

曲線格子桁の塑性崩壊荷重の計算法と実験

CALCULATION OF PLASTIC COLLAPSE LOADS OF HORIZONTALLY CURVED GRILLAGE BEAMS
AND LABORATORY TESTS林 川 俊 郎^{*}

By Toshiro HAYASHIKAWA

A method of analyzing the collapse load and the plastic collapse mechanism of horizontally curved grillage beams with thin-walled I-shaped cross sections is presented. This analytical method is based on the plastic hinge theory and the displacement method by using the solutions of homogeneous differential equations for a thin-walled curved beam. Four yield conditions are used in the plastic analysis to define the behavior of a fully plastic thin-walled steel cross section in combined bending, torsion, and warping. The proposed analysis automatically traces the location and the sequence of formation of all plastic hinges to collapse. Furthermore, numerical examples are given to illustrate the application of the analytical method. The computed results are compared with some experimental results of three different curved grillage beams.

1. まえがき

曲線格子桁橋は地形および地域の景観や調和を配慮して、道路線形設計上の観点からよく用いられる橋梁形式である。特に、並列のI形断面プレートガーダーをもつ曲線格子桁橋は、比較的橋長が短く曲率半径が大きい場合、製作・架設が容易となり、かつ経済性も有利となるため、その施工例は数多くある。しかし、薄肉断面部材で構成された曲線格子桁橋は曲げモーメントやねじりモーメントとともに曲げねじりモーメントを同時に受けるため、その応力分布状態はきわめて複雑である。特に、主桁が薄肉I形断面である並列曲線橋の場合には、主桁および横桁の上下フランジ部に付加的なそり応力度を生ずる。

この種の曲線格子桁橋の合理的な設計を行うためには、(1)主桁フランジ固定間での横倒れ座屈やウェブの曲げおよびせん断座屈に対する安全性の照査、(2)構造系全体としての崩壊荷重(終局荷重)の評価が重要な課題と言える。前者については多数の研究論文があり¹⁻³⁾、曲線桁橋の設計上有益な知見が与えられて

* 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

いる。一方、後者に関する論文は比較的数量少なく、未だ確立されたものはないように思われる。筆者の知る限りにおいて、曲げとねじりが同時に作用する曲線格子桁の崩壊荷重と崩壊形式を求めた米沢・三上の研究⁴⁾、非弾性の影響を桁の剛性低下とし、有限変形を考慮した長谷部・薄木の研究⁵⁾、およびそり変形と横構の影響を考慮した今井・太田・大塚の研究⁶⁾がある。

そこで、本研究は曲率を有する主桁と直線の横桁から構成される曲線格子桁が、一様に増加する比例荷重を受けるときの崩壊荷重と崩壊機構を自動的に計算する塑性解析法（極限解析）を提案する。この解析方法はそり変形を考慮した曲線桁に関する基礎微分方程式の一般解から誘導される剛性マトリックスを用い、構造系全体の釣り合い条件式を求め、降伏関数により塑性ヒンジを判定し、最終的な塑性崩壊機構が形成されるまでの全過程を追跡する。さらに、曲率半径の異なる3種類の曲線格子桁の室内実験を行い、ここで得られた数値計算結果との比較より、解析方法の妥当性について検討する。

2. 塑性解析

2. 1 解析上の仮定

本研究は塑性ヒンジ理論の考え方に基づいて曲線格子桁の塑性崩壊荷重を求める。ここで用いられた仮定は次の通りである。

- (1) 材料は剛塑性体とし、ひずみ硬化および塑性流れは無視する^{7), 8)}。また、塑性ヒンジは各部材要素の端部のみに発生するものとし、塑性域の拡がりは無視する。
- (2) 曲線格子桁に作用する荷重は、一定でかつ等しい割合で増加する（ここでは、比例荷重と呼ぶ）。
- (3) 部材は薄肉断面の曲げねじり理論に従うものとし、その変形は微小である。
- (4) 降伏関数には曲げ、ねじり、曲げねじりモーメントについて考察し、せん断力の影響は小さいものとして無視する。
- (5) 塑性崩壊に至る過程で、局部座屈あるいは横倒れ座屈等の不安定現象は生じないものとする。

