

補剛桁が連続桁形式である上路式補剛アーチの幾何学的非線形特性

GEOMETRICAL NONLINEARITY OF DECK TYPE STIFFENED ARCH
WITH CONTINUOUS STIFFENING GIRDER

大森邦雄*

By Kunio Omori

This paper describes geometrical nonlinearity of deck type stiffened arch with continuous stiffening girder. The nonlinearity of arch bridges was already examined for unstiffened arch and for both deck type and half through type stiffened arch with simple span stiffening girder. However, the study on nonlinearity of stiffened arch with continuous stiffening girder was not performed. This paper examines nonlinearity of this type by approximate equation induced analytically. Therefore this paper does not offer mathematically accurate result, but offers useful information for practical design. This paper characteristically explains nonlinearity of above-mentioned arch by only two non-dimensional parameters.

1. まえがき

長大アーチ橋では、アーチリブの変形によっていわゆる幾何学的非線形性（以下、単に非線形性という）が現れ、断面力や変位は通常の微小変位理論によって計算された値より大きくなることは、古くからよく知られている事実である。このような構造物では、構造解析は載荷による骨組線の変形を考慮に入れて行う必要があるが、道路橋示方書（以下、道示という）・鋼橋編¹⁾では、後述するような形式のアーチ橋の死活荷重による断面力は変形の影響を考慮した解析によって求めることを定めている（11.3条）。一方、最近20数年間の構造解析理論と手法に関する研究は、コンピュータの急速な進歩と相俟って著しく進歩し、現在では個々のアーチ橋についてこのような解析を行なうこと自体には、特に困難を感じることはない。しかし、いま述べたように、解析理論と手法に関する研究はこれまでに非常に多数あるにもかかわらず、アーチ橋の非線形性そのものを論じた研究は意外に少く、広範な無次元パラメータによって一般的に論じた研究となると、おそらく前田・林の研究^{2), 3), 4)}くらいではないかと思われる。この研究はアーチの面内非線形性に関し、我々設計実務者にとってきわめて有用な知見を提供してくれるほとんど唯一の成果であるが、残念ながら扱っている対象が無補剛のリブ・アーチと補剛桁が側径間を待たないタイプの上中路式補剛アーチであり、後に示す図-3. (b) のような補剛桁が連続桁形式であるタイプにはこの成果を利用することができない。しかし現実には、上中路式の補剛アーチでは、補剛桁が連続桁形式であるものの方がはるかに多いのが実状である。したがって設計実務の立場からは、このタイプの補剛アーチの非線形性の大きさやその特性に関する資料が是非必要とされるところである。上路式補剛アーチの非線形性を調べた研究としては、前田・林の他に

*（株）横河ブリッジ 本社・設計部（〒273 千葉県船橋市山野町27 横河テクノビル）

安藤・成岡の研究⁵⁾があるが、この研究でも補剛桁が連続桁形式であるタイプは扱われていない。

本論文は以上のような状況を踏まえ、以下に述べるような方法によって、補剛桁が連続桁形式である上路式補剛アーチの面内非線形性について調べ、設計実務に対し若干の資料を提供しようとするものである。現在では、変形の影響を考慮した解析を行おうとすれば、有限変位理論に基く汎用解析プログラムによるのが常識といつてよいが、構造物をアーチに限定すれば、古くから知られている解析的な手法を応用することができる。すなわち、本論文では、1937年に Dischinger によって提案された無補剛のリブ・アーチに対する釣合方程式^{6), 7)} (この種の理論は、吊橋のたわみ理論に対応させてアーチのたわみ理論といわれることがある⁸⁾) を補剛桁が連続桁形式である上路式補剛アーチに拡張し、これを解いて得られる曲げモーメントの解式をもとにして、この形式の補剛アーチの非線形性を調べる。その際、解式を無次元化することによって一般性を持たせることができ、また解式の中で非線形性を支配する無次元パラメータを明確にすることができるので、この方法は数値解析による方法よりかえって好都合な面もある。一方、この理論と解式を導く上での仮定からいって、この解式は一般の有限変位理論⁸⁾の解に比較すれば通常的设计荷重程度の大きさの荷重を受ける場合、最大限10%程度の誤差を持つことは避けられない。しかし、補剛桁が連続桁形式である上路式補剛アーチについては、これまで非線形特性を論じた研究が全く無かったことを考えると、若干厳密性に欠けるきらいはあっても、本論文で行なうことは実務上意義があると思われる。

道示・鋼橋編によれば、変形の影響を考慮して設計しなければならないアーチ橋の形式は、無補剛のリブ・アーチと上路式の補剛アーチであるが、そのうち実橋で最も多いのは補剛桁が連続桁形式である上路式補剛アーチであり、実績では大半を占める。⁹⁾ また、鋼橋におけるこのような補剛アーチでは、アーチ・リブの支承条件が固定にされることはきわめてまれであるため、本論文ではこのような支持形式のものについては考えない。

2. 解式の誘導

2.1 基本方程式

図-1に示すように、支間長が ℓ である補剛桁を持たない2-ヒンジのリブ・アーチ (以下単に2-ヒンジ・アーチ、固定アーチと言え、それぞれの支持条件に応じた補剛桁を持たないリブ・アーチをさすものとする) が等分布死荷重 w を担い、あらかじめ与えられていたキャンバー (クラウンで δf) が沈んで、軸線がライズが f であるような放物線形の計画形状を保っている状態を考える。図-2に示すように、この状態の上にさらに活荷重 $p(x)$ が載荷されたときの鉛直および水平方向の付加変位を v, u とすると、これらの付加変位と活荷重 $p(x)$ の関係は以下のように与えられる。^{6), 7)}

$$\left(E I_A \cos \varphi \frac{d^2 v}{dx^2} \right)'' + H \frac{d^2 v}{dx^2} + (Q u)'' = p(x) + H_p \frac{d^2 y}{dx^2} \quad (1. a)$$

ここに、 E はヤング係数、 I_A はアーチリブの断面2次モーメント、 φ はアーチリブの各断面の傾きを表わす接線角であり、 H_p は活荷重による付加水平反力、 H および Q はそれぞれ死活荷重による合計の水平反力と鉛直方向せん断力である。また、 $''$ は x に関する2回微分を表わす。

