる。完全合成二層円板の中央点のたわみは $p_z=10\text{ ton/m/m}$ として文献⁵⁾より 3.5626 cm と求まる。従って、不完全合成二層円板の中央点のたわみは $3.5626 \times 1.0951=3.9014\text{ cm}$ と求まる。また、完全合成二層正方形板の全体座屈荷重は文献²³⁾より 198.53 ton/m と求まる。従って、不完全合成二層正方形板の全体座屈荷重は $198.53/1.1107=178.74\text{ ton/m}$ と求まる。完全合成二層円板の全体座屈荷重は文献²³⁾より 168.97 ton/m と求まる。従って、不完全合成二層円板の全体座屈荷重は $168.97/1.0951=154.30\text{ ton/m}$ と求まる。

以上の数値計算例からもわかるように、パソコンと公式集などがあれば簡単に計算できる本提案の方法は実用上のたわみおよび全体座屈荷重を求める場合に便利である。

9. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- (1) 本論文は全周単純支持の不完全合成二層板(接着剤の弾性変形を考慮した二層板)の合成度に関する実用的評価式を求め、静的解析および全体座屈解析を評価式を用いて系統的に行う手法を示したものである。
- (2) 本論文は全周単純支持の長方形板、正方形板および円板の静的解析および全体座屈解析を系統的に行うために α_{11} 、 β_{11} 、 γ_{11} なる無次元量を導入し、完全合成二層板、不完全合成二層板、重ね二層板のたわみおよび全体座屈荷重の相互関係を明らかにした。

$\beta_{11}=0$, 即ち, $\alpha_{11}=1$, $\gamma_{11}=0$, の場合は完全合成二層板である。

$0<\beta_{11}<1$, 即ち, $\alpha_{11}=1-\beta_{11}$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$, の場合は不完全合成二層板である。

$\beta_{11}=1$, 即ち, $\alpha_{11}=0$, $\gamma_{11}=\frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は重ね二層板である。

ここで, α_{11} は合成二層板の合成度を意味し, $\beta_{11}=1-\alpha_{11}$ を意味し, γ_{11} は完全合成二層板を基準にした場合の増加分を意味している。

- (3) 上述の $\alpha_{11}, \beta_{11}, \gamma_{11}$ なる無次元量を用いれば, 長方形板, 正方形板, 円板, 桁の合成度は次式で示すような定数だけが異なる全く同一な簡単な代数式で表示できることが判明した。定数は表-1 のようである。

$$\alpha_{11} = \frac{1}{1 + \frac{\text{定数}}{\kappa^2 \cdot a^2}} = 1 - \beta_{11}$$

また, この表における定数が小さい方が合成度が大きいことが判明した。例えば, 円板は正方形板より合成度が大きい。他の例として, 文献^[7]の図-5と図-6を比較してみれば, 図-5(不完全合成桁の合成度 α_{11} を意味している)の α 曲線が図-6の α 曲線の上に位置することはこの事項を意味している。ただし, 不完全合成桁の場合は a はスパン長とする。

更に, これらのパラメータは静的解析および全体座屈解析で同一であることも判明した。

- (4) 文献^{[7], [18], [20], [22], [26]}などに図示されている桁および長方形板の α 曲線(フーリエ級数の有限項の和の比をとる)は本論文の式(58)(フーリエ級数の第一項のみをとる)で求めたものとほとんど重なる。換言すれば文献に図示されている α 曲線は本論文の式(58)を図化したものであると解釈できる。たわみおよび全体座屈荷重は式(59)および式(60)で求めることができるので, 計算にはパソコンと公式集^[5], 設計便覧^[27]あるいは参考書(例えば, 文献^{[23], [28]})などがあれば十分可能である。
- (5) 本論文の解析内容は過去に著者が発表したものであり, 形状の異なる板に拡張適用したものが大半であり新規性はないが, 将来, 新素材を用いた不完全合成板の解析の場合にも本論文の実用的評価式は適用できるものと思われる。

謝辞

本論文の作成にあたり, 北海道大学 渡辺 昇 名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989。
- 2) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 3) 山本 稔：不完全合成桁の曲げ理論、土木学会論文集、No.67, pp.1-10, 1960年3月。
- 4) 橋 善雄・足立義雄：不完全合成桁について、土木学会論文集、No.112, pp.11-19, 1964年12月。
- 5) 構造力学公式集、土木学会編、1986。
- 6) A.ハウラネック/0.シュタインハルト：鋼橋の理論と計算(橋 善雄、小松定夫共訳)、山海堂、1965。
- 7) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973。

- 8) 浜田純夫、有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析、土木学会論文報告集、第265号、pp.1-9、1977年 9月。
- 9) 小松定夫、佐々木孝：不完全合成桁の理論と近似計算法について、土木学会論文報告集、第329号、pp.27-37、1983年 1月。
- 10) 中井 博編：プレキャスト床版合成桁橋の設計・施工、森北出版、1988。
- 11) 佐藤浩一、渡辺 昇：差分方程式の剛性マトリックス解析法について、土木学会北海道支部論文報告集、第44号、pp.87-92、1988。
- 12) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺 昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集 Vol.36A、pp.1223-1236、1990。
- 13) 渡辺 昇、井上稔康：CS橋の開発的研究－鉛直突起板の設計について、鋼パネル板のリップの設計について－、土木学会北海道支部論文報告集、第43号、pp.31-36、pp.37-42、1987。
- 14) J.L.Clarke and C.T.Morley：Steel-Concrete Composite Plates with Flexible Shear Connectors, Proc. Inst. Civ. Engrs, Vol.53, Part2, pp.557-568, Dec.,1972。
- 15) 佐藤浩一、渡辺 昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989。
- 16) 佐藤浩一、渡辺 昇、井上稔康：不完全合成板の解析理論の比較について、土木学会第44回年次学術講演会、pp.288-289、1989。
- 17) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺 昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集 Vol.36A、pp.1245-1258、1990。
- 18) Koichi SATO：Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991。
- 19) 山口惣也、浜田純夫、高海克彦：不完全合成板の有限要素解析、土木学会第47回年次学術講演会、pp.330-331、1992。
- 20) 佐藤浩一：接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板の弾性座屈荷重について、構造工学論文集 Vol.38A、pp.1309-1320、1992。
- 21) 中井 博、杉山 功、広瀬鉄夫、山本晃久：トラス型ジベルを用いた合成床版の耐力試験、土木学会第45回年次学術講演会、pp.576-577、1990。
- 22) Koichi SATO：Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992。
- 23) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger：Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1970。
- 24) Rudolph Szilard：Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974。
- 25) K.S.Pister and S.B.Dong：Elastic Bending of Layered Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 85(4), pp.1-10, 1959。
- 26) 佐藤浩一：不完全合成板の簡易計算法について、土木学会第47回年次学術講演会、pp.332-333、1992。
- 27) 関谷 壮、浜田 実、角 誠之助編：平板構造強度設計便覧、朝倉書店、1982。
- 28) S.P.Timoshenko and J.M.Gere：Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1961。

(1992年9月21日受付)