2. 2 部材要素の剛性マトリックス

図-1に示すような薄肉I形断面をもつ曲線部材要素の剛性マトリックスの誘導について考える。3次元空間における薄肉断面曲線部材の1節点あたりの自由度は曲げねじり変形（そり変形）を含めて7となり、その剛性マトリックスの大きさは14行14列となる。薄木・稼農⁹⁾は変位関数を3次までの多項式で表示し、仮想仕事の原理を用いて陽な形で剛性マトリックスを誘導している。本研究では、曲線格子桁の部材要素数（分割数）に関係なく正確な解が求められる渡辺ら¹⁰⁾の方法を用いる。つまり、薄肉断面曲線部材の曲率面外変形に関する4階2元連立微分方程式から、ねじり角に関する6階の常微分方程式を誘導し、その一般解から得られる係数マトリックスを媒介にして剛性マトリックスを求める。以下に、その概要について述べる。

x軸対称断面に面外荷重が作用し、かつ曲率面内の荷重がないとき、曲率面外への変形をせん断中心軸の変形で表現した曲線桁の基礎微分方程式は次のように与えられる^{10), 11)}。

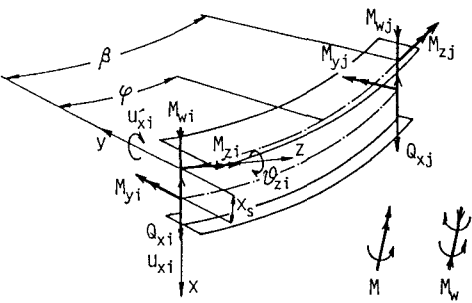


図-1 曲線部材要素

$$\left(EI_v + \frac{EJ_w}{R_s^2}\right) \frac{d^4 u_x}{d\phi^4} - GJ_t \frac{d^2 u_x}{d\phi^2} - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \theta_z}{d\phi^4} + (GJ_t + EJ_v) \frac{d^2 R_s \theta_z}{d\phi^2} = R_s^4 q_x - R_s^3 \frac{dm_y}{d\phi} \quad (1)$$

$$-\frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 u_x}{d\phi^4} + (GJ_t + EJ_y) \frac{d^2 u_x}{d\phi^2} + \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^4 R_s \theta_z}{d\phi^4} - GJ_t \frac{d^2 R_s \theta_z}{d\phi^2} + EJ_y R_s \theta_z = R_s^3 m_z \quad (2)$$

ここで、 u_x は垂直変位、 θ_z はねじり角、 EJ_y 、 GJ_t 、 EJ_w はそれぞれ桁の曲げ剛性、ねじり剛性、曲げねじり剛性である。さらに、 R_s は曲率半径、 q_x 、 m_y 、 m_z は外部荷重である。ただし、ここで取り扱う曲線格子桁の断面は2軸対称断面であることから、せん断中心位置 $x_s=0$ 、 x と y 軸に関する相乗モーメント $J_{xy}=0$ の条件が成り立っている¹⁰⁾。

曲線格子桁の剛性マトリックスを誘導する場合に、部材要素の節点間に外部荷重が作用していないものとすれば、式(1)と式(2)の右辺の荷重項は消える。さらに、式(1)、(2)の連立微分方程式より、 u_x を消去すると次のような同次方程式が得られる。

$$\frac{d^6 \theta_z}{d\phi^6} + (2-\lambda^2) \frac{d^4 \theta_z}{d\phi^4} + (1-2\lambda^2) \frac{d^2 \theta_z}{d\phi^2} - \lambda^2 \theta_z = 0 \quad (3)$$

さらに、

$$\frac{d^2 u_x}{d\phi^2} = -\frac{R_s}{1+\lambda^2+\lambda^2\gamma} \left\{ \frac{d^4 \theta_z}{d\phi^4} + (1-\lambda^2) \frac{d^2 \theta_z}{d\phi^2} + (1+\lambda^2\gamma) \theta_z \right\} \quad (4)$$

ここで、

$$\lambda^2 = \frac{GJ_t}{EJ_w} R_s^2, \quad \gamma = \frac{EJ_y}{GJ_t} \quad (5a, b)$$

である。したがって、式(3)より一般解 θ_z は次のように求められる。

$$\theta_z = C_1 \sinh \lambda \phi + C_2 \cosh \lambda \phi + C_3 \cos \phi + C_4 \phi \cos \phi + C_5 \sin \phi + C_6 \phi \sin \phi \quad (6)$$