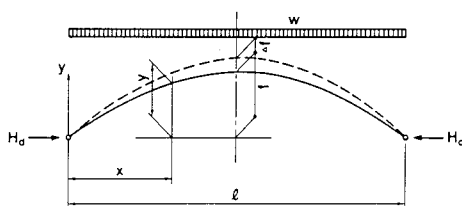


図-1 等分布死荷重を受ける2ヒンジ・アーチ

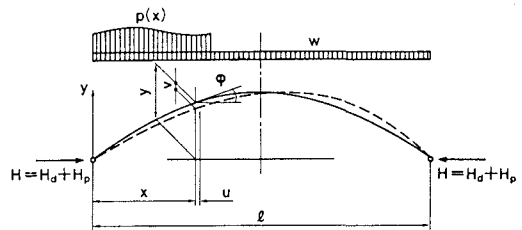


図-2 死活荷重を受ける2ヒンジ・アーチ

式 (1. a) は活荷重 $p(x)$ に関する釣合方程式であり、図-1および図-2の載荷状態における変形後の形状に対する釣合いから各々の状態の曲げモーメントを求め、これらの差をとることによって、活荷重による図-1の状態からの曲げモーメントの増分 M_p 。(以下、単に活荷重曲げモーメントという)は

$$M_p = M_p^0 - H_p y + H v + Q u \quad (2)$$

で与えられるので、活荷重曲げモーメント M_p と付加変位 v との間には

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = - \frac{M_p}{E I_A \cos \phi} \quad (3)$$

が成り立つ⁷⁾ことを用いて導かれる。式(2)中、 M_p^0 はアーチと同じ支間長の単純ばりの活荷重 $p(x)$ による曲げモーメントであり、第3項および第4項が変形の影響による付加曲げモーメントを示している。

ここで、アーチのライズがそれほど高くない場合には、水平変位の影響はあまり大きくないのでこれを無視して考えることにし、アーチリブの断面2次モーメントが、クラウンでの大きさを I_c として

$$I_A = I_c / \cos \phi \quad \text{あるいは} \quad I_c = I_A \cos \phi \quad (4.a, b)$$

のような分布をするものと仮定すると、式 (1.a)は次のように簡化される^{6), 7)}。

$$E I_c \frac{d^4 v}{dx^4} + H \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - \frac{8f}{\ell^2} H_p \quad (1. b)$$

次に、式 (1.a)または (1.b)を、図-3. (b)に示すような補剛桁が連続桁形式である上路式補剛アーチに拡張することを考える。この形式のアーチは、アーチリブとクラウンで剛結され、かつ全ての支点で水平方向の移動が拘束されていない連続桁形式の補剛桁で補剛された上路式の2-ヒンジ・アーチであり、道示・鋼橋編にいう補剛桁に軸力の生じない補剛アーチに相当する。以下、本論文ではこの形式の補剛アーチを連続桁式上路補剛アーチということにする。ただし、アーチリブの軸線の形状は前述の2-ヒンジ・アーチの場合と同じく、死荷重が載荷された状態でライズが f であるような放物線であり、またアーチの支間長を ℓ 、補剛桁の側径間長を a とする。通常の上路式補剛アーチでは支柱は全ての横桁位置に配置され、しかもその間隔(すなわち縦桁支間)は縦桁の断面寸法から制約を受けるため、大体10m前後とされるのが普通である。したがって、アーチ支間が80~90mに達するものでは支柱は十分密に配置されていると考えることができ、しかもこれらの長さの変化は実用上無視できる。また、既述のように補剛桁とアーチリブはクラウンで剛結されている。このような場合には、補剛桁とアーチリブは同じように変形するので、構造系を一種の重ねばりと見なすことができる。

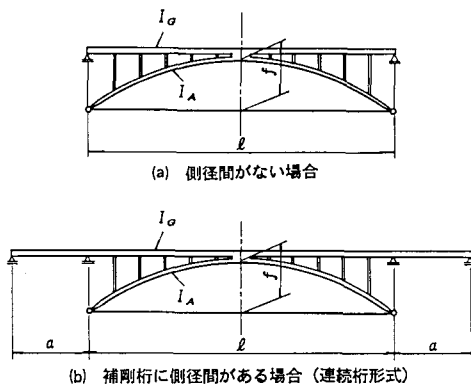


図-3 補剛桁に軸力の生じない補剛アーチ

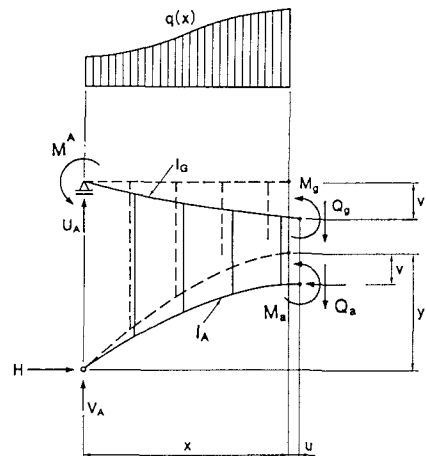


図-4 補剛アーチの釣合い

いま、図-4に示すように、任意の荷重 $q(x)$ を受ける連続桁式上路補剛アーチのアーチ支間部のみを取り出して、任意の節点のすぐ右側で切断した状態を考える。このとき、補剛桁の左右の中間支点の曲げモーメント M^A 、 M^B は、図示のように外力として与えればその作用は等価である。この状態で変形後の形状についてモーメントの釣合いを考えると、変位 u 、 v は補剛桁もアーチ・リブも同じであり、また支点反力 U 、 V の和は、同じ支間長の単純ばりの外力モーメント M^A 、 M^B による反力と鉛直荷重 $q(x)$ による反力の合計で表わされるので、補剛桁とアーチリブの曲げモーメント M_g 、 M_a の和に対し、以下の式が得られる。

$$M = M_g + M_a = -M^A + \frac{M^A - M^B}{\ell} x + M^0 - Hy + Hv + (Q_g + Q_a) u \quad (5)$$

ここに、 Q_g 、 Q_a は補剛桁とアーチリブの各々の鉛直せん断力、 H は水平反力、 M^0 は同じ支間長の単純ばりの鉛直荷重 $q(x)$ による曲げモーメントである。したがって、活荷重 $p(x)$ による曲げモーメント $M_p = (M_g + M_a)_p$ は、 u 、 v を改めて活荷重による付加変位とすれば、式(2)の場合と全く同様にして

$$M_p = (M_g + M_a)_p = -M_p^A + \frac{M_p^A - M_p^B}{\ell} x + M_p^0 - H_p y + H_p v + (Q_g + Q_a) u \quad (6)$$

のように求められる。ただし、 M^A 、 M^B の添字 p は活荷重 $p(x)$ による増分であることを示し、 M_p^0 および H_p は式(2)で用いられているものと同じである。また、 H および Q_g 、 Q_a は、この式では死活荷重による合計の水平反力と鉛直せん断力である。一方、重ねばりとしての挙動を考えると、この場合の曲率と活荷重曲げモーメントとの関係は、式(3)と水平ばりのそれとから

$$(M_g + M_a)_p = -E(I_G + I_A \cos \phi) \frac{d^2 v}{dx^2} \quad \text{または} \quad \frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_p}{E(I_G + I_A \cos \phi)} \quad (7.a, b)$$

ただし、 I_G は補剛桁のアーチ支間部の断面2次モーメントであり、アーチ支間内で一定としている。したがって、この式と式(6)から連続桁式上路補剛アーチのアーチ支間部に対し、2-ヒンジ・アーチと全く同じ手順によって、式(1.b)と同様の釣合方程式

$$E(I_G + I_C) \frac{d^4 v}{dx^4} + H \frac{d^2 v}{dx^2} = p(x) - \frac{8f}{\ell^2} H_p \quad (8)$$

が導かれる。ただし、ここでも水平変位の影響は無視し、アーチリブの断面2次モーメントの分布は式(4)に従うとしている。式(4)の仮定はあまり現実的とはいえないが、実際の適用方法を次項で述べる。

これに対し、補剛桁の側径間部では通常のはりの釣合方程式が適用できるので、活荷重たわみについて

$$E(\kappa I_G) \frac{d^4 v}{dx^4} = p(x) \quad (9)$$

が成立する。 κ は補剛桁の断面2次モーメントの側径間部とアーチ支間部の比であり、一般には $\kappa > 1$ である。

2.2 半載等分布活荷重に対する解式の誘導

本項では、等分布活荷重 p が連続桁式上路補剛アーチのアーチ支間の片側半分に偏載されたとき（以下、半載等分布活荷重という）の、活荷重によるたわみ v および曲げモーメント $M_p = (M_g + M_a)_p$ の解式を式(8)および式(9)から誘導することを考える。活荷重のこの載荷状態は、補剛桁およびアーチリブの両者に対して、アーチ支間内の活荷重曲げモーメントの正および負の最大値を与える状態にほぼ一致しており、アーチ橋の力学特性を議論するさいによく用いられる代表的な載荷状態である。連続桁式上路補剛アーチでは、最大活荷重曲げモーメントは正負とも大体 0.3ℓ 点付近に発生する。

釣合方程式(8)は、解式の誘導を簡単にするために水平変位を無視しているが、それでも H_p および H は活荷重 $p(x)$ の関数であるため、この方程式は $p(x)$ に関して非線形である。また、式(8)中の H （したがって H_p ）は未知であるため、これを決定するためには変形の連続条件式に相当するもう一つの方程式が必要であるが、この方程式の中にも変位 v を含んでいる。¹⁾ したがって、これらの方程式から厳密に数値解を求め

るためにはくり返し計算が必要であり、かなり煩雑である。しかし、アーチの水平反力にはほとんど非線形性が現れない事実を利用すると、荷重条件が限定されている場合には、解式の誘導は非常に簡単になる。すなわち、水平反力を上述の二つの方程式とは別の手段によって求めることにより、式(8)は線形の常微分方程式になり、変形の連続条件式に相当するもう一つの方程式は不用になる。

2-ヒンジ・アーチにおいては、等分布死荷重 w 、半載等分布活荷重 p による水平反力 H_d 、 H_p およびこれらによる合計の水平反力 H は、それぞれきわめて良好な精度で以下に示す式によって与えられる。

$$H_d = \frac{w \ell^2}{8f}, \quad H_p = \frac{1}{2} \frac{p \ell^2}{8f}, \quad H = H_d + H_p = \frac{\ell^2}{8f} (w + 0.5 p) \quad (10), (11), (12)$$

一方、連続桁式上路補剛アーチでは、実橋における補剛桁の側径間長とアーチ支間長の比 a/ℓ は0.2程度とされることがきわめて多く、大きくても0.3に近くなることは非常に少い。⁹⁾ a/ℓ がこの程度であれば、側径間部の剛性と死荷重を無視して、 H_d を式(10)で求めても誤差はわずかであり、 H_d がやや大きく算出される分むしろ安全側である。また、半載等分布活荷重に対する水平反力 H_p も、実用上十分な精度で式(11)で計算することができる。したがって、連続桁式上路補剛アーチに対しても式(10)、(11)を用いることにすると、全水平反力 H は式(12)で計算され、式(8)の右辺の荷重項は $\pm p/2$ となるので、アーチ支間部に対する釣合方程式は、

$$E(I_G + I_C) \frac{d^4 v}{dx^4} + H \frac{d^2 v}{dx^2} = \begin{cases} \frac{p}{2} & (0 \leq x \leq \ell/2) \\ -\frac{p}{2} & (\ell/2 < x \leq \ell) \end{cases} \quad (13)$$

のように変形される。また、側径間部に対する釣合方程式は、この場合側径間上には活荷重がないので、式(9)において右辺を0とすればよい。

式(13)は、断面2次モーメントが $(I_G + I_C)$ であり、大きさ H の軸圧縮荷重と大きさ $p/2$ の逆対称分布荷重を受けるはり一柱の釣合方程式と同じであるので、補剛桁の中間支点の曲げモーメントを不静定力のように考え、もとの構造系を図-5に示すような置換系に置換して考えると便利である。構造系が対称であり、荷重分布が逆対称であることから、解式は置換系の片側半分について求めればよく、反対側については符号を逆にするだけでよい。得られた結果のうち、以下に曲げモーメント M_p [= $(M_g + M_s)_p$] のみを、アーチ支間の左側半分について無次元化した形で示す。ここでは、中間支点の曲げモーメントは改めて $\bar{M}_{op}$ と記すことにする。

$$\frac{M_p}{p \ell^2} = \frac{(M_g + M_s)_p}{p \ell^2} = C_m \cos \left(\mu \ell \cdot \frac{x}{\ell} \right) + D_m \sin \left(\mu \ell \cdot \frac{x}{\ell} \right) - \frac{1}{2(\mu \ell)^2} \quad (14)$$

$$C_m = \frac{1}{2(\mu \ell)^2} + \frac{\bar{M}_{op}}{p \ell^2}, \quad D_m = \frac{1}{2(\mu \ell)^2} \cdot \frac{1 - \cos \frac{\mu \ell}{2}}{\sin \frac{\mu \ell}{2}} - \frac{\bar{M}_{op}}{p \ell^2} \cdot \frac{1}{\tan \frac{\mu \ell}{2}} \quad (15, a, b)$$

$$\frac{\bar{M}_{op}}{p \ell^2} = \frac{1}{2 \mu \ell} \cdot \frac{\tan \frac{\mu \ell}{2} \cdot \left\{ \frac{\mu \ell}{4} - \frac{1 - \cos \frac{\mu \ell}{2}}{\sin \frac{\mu \ell}{2}} \right\}}{\left[2 + \frac{1}{3} \lambda (\mu \ell)^2 \right] \cdot \tan \frac{\mu \ell}{2} - \mu \ell} \quad (16)$$