さらに、式(4)より

$$u_x = -R_s \{ C_1 / \lambda^2 \sinh \lambda \phi + C_2 / \lambda^2 \cosh \lambda \phi - C_3 \cos \phi - C_4 (\phi \cos \phi - \eta \sin \phi) - C_5 \sin \phi - C_6 (\phi \sin \phi + \eta \cos \phi) \} + C_7 \phi + C_8 \quad (7)$$

となる。ここで、

$$\eta = \frac{2\lambda^2\gamma}{1+\lambda^2+\lambda^2\gamma} \quad (8)$$

である。ただし、式(6)および式(7)の $C_1 \sim C_8$ は積分定数である。

曲線格子桁のせん断中心軸上の任意の点におけるねじり率 θ_w は次式で与えられる。

$$\theta_w = \frac{1}{R_s} \left(\frac{d\theta_z}{d\phi} - \frac{1}{R_s} \frac{du_x}{d\phi} \right) \quad (9)$$

したがって、任意の点における変位量、すなわち、垂直変位 u_x 、たわみ角 u_x' (ただし、 $'=d/R_s d\phi$)、ねじり角 θ_z およびねじり率 θ_w は式(6)、(7)、(9)より計算することができる。図-1のような曲線桁の両端 i, j (それぞれ $\phi=0, \phi=\beta$ に対応する) における節点変位は積分定数 $C_1 \sim C_8$ で表わされ、これをマトリックス表示すると次のようになる。

$$U = AC \quad (10)$$

ここで、

$$\mathbf{U} = \{u_{xi}, u_{xi}', \theta_{zi}, \theta_{wi}, u_{xj}, u_{xj}', \theta_{zj}, \theta_{wj}\}^T \quad (11)$$

$$\mathbf{C} = \{C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8\}^T \quad (12)$$

また、 $\mathbf{A}$ は8行8列の係数マトリックスである。次に、断面力と変位との関係は断面形状が x 軸に関して対称であることから、次のように与えられる。

$$Q_x = -\frac{EJ_y}{R_s} \frac{d\kappa_y}{d\phi} - \frac{GJ_t}{R_s} \theta_w + \frac{EJ_w}{R_s^3} \frac{d^2\theta_w}{d\phi^2}, \quad M_y = -EJ_y \kappa_y$$

$$M_z = GJ_t \theta_w - \frac{EJ_w}{R_s^2} \frac{d^2\theta_w}{d\phi^2}, \quad M_w = -\frac{EJ_w}{R_s} \frac{d\theta_w}{d\phi} \quad (13a-d)$$

ここで、

$$\kappa_y = \frac{1}{R_s^2} \left(\frac{d^2 u_x}{d\phi^2} + R_s \theta_z \right) \quad (14)$$

したがって、式(6)、(7)、(9)、(14)を式(13a-d)に代入し、曲線部材要素の両端 i, j における節点力を積分定数で表現すると、次のようなマトリックス関係式が得られる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} \mathbf{C} \quad (15)$$

ここで、

$$\mathbf{F} = \{Q_{xi}, M_{yi}, M_{zi}, M_{wi}, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T \quad (16)$$

また、 $\mathbf{B}$ は8行8列の係数マトリックスである。ゆえに、式(10)と式(15)より積分定数ベクトル $\mathbf{C}$ を消去すると次式が得られる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{U} \quad (17)$$

ここで、 $\mathbf{K} = \mathbf{B} \mathbf{A}^{-1}$ とおくと、最終的に次のような剛性方程式が得られる。

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{U} \quad (18)$$

この8行8列の正方マトリックス $\mathbf{K}$ が求める剛性マトリックスである。曲線部材要素内でたとえ断面が一定であるとしても、この剛性マトリックス $\mathbf{K}$ を陽な形で求めることは非常に困難である。本研究では式(17)の計算をコンピューターの中で実行するようにプログラム化している。さらに、曲線格子桁の塑性解析を行うためには、図-2のような横桁に対応する直線部材要素の剛性マトリックスを必要とする。その結果は文献(10)と12)に詳しく述べられているので、ここでは省略する。