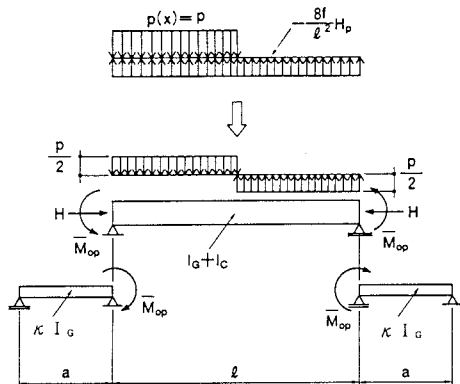


図-5 補剛アーチの置換系

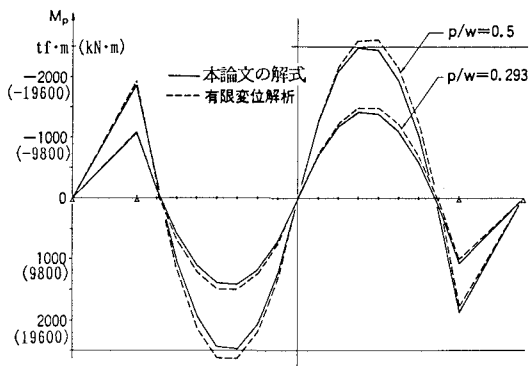


図-6 活荷重による曲げモーメント M_p の比較例

$$\mu \ell = \ell \sqrt{\frac{H}{E(I_G + I_C)}}, \quad \lambda = \frac{a}{\kappa \ell} \left(1 + \frac{I_C}{I_G} \right) \quad (17), (18)$$

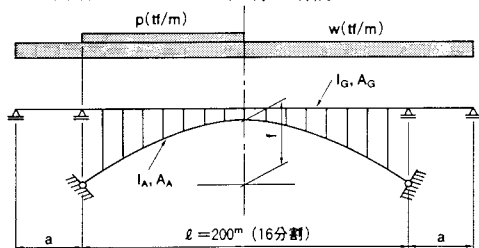
上記の式(14)～(18)で与えられる活荷重曲げモーメント M_p は、補剛桁とアーチリブの合計に対するものであるが、式(7.a)の関係を利用することにより、 I_G と $I_A \cos \varphi$ の比によってこれを両者に分配することができるので、各々の活荷重曲げモーメントを計算することができる。また、上記の解式を適用するに当っては、水平反力 H は簡易式(12)によるものとし、 I_C は式(4)に従って変化する断面2次モーメントの平均値が、実際のアーチリブのその平均値に等しくなるように決定するものとする。

また、上記の M_p の解式は、パラメータ λ の値を0または ∞ とすることにより、固定アーチと2-ヒンジ・アーチにも適用することができる¹⁾ (4.2を参照)。

3. 解式の精度

式(8)は、変形後の形状について立てられた釣合方程式ではあるが、変形そのものは微小変形のままであり、軸歪は無視されている。また、水平変位の影響も無視されており、この方程式を解くに当っては線形化している。したがって、式(14)～(18)で与えられる M_p の解式は、現在一般的に行われている有限変位解析⁸⁾に比べれば厳密性に欠け、計算結果の精度が劣ることが予想される。そこで、上記の M_p の解式の精度を確認するため、実橋に近いモデルを用いて有限変位解析による計算結果と比較してみた。

結論的に述べると、鋼道路橋の2-ヒンジ・アーチと連続桁式上路補剛アーチについて、4.2に述べる各種



w		p		p/w
tf/m	kN/m	tf/m	kN/m	
8.36	82.0	2.45	24.0	0.293
		4.18	41.0	0.5
$a/\ell = 0.2, \quad f/\ell = 1/6$				

図-7 比較計算例のモデルと荷重

のパラメータを変化させて行なった50ケース余の比較計算の結果によれば、死活荷重強度比 p/w が道示・鋼橋編で想定している範囲内にあり、ライズ・スパン比 f/ℓ が1/5.5程度までのときは、前者ではパラメータ $\mu \ell$ の値が3.8程度以下、後者ではパラメータ λ の値が実橋において通常とり得る大きさの範囲内にあって、かつ $\mu \ell$ の値が4.0程度以下であれば、式(14)～(18)による M_p の計算結果は、有限変位解析結果に対する比を精度ということにすると、曲げモーメントが大きい主要な断面については少くとも90%以上の精度を有している。固定アーチについては、鋼橋では実際に建設されることがきわめて少いことから3ケースしか比較しなかったが、支点の拘束が大きいために、かな

り大きな μl の値まで良好な精度が得られることが推察できる。

これに対し、 μl の値は幅員の大きさや床版厚によっても変わるので一概には言えないが、一般的にはアーチの支間長が長くなると大きくなる傾向にある。そこで、鋼道路橋の2-ヒンジ・アーチと連続桁式上路補剛アーチで、実際に建設されたアーチ支間が100mを超えるもの約20橋（一部中路式補剛アーチを含む）について調べたところ、アーチ支間が150～160mまでの通常よく設計される規模の補剛アーチでは、設計荷重レベルでの μl の値（半載等分布活荷重、ただし断面2次モーメントは平均値をとる）は、明らかに例外的な値であると判断されるもの^{注2)}を除くと3.6以下であった。無補剛の2-ヒンジ・アーチでは支間長が100mを大きく超えるものはなく、設計荷重レベルでの μl の値は大体3程度であり、ライズがかなり低いものでこれを少し上回ることがある程度であった。一方、 λ の値に関していえば、実橋では支間長比 a/l と断面2次モーメント比 I_A/I_C 〔アーチリブの断面2次モーメントの分布仮定から、式(18)では I_C/I_0 〕のとり得る大きさの範囲が限定されるため、 λ の値のとり得る範囲も限定される。すなわち、実橋では a/l の値はほとんどが0.15～0.3の範囲に入り、⁹⁾ I_A/I_C の比はいわゆるローゼ桁では通常7/3～3/7であり、¹⁰⁾ ランガー桁では実用上0とされる。したがって、一般には $\kappa>1$ であることと、前節で述べた I_C の決定方法および f/l があまり大きくない場合には式(4)における I_C と I_A の平均値はそれほど変わらないことを考えると、式(18)から λ の値は通常は1以下であることがわかる。以上に述べた比較計算結果と実橋における μl および λ の値に関する検討結果から判断すると、式(14)～(18)によって与えられる M_p の解式は、 f/l が1/6を大きく超えなければ、概ね λ が1より小さくて μl が4より小さい範囲では、大きくても10%以内の誤差で適用することができ、しかも通常規模の連続桁式上路補剛アーチでは、ほとんどのものが上述のパラメータの範囲に入ることができる。したがって、放物線アーチでは死荷重による曲げモーメントには実用上非線形性が現れない^{2), 3), 5)}ことから微小変位解析結果をそのまま用い、活荷重曲げモーメントのみを式(14)～(18)および式(7.a)によって計算することになると、有限変位解析によらなくても、かなり精度のよい変形の影響を考慮した死活荷重曲げモーメントの近似値を計算することができる。なお、鋼上路補剛アーチの f/l は大部分が1/6付近にあり、これよりライズが大幅に高くなることは少ない。^{9), 10)} また、死活荷重比 p/w は、支間長が100mを超えるようなアーチ橋では0.4に達することはまずないといつてよい。

比較計算結果の一例を図-6に示す。 M_p の分布は、有限変位解析結果でもほぼ完全逆対称である。比較に用いたモデルと荷重は図-7に示した通りであるが、この例では λ は0.39、 μl は3.44と3.60である。なおこのモデルと荷重は、文献5)の中の1つに側径間を付加するなどの修正を加えて作成したものである。

4. 連続桁式上路補剛アーチの面内非線形特性

4.1 非線形性の大きさを表わす尺度

アーチ橋においては、アーチリブの軸力にはほとんど非線形性が現れない^{2), 3), 5)}ことから、面内非線形性の大きさを表わす尺度として、一般にたわみと曲げモーメントの微小変位解析値に対する増加率が用いられる。そのうちたわみについては、死荷重によるたわみにはほとんど非線形性が現れず、また活荷重たわみの照査も、道示・鋼橋編では微小変位解析値によって行えばよいことを規定している（11.8条）ので、設計実務上は曲げモーメントの非線形性のみが問題になる。

連続桁式上路補剛アーチにおいて、変形の影響を考慮しないときの式(8)に対応する釣合方程式は以下に示す式(19)によって与えられ、等分布活荷重 p がアーチ支間の片側半分に偏載される場合に対しては、式(13)の場合と全く同様に式(20)のように変形される。また、補剛桁の側径間部に対する釣合方程式は、式(9)の右辺を0としたものである。したがって、変形の影響を考慮しない場合の式(14)～(18)に対応する M_p の解式は式(21)、(22)のように与えられる。

注1) 式(1.b)に対応する境界条件のもとで直接解いても、結果は $\lambda=0$ または ∞ とした解式と一致する。

注2) 古い示方書によって設計されていて、支間が長大であるにもかかわらず変形の影響が全く考慮されていないか、されていても検討が不十分であるもの。また、支持条件が特殊であるアーチも除いている。

$$E(I_o + I_c) \frac{d^4 v}{dx^4} = p(x) - \frac{8f}{\ell^2} H_p, \quad E(I_o + I_c) \frac{d^4 v}{dx^4} = \begin{cases} \frac{p}{2} & (0 \leq x \leq \ell/2) \\ -\frac{p}{2} & (\ell/2 < x \leq \ell) \end{cases} \quad (19), (20)$$

$$\frac{M_p^E}{p \ell^2} = -\frac{1}{4} \left(\frac{x}{\ell} \right)^2 - \left(\frac{2 \bar{M}_{op}^E}{p \ell^2} - \frac{1}{8} \right) \frac{x}{\ell} + \frac{\bar{M}_{op}^E}{p \ell^2}, \quad \frac{\bar{M}_{op}^E}{p \ell^2} = -\frac{1}{64(1+2\lambda)} \quad (21), (22)$$

ただし、この場合には曲げモーメントの記号の右肩に添字Eを付し、変形の影響を考慮した場合と区別している。これらの式と式(14)～(18)の相違は、変形による付加曲げモーメントの影響が考慮されているかどうかであり、解析上の他の仮定は全く同じである。また、式(21)、(22)においても λ は式(18)によって与えられるが、 $\mu \ell$ は不用である。 λ の値を0または ∞ とすれば、固定アーチと2-ヒンジ・アーチにも適用できることは式(14)～(18)の場合と同じであり、そのようにして得られる M_p^E は、これらのアーチにおいて断面2次モーメントの分布を式(4)のように仮定し、軸歪を無視することによって得られる微小変位理論の曲げモーメントの計算式¹¹⁾に一致している。以上により、変形の影響を考慮したときとそうでないときの、半載等分布活荷重 p に対する無次元化された曲げモーメントの解式が出揃ったことになるので、活荷重曲げモーメントの微小変位理論値に対する増加率はこれら両式により

$$\beta = \left(\frac{M_p/(p \ell^2)}{M_p^E/(p \ell^2)} - 1 \right) \times 100 \quad (\%) \quad (23)$$

として計算される。式(23)による β は、活荷重曲げモーメントの補剛桁とアーチリブの和についての増加率を与えるが、実際に数値計算によって比較してみると、活荷重曲げモーメントの分配率は、微小変位解析でも有限変位解析でもほとんど変わらない。したがって、式(23)による増加率は、補剛桁およびアーチリブのいずれにも適用できるので、非線形性の大ききの尺度としてこれら両者に使用できる。

3.のはじめに述べた理由により、式(14)～(18)によって与えられる M_p の解式は厳密な意味では幾何非線形問題の正解とはいえず、これによる計算結果には多かれ少かれ誤差を含んでいる。3.で行なった比較計算結果によれば、この解式はパラメータ $\mu \ell$ の値が4以下の範囲では十分良好な精度を保持できるが、これを超えると誤差が大きくなる。したがって、式(23)で与えられる増加率 β も必ずしも厳密なものではないので、これによって定量的な見地から厳密に非線形性を論じることにはできないが、少なくとも非線形特性の大要は説明することができる。また、既述のように死荷重曲げモーメントにはほとんど非線形性が生じないため、アーチ橋の非線形性の大ききは実際上は活荷重曲げモーメントの増加率によって議論することができる。