2. 3 降伏関数

曲線桁橋の塑性崩壊荷重に関する初期の研究では、曲げモーメント M_y とねじりモーメント M_z からなる楕円関数型の降伏関

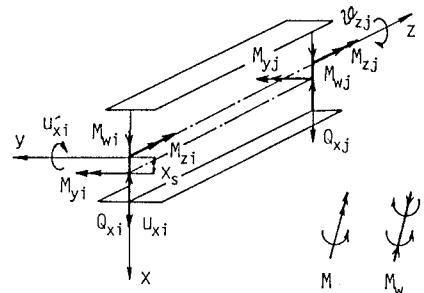


図-2 直線部材要素

数が主に使用されてきた^{4), 13), 14), 15)}。一般的に、曲線箱形部材および中実部材の断面力は M_y と M_z が支配的となり、この降伏関数の使用は妥当なものであらうと考えられる。一方、曲線 I 形部材では断面力として、 M_y と M_z に加えて曲げねじりモーメント M_w を考慮する必要がある。Kollbrunner らは曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w を含む降伏関数を求めている¹⁶⁾。今井・太田¹⁷⁾ は垂直応力度 σ には曲げモーメントと曲げねじりモーメントを、せん断応力度 τ には St. Venant のねじりモーメント T_s のみを考慮した薄肉曲線 I 形部材の降伏関数を誘導している。また、長谷部・薄木⁵⁾ は I 形断面を有限個の要素に細分割し、各微小分割要素の図心位置の応力度を求め、Von-Mises の降伏条件式を用いて降伏の判定を行っている。一般的に、薄肉断面部材が曲げ、ねじり、および曲げねじりモーメントを同時に受けるとき、その降伏関数は次のように表現できるであらう。

$$f(m, t, w) = 0 \quad (19)$$

$$\text{ここで、} \quad m = \frac{M_y}{M_{yp}}, \quad t = \frac{T_s}{T_{sp}}, \quad w = \frac{M_w}{M_{wp}}$$

添字 p は断面が完全塑性状態における全塑性モーメントを意味している。また、 T_s は St. Venant のねじりモーメントである。全ねじりモーメント M_z は式(13c)からも理解できるように、St. Venant のねじりモーメント T_s と曲げねじりによる 2 次的なねじりモーメント T_w との和である。ゆえに、部材断面は T_s と T_w によるせん断応力度が生じる。しかし、全断面塑性状態においては T_w によるせん断応力度は T_s によるものより小さいと考えられる^{17), 18)}。したがって、St. Venant のねじりモーメント T_s のみを考慮すれば十分と思われる。本研究では曲線格子桁の崩壊荷重および崩壊機構を自動的に追跡する塑性解析の簡易性を考え、以下の 4 つの降伏関数について考察する。

$$\text{Mode 1: } m^2 + t^2 = 1 \quad (20)$$

$$\text{Mode 2: } m_b^2 + |w| = 1, \quad m_b = (|M_y| - M_{yp2})/M_{yp1} \quad (21a)$$

$$m_w^2 + |w| = 1, \quad m_w = |M_y|/M_{yp1} \quad (21b)$$

$$\text{Mode 3: } m^2 + t^2 + |w| = 1 \quad (22)$$

$$\text{Mode 4: } m^2 + t^2 + w^2 = 1 \quad (23)$$

ここで、 M_{yp1} は I 形断面の上下フランジ部の全塑性曲げモーメント、 M_{yp2} はウェブ部の全塑性曲げモーメントである。ゆえに、 $M_{yp} = M_{yp1} + M_{yp2}$ が成り立っている。式(20)の降伏条件式は断面形状に関係なく、曲げとねじりを受ける場合の降伏関数の下界値を与える⁴⁾と言われ、従来の曲線桁の塑性解析に数多く用いられている。Mode 2 は Kollbrunner ら¹⁶⁾ によって誘導された降伏関数である。式(21a)は曲げモーメントが支配的な場合であり、式(21b)は曲げねじりモーメントが支配的な場合である。式(22)と式(23)はせん断ひずみエネルギー説の合成応力度の考え方¹⁹⁾から、筆者が提示する降伏関数（誘導の詳細は付録 A を参照）である。これら 4 つの降伏関数による相関曲線（相関曲面）関係が図-3 に示されている。なお、参考文献 17) の中で提案されている曲線 I 形部材の降伏関数は、降伏時において St. Venant のねじりモーメントによるせん断応力度が小さい（つまり、 $t \approx 0$ ）とき、式(22)の降伏関数と類似性があるため、ここでは省略することを付記する。