4.2 非線形性を支配するパラメータ

一般にアーチの面内非線形性を支配する要因は、支間長、部材の断面2次モーメント、ライズ・スパン比、死荷重強度、死荷重と活荷重の強度比などであり、¹²⁾ 本論文で主題にしている連続桁式上路補剛アーチでは、これら以外にアーチリブと補剛桁の断面2次モーメント比、補剛桁の断面2次モーメントの側径間部とアーチ支間部の比および補剛桁の側径間長とアーチ支間長の比などが加わる。これに対し、式(14)～(18)で与えられる M_p の解式は、2種類の無次元パラメータ $\mu \ell$ と λ のみによって支配されるので、面内非線形性はこの二つのパラメータで説明することができる。端的に言えば $\mu \ell$ の値が大きいほど、また λ の値が大きいほど非線形性は大きくなる。

パラメータ $\mu \ell$ はアーチの支間長、アーチリブと補剛桁の断面2次モーメントおよび水平反力 H の関数として与えられるが、以下に述べる理由によって、水平反力 H はアーチの剛性に大きな影響を及ぼす。すなわち、アーチでは変形の影響を考慮して釣合いを考えると、式(2)に関して述べたように、水平反力 H はそれ

自身と活荷重たわみ v との積 Hv で表わされる付加曲げモーメントを生じさせるので、この反力は明らかにたわみと曲げモーメントを増大させる方向に作用する。このため、支間長と部材の断面性能が同じであっても、水平反力が大きいほどアーチの見かけの剛性は小さいということになる。このことは、吊橋ではケーブル張力の水平成分がたわみに対して復元力のように作用し、ケーブル張力が大きくなるほど剛性が大きくなるのと逆であり、これがアーチにおいては変形の影響を考慮すると、たわみや曲げモーメントが大きくなる最大の原因である。

以上のことから、パラメータ $\mu\ell$ は単に部材の断面性能とアーチ支間長だけでなく、水平反力による剛性低下まで包含した構造系全体としての剛性の大きさを表わす無次元量であり、この値が大きいほど剛性の小さいアーチであることがわかる。また、水平反力 H は死荷重と活荷重による水平反力の合計値であるから、付加曲げモーメント Hv には活荷重のみならず、すでに作用している死荷重も大きく寄与する。特に長大アーチ橋では死荷重の方がはるかに大きいため、死荷重の付加曲げモーメントに対する寄与はきわめて大きい。このことから、パラメータ $\mu\ell$ には、非線形性に及ぼす死荷重強度の影響も包含されているといえる。

パラメータ λ は支間長比 a/ℓ 、断面2次モーメント比 κ および I_A/I_G 〔正確には式(4)の仮定によって I_c/I_G 〕の関数として与えられ、連続桁式上路補剛アーチに特有のパラメータである。図-5はこの形式の補剛アーチの置換系であるが、この系において側径間長 a が無限小である場合あるいは断面2次モーメント比 κ が無限大である場合には、中間支点の拘束条件は固定ばりの固定支点のそれと同じになる。逆に、 a が無限大である場合または κ が無限小である場合は、単純ばりの支点のそれと同じになる。したがって、 $\lambda=0$ の場合はこの置換系は固定アーチに対応し、 $\lambda=\infty$ の場合は2-ヒンジ・アーチに対応する〔式(16)から、 $\bar{M}_{\phi\phi}$ は λ が ∞ のときには0となり、0の時には最大になる〕。一方、断面2次モーメント比 I_A/I_G に着目すると、相対的に $I_A(I_c)=0$ の場合はいわゆるランガー桁に対応し、逆に $I_c=0$ の場合は2-ヒンジ・アーチに対応するので、この面から見ても $\lambda=\infty$ は2-ヒンジ・アーチに対応することがわかる。以上のことから、パラメータ λ は補剛桁のアーチリブに対する拘束の大きさを表わす無次元量であると考えることができ²³⁾、この値が小さいほど拘束効果が大きいということができる。

式(17)、(18)を見れば明らかなように、本項のはじめに述べた非線形性の支配要因のうち、ライズ・スパン比 f/ℓ と死活荷重比 p/w を除く要因は全てパラメータ $\mu\ell$ と λ に包含されているが、 f/ℓ と p/w は直接これらのパラメータには現れてこない。しかし、式(12)によって式(17)を変形すれば

$$\mu\ell = \ell \sqrt{\frac{W(f/\ell)(1+0.5p/w)}{8EI_c(I_c+I_G)}}, \quad W=w\ell \quad (24, a, b)$$

となるので、パラメータ $\mu\ell$ は間接的に f/ℓ と p/w も包含していることがわかる。すなわち、他の条件が同じであれば f/ℓ が小さいほど、また p/w が大きいほど $\mu\ell$ が大きくなるので、非線形性は大きくなる。また W はアーチ支間部の死荷重の合計であるため、死荷重の大きさが非線形性を支配する大きな要因の一つであることが、上式からも理解できる。

なお、吊橋のケーブルとは異なりアーチリブには曲げ剛性があるため、水平変位によっても若干の付加曲げモーメントを発生させる。特に活荷重半載時においては、変形モードが逆対称形であるため水平変位も大きく、このような変形モードでは f/ℓ および p/w が水平変位の大きさに密接に関係するものと考えられる。しかし、式(14)～(18)で与えられる M_F の解式では水平変位の影響を無視しているので、本論文ではこれらの関係については論じることができない。ただし、3.で行った比較計算結果によると、 f/ℓ があまり大きくなく p/w が通常の値の範囲内であれば、水平変位の影響そのものは小さいといえる。

注3) $\kappa=1$ とし、 I_c の代わりに I_A の平均値を用いれば、道示・鋼橋編の式(11.3.2)の λ に一致する。

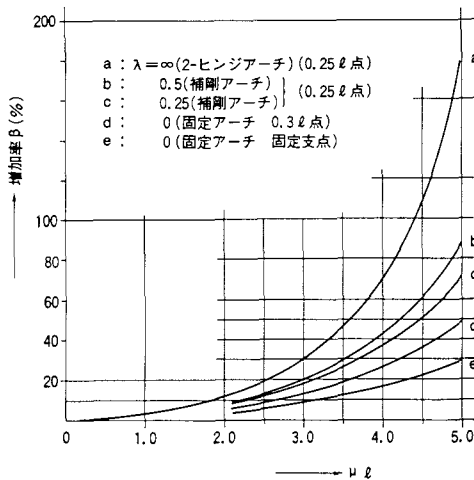


図-8 活荷重による曲げモーメント M_p の増加率・1

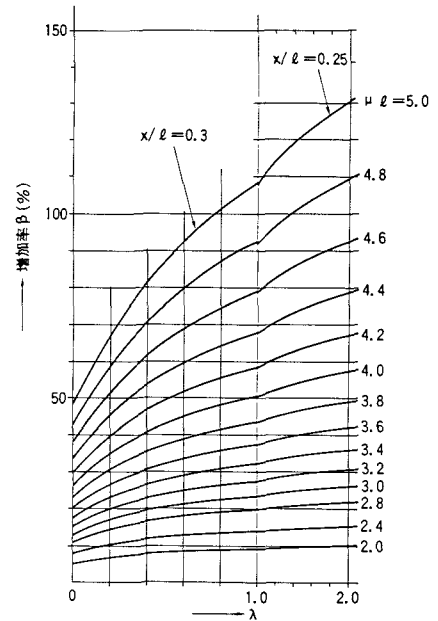


図-9 活荷重による曲げモーメント M_p の増加率・2

4.3 連続桁式上路補剛アーチの面内非線形特性

4.1で述べたように、非線形性による活荷重曲げモーメントの増加率は式(23)によって計算されるので、

増加率 β とパラメータ $\mu \ell$ および λ の関係を表すグラフを作成し、これらを図-8～10に示す。これらの図から、連続桁式上路補剛アーチの面内非線形特性を読み取ることができる。なお、有限変位解析結果に対して最大限10%までの誤差を許すとすれば、これらのグラフの実用範囲は連続桁式上路補剛アーチの場合には概ね $\lambda < 1$ で $\mu \ell < 4$ 、2-ヒンジ・アーチの場合には同じく $\mu \ell < 3.8$ であり、固定アーチの場合には少なくとも図に示した $\mu \ell$ の範囲では実用可能である。

図-8は、各種のアーチについて λ をパラメータとして、 β と $\mu \ell$ の関係を示したものである。着目点は図中に示した通りであるが、半載等分布活荷重を考えているので、図中の曲線はいずれも正および負の最大活荷重曲げモーメントか、きわめてこれに近い曲げモーメントの増加率を示していると考えてよい。この図から、各種のアーチの非線形性は基本的にはパラメータ $\mu \ell$ によって支配されるが、連続桁式上路補剛アーチでは、同時に補剛桁による拘束効果の大きさを表わすパラメータ λ の影響を受けることがわかる。すなわち、どのアーチにおいても、曲げモーメントの増加率と $\mu \ell$ の関係は線形ではなく、増加率は $\mu \ell$ が大きくなるに従って加速度的に増加するが、 λ の値が小さいアーチほど増加率の曲線は下側に位置する。したがって、 $\mu \ell$ の値が同じであれば λ の値が大きいほど非線形性は大きく、これが最大になるのは2-ヒンジ・アーチの場合であり、最小になるのは固定アーチの場合であることがわかる。

図-9は、図-8とは逆に λ を横軸にとり、 $\mu \ell$ をパラメータとして曲げモーメントの増加率 β を表わしたものである。また、図-10は図-9と同じものであるが、 λ の範囲を大きくとって描いたものである。これらの図の曲線も、図-8の場合と同様にアーチ支間内の、正および負の最大活荷重曲げモーメントの増加率を示していると考えてよいが、 λ の値が1に近くなると最大活荷重曲げモーメントの発生点が0.3 ℓ 点から0.25 ℓ 点に移動するので、図では1を境にして着目点をこれら2点に分けている。これらの図によると、

- ① $\mu \ell$ が大きくなるほど曲線の間隔が開いて行くことから、増加率は λ が同じであれば $\mu \ell$ が大きくなるにつれて急速に増加することがわかる。これは図-8の示すところと同じである。
- ② λ の変化に対する増加率の増大の割合は、 λ が小さいほど、また $\mu \ell$ が大きいほど大きい。したがって、増加率の曲線のはじめの立ち上がりは $\mu \ell$ が大きいほど急である。

- ③ μl の大きさにかかわらず、増加率の増大の割合は λ が大きくなるほど鈍化し、増加率の曲線は最後は $\lambda = \infty$ のときの、すなわち 2-ヒンジ・アーチの場合の増加率に漸近する。
- ④ 漸近の速度は μl が小さいほど著しく、たとえば $\mu l = 2.0$ の場合は、 λ の値が 2 を超えると増加率はほとんど増加しなくなる。逆に μl が大きい場合は曲線の勾配の変化がゆるやかであり、増加率はかなり大きな λ の値まで増加し続ける。
- ⑤ したがって、 μl の値があまり大きくない場合は、増加率の変化が比較的顕著であるのは λ の値がかなり小さい領域であり、実橋で通常よく現れる $\mu l = 3 \sim 4$ の範囲では、非線形性に及ぼす λ の影響が顕著であるのは $\lambda < 1$ の領域であると見てよい。逆にいえば、 μl のこの範囲においては、 λ の値が 1 より大きくなるような支間長比と断面 2 次モーメント比の組合せでは、どのように組合せても補剛桁による拘束が非線形性に及ぼす影響はあまり変わらないといえる。しかし、すでに述べたように、実橋においては λ の値はほとんどが 1 より小さい範囲に入るので、実橋における λ の値の分布は、ちょうど非線形性の大きさに敏感な範囲に一致していることになる。
- ⑥ 補剛桁の中間支点について図-9 と同じグラフを作成してみると、曲線の傾向は図-9 とほぼ同じであるが、増加率の大きさはこの図の曲線の方が小さい。したがって、補剛桁の中間支点の非線形性はアーチ支間内のそれより小さいことがわかる。

以上のように、連続桁式上路補剛アーチの非線形性はパラメータ μl の他に λ にも大きく影響され、簡単にいえば λ が小さいほど非線形性が小さい。したがって、式(18)において断面 2 次モーメント比 κ および I_c / I_g (I_A / I_G) に着目すると、 κ が大きく I_c / I_g (I_A / I_G) が