2. 4 修正された剛性マトリックス

式(18)で求められた剛性マトリックスは曲線部材の両端が他の部材端と剛結されている場合に対応するものである。しかし、部材端の結合条件が異なると、つまり、塑性ヒンジが部材端に発生すると、当然のことながら式(18)の剛性マトリックスは修正しなければならない。塑性ヒンジの発生する位置により、部材要素

の基本的な剛性マトリックスは図-4に示すように4通り考えられる。たとえば一つの例として、式(23)の降伏関数を用い、部材端の結合条件が図-4の曲線桁(a)の中の3の場合について考えてみよう。つまり、曲線部材の左端(i端)に塑性ヒンジが発生し、右端(j端)がまだ剛結されている状態の剛性マトリックス K_g について考えてみる。この場合、塑性ヒンジを有する部材i端では曲げ、ねじり、および曲げねじり変形に対して自由に変形し得る状態となる。したがって、以後の外部荷重の増加に対して、塑性ヒンジを有する部材端では曲げモーメント M_y 、ねじりモーメント M_z 、および曲げねじりモーメント M_w に抵抗できなくなる。つまり、比例荷重に対して

$$M_{yi} = 0, \quad M_{zi} = 0, \quad M_{wi} = 0 \quad (24)$$

となり、i端に塑性ヒンジをもつ節点力ベクトル F は次のように表現できる。

$$F = \{Q_{xi}, 0, 0, 0, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T \quad (25)$$

次に、式(25)の中で、塑性ヒンジ部における3つの零モーメントを処理するために、式(18)の剛性マトリックスを分割マトリックス表示すると

$$\begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_\beta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\beta} \\ K_{\beta\alpha} & K_{\beta\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_\alpha \\ U_\beta \end{Bmatrix} \quad (26)$$

ここで、

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \{Q_{xi}, Q_{xj}, M_{yj}, M_{zj}, M_{wj}\}^T, & F_\beta &= \{0, 0, 0\}^T \\ U_\alpha &= \{u_{xi}, u_{xj}, u_{xj}', \theta_{zj}, \theta_{wj}\}^T, & U_\beta &= \{u_{xi}', \theta_{zi}, \theta_{wi}\}^T \end{aligned}$$

である。さらに、 $F_\beta = 0$ であるから、式(26)の行列式を変形し、整理すると次式を得る。

$$F_\alpha = (K_{\alpha\alpha} - K_{\alpha\beta} K_{\beta\beta}^{-1} K_{\beta\alpha}) U_\alpha = K_g U_\alpha \quad (27)$$

この K_g は 5×5 の正方対称マトリックスであり、左端に塑性ヒンジを有する曲線部材要素の修正された剛性マトリックスである。さらに、右端あるいは両端に塑性ヒンジがある場合の剛性マトリックスも同様の手順で修正することが可能である。また、横桁に対応する直線部材要素についても、前述の方法で剛性マトリックスの修正ができる。ただし、式(18)および式(27)の剛性マトリックスは局所座標系における表示であるから、曲線格子桁の塑性解析には全体座標系における剛性マトリックスに座標変換する必要がある。