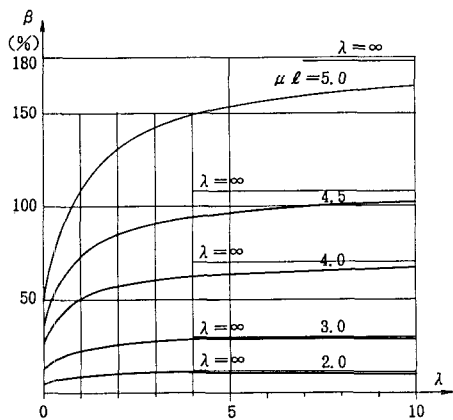


図-10 活荷重による曲げモーメント M_p の増加率 $\cdot 3$

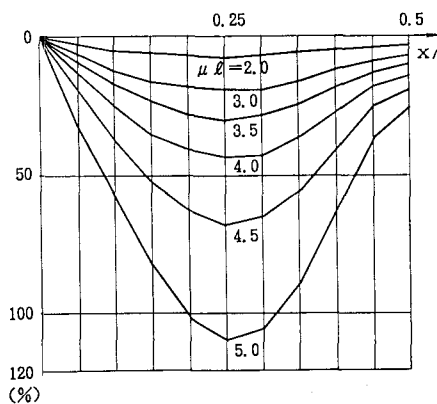


図-11 集中活荷重による曲げモーメントの増加率 (2-ヒンジ・アーチ)

小さいほど λ の値が小さくなるので、補剛桁の側径間の断面 2 次モーメントが大きいか、また補剛桁とアーチリブの断面 2 次モーメントの和が一定なら断面 2 次モーメントを補剛桁に集めるほど、非線形性が小さくなるのがわかる。ただし、後者について注意すべきことは、補剛桁とアーチリブの断面 2 次モーメントの和が変わらないという条件が付いていることであり、断面 2 次モーメントを補剛桁に集中させたとしても、この和が小さくなればパラメータ μl の値が大きくなるので、非線形性が小さくなるとはかぎらない。

なお、これまでの所論では集中活荷重 (線荷重) による非線形性についてはふれられていない。しかし、単一集中荷重による曲げモーメントの非線形性は等分布活荷重によるそれよりもかなり小さく、また長大アーチ橋では後者による曲げモーメントの方がはるかに大きい。このため、単一集中荷重がアーチ橋の非線形性を支配することはないと考えてよく、両者による合計の曲げモーメントに対して図-8, 9 の β を用いることにすれば若干安全側ではあるが大きな支障はない。参考のため、2-ヒンジ・アーチにおける集中活荷重曲げモーメントの増加率を図-11 に示す。これは、式(1, b)に吊橋のたわみ理論における影響線解法¹³⁾と同様な手法を適用して影響線を求め、着目点ごとに最大縦距の増加率を算出してプロットしたものである。また、同じ上路式補剛アーチでも図-3. (a) に示すような補剛桁が側径間を持たない形式については、釣合方程式としては式(8) が成立し、かつこの式は断面 2 次モーメントが $(I_c + I_g)$ であること

が異なるだけで、式(1. b) と全く同じであることから、非線形特性は2-ヒンジ・アーチのそれと基本的に同じであると考えてよい。このことは、前田・林の有限変位解析による研究結果³⁾からも裏付けられる。

5. 結語

古くから知られているリブ・アーチに対する変形を考慮した釣合方程式を、補剛桁が連続桁形式である上路式補剛アーチに拡張し、解析的な手法によって、この形式の補剛アーチの幾何学的非線形性を調べた。基礎になっている理論は、弾性2次理論といわれる理論¹⁴⁾の範ちゅうに入るものであり、また解式の誘導に当っては、水平変位の影響を無視するなどかなり簡略化している。したがって、これによる結果は必ずしも厳密なものではないが、大すじでは非線形特性を明らかにすることができたと思う。特に、この形式の補剛アーチでは、補剛桁のアーチリブに対する拘束の大きさが重要であるが、この拘束の大きさは1個の簡単な無次元パラメータで評価できることを示すことができた。また、本論文で使用した活荷重曲げモーメントの増加率 β のグラフは、設計実務にも十分使用できるものと考えられるが、これを用いた実用的な曲げモーメントの計算方法については、別の機会に報告する予定である。

なお、近年支間長が特に大きい上路式補剛アーチでは、補剛桁の中間支点がヒンジ支承を介して、剛性の大きい独立したコンクリート橋脚に固定される構造が増えてきている。この形式は、アーチ支間が大体150～160mを超えると採用されることが多いが、この構造では橋脚の剛性によって補剛桁の水平移動が拘束される。したがって、本論文で扱った通常の上路式補剛アーチとは補剛桁の支持条件が異なり、このような構造の補剛アーチには、本論文で述べたことが当てはまらないことを付言しておく。

参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説Ⅱ鋼橋編，昭和48年2月，同55年2月，平成2年2月。
- 2) 前田幸雄・林正：リブアーチにおける変形の影響，土木学会論文報告集第299号 P35～47，1980年7月。
- 3) 同上：補剛アーチの幾何学的非線形性，土木学会論文報告集第304号 P69～79，1980年12月。
- 4) 同上：アーチの影響線解法，土木学会論文報告集第299号 P49～58，1980年7月。
- 5) 安藤浩吉・成岡昌夫：アーチ系の橋に関する2，3の研究，橋梁と基礎，1970年4月号 P8～14。
- 6) 西脇威夫：アーチ系橋の耐力，橋梁と基礎，1971年7月号 P1～7，37。
- 7) A. ハウラネック・O. シュタインハルト（橋善雄・小松定夫共訳）：鋼橋の理論と計算 P353～357，山海堂，1965年1月。
- 8) たとえば J. S. シェムニスキー（山田嘉昭・川井忠彦共訳）：マトリクス構造解析の基礎理論，P349～357，培風館，1971年12月。
- 9) 日本橋梁建設協会：橋梁年鑑，1980～1990年版。
- 10) 長大鋼橋研究委員会：アーチ橋の実績調査報告，建設コンサルタンツ協会近畿支部，1985年6月。
- 11) たとえば 成瀬勝武：弾性橋梁 P171～174，P249～255，コロナ社，1966年8月（増補10版）。
- 12) 大森邦雄：鋼アーチ橋の設計上の留意点——道路橋示方書第11章の規定を中心として，橋梁と基礎，1991年8月号 P102～107。
- 13) 平井敦編：鋼橋Ⅲ P400～404，技報堂，1967年9月。
- 14) T. V. ギャランボス（福本晴士・西野文雄共訳）：鋼構造部材と骨組 P308～339，丸善，1970年10月。

(1992年9月21日受付)