2. 5 解析手順

ある荷重強度 P_1 で塑性ヒンジが発生し、さらに、荷重強度が増加して P_2 となり新たな塑性ヒンジが発生するまでの解析手順について示せば次のようになる。

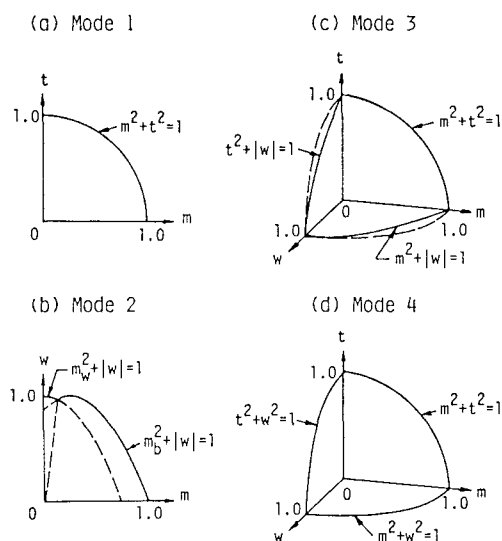


図-3 降伏関数の相関図

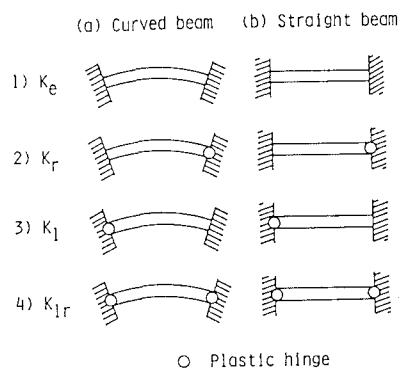


図-4 部材要素と塑性ヒンジ

いま、荷重強度 P_1 と P_2 ($P_1 < P_2$ とする) に対応する式(19)の因子 m 、 t 、 w をそれぞれ m_1 、 t_1 、 w_1 および m_2 、 t_2 、 w_2 とし、荷重増分 $dP = P_2 - P_1$ に対するそれらの増分を $dm = m_2 - m_1$ 、 $dt = t_2 - t_1$ 、 $dw = w_2 - w_1$ とすれば線形近似により dP に対する比例係数 (ここでは、荷重倍数 S と呼ぶ) とこれらの諸量との間には次のような関係が成り立つ。

$$m_2 = m_1 + S dm, \quad t_2 = t_1 + S dt, \quad w_2 = w_1 + S dw \quad (28)$$

これらを式(20)～(23)のいずれかの降伏関数に代入すれば、常に荷重倍数 S に関する次のような2次方程式が得られる。

$$AS^2 + BS + C = 0 \quad (29)$$

ここで、 A 、 B 、 C は定数である。したがって、荷重倍数 S は

$$S = (\sqrt{B^2 - 4AC} - B) / (2A) \quad (30)$$

と求められる。比例荷重の増分ごとに、曲線格子桁の各部材端における断面力を求め、式(30)の荷重倍数 S を計算する。次に、その荷重倍数 S の最小値を求めると、その最小値を得た部材端が次の新しい塑性ヒンジを発生する箇所となり、新たな荷重強度 P_2 は

$$P_2 = P_1 + S dP \quad (31)$$

と決定される。以上の解析手順を塑性崩壊機構が形成されるまで、あるいは、非常に大きな鉛直たわみ値が生じるまで繰り返し計算を行い、最終的な崩壊荷重を求める。

3. 室内実験内容

ここで述べた曲線格子桁の塑性解析の妥当性を確認するために、以下のような室内模型実験を行った。曲線格子桁の模型は図-5に示すような3本の曲線主桁と3本の直線横桁より構成されている。曲率半径の異なる3種類の供試体が製作され、その曲線格子桁の形状寸法が表-1にまとめられている。供試体に用いた材料はH形鋼の最小断面（呼称寸法、 $H \times B = 100 \times 50$ ）であり、材質はJIS G3101(SS41)材である。供試体の主桁と横桁には同一寸法のH形鋼を用いた。この理由は、主桁と横桁とのせん断中心軸を一致させるため、また、主桁の下フランジ部に生じ易い横振れ現象²⁰⁾を防ぐためである。

供試体製作後、曲げ加工および溶接による残留応力（変形）を除去するために、約620℃で4～6時間炉中で熱処理した。供試体の加熱および炉冷には2日間の工程を要した。また、供試体と同時に焼鈍した同一材料および塑性崩壊の実験後供試体より切り取った試験片を、わが国のJIS規格²¹⁾にしたがい引張強度試験を行った。写真-1は室内模型実験の

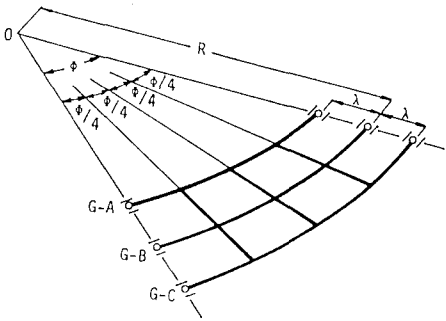
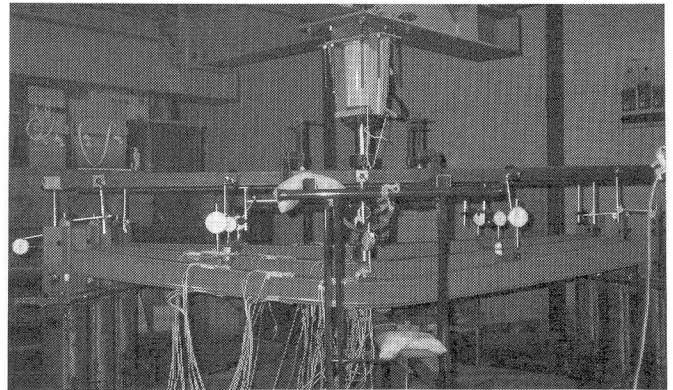


図-5 曲線格子桁の骨組形状

表-1 曲線格子桁の形状寸法

Geometry of specimen	Type A	Type B	Type C
Radius of curvature :R	3.3m	10.0m	18.5m
Spacing of main girders:λ	0.3m	0.3m	0.3m
Central angle :φ	40.0°	13.0°	7.0°

全景である。荷重は手動の油圧ジャッキにより載荷し、力計により荷重値を測定する方法を採用した。力計下部と供試体の載荷部との間には特殊な球座を作成し、油圧ジャッキおよび力計が常に鉛直方向を保ち、かつ、水平方向への移動を防ぐ工夫をした。供試体の支持条件（境界条件）は曲げに対して単純支持、ねじりに対して固定支持、曲げねじりに対して自由とした。その支承部の支持状況が写真－２に示されている。



4. 実験および数値計算結果

本研究では、前述の３種類の供試体 Type A、B、C について数値計算を行い、降伏関数による差異および室内実験結果との比較を行う。曲線格子桁の塑性解析に必要な断面諸元は表－２にまとめられている。



写真－２ 供試体の支承部

4. 1 荷重－変位曲線

図－６は最小の曲率半径を有するType A の曲線格子桁に集中荷重Pが中桁（主桁 B）中央点に作用したときの外桁（主桁 C）中央点における鉛直たわみ δ と荷重Pとの関係を示したものである。図中の●印に添えた算用数字は塑性ヒンジの発生順序を表し、○印は室内模型実験によるP－ δ の測定値である。

表－２ 曲線格子桁の断面諸元

Input data		Curved main girder	Transverse beam
Bending stiffness	: EJ_y	$3.7536 \times 10^1 \text{ tm}^2$	$3.7536 \times 10^1 \text{ tm}^2$
Torsional stiffness	: GJ_t	$1.1756 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$	$1.1756 \times 10^{-1} \text{ tm}^2$
Warping stiffness	: EJ_w	$6.3856 \times 10^{-3} \text{ tm}^4$	$6.3856 \times 10^{-3} \text{ tm}^4$
Fully plastic bending moment	: M_{yp}	$1.5969 \times 10^0 \text{ tm}$	$1.5969 \times 10^0 \text{ tm}$
Fully plastic torsional moment	: T_{sp}	$7.3448 \times 10^{-2} \text{ tm}$	$7.3448 \times 10^{-2} \text{ tm}$
Fully plastic warping moment	: M_{wp}	$1.4796 \times 10^{-2} \text{ tm}^2$	$1.4796 \times 10^{-2} \text{ tm}^2$

図－７はType B の曲線格子桁の中桁中央点に集中荷重Pが作用したとき、最大鉛直たわみ δ を生じる外桁中央点に着目したP－ δ 曲線である。さらに、図－８は最も曲率半径の大きい曲線格子桁の（Type C）の内桁中央点に集中荷重Pが作用した場合の載荷点における鉛直たわみ δ との関係を示したものである。

一般的に、降伏関数 Mode 1 により求められる塑性崩壊荷重は他の降伏関数よりもやや大きめの値を与えている。逆に、降伏関数 Mode 3 による計算結果は最も小さな崩壊荷重の値を与え、ほぼ Mode 2 による結果と似た傾向を示している。降伏関数 Mode 4 により求められたP－ δ 曲線が実験結果と比較的よく一致しているように考えられる。この結果については、さらに、以下の崩壊機構と相関曲線でも議論される。

4. 2 崩壊機構と相関曲線

図-9、10、11はそれぞれ Type A、B、C の曲線格子桁の崩壊機構と降伏関数の相関曲面における塑性ヒンジの発達状況を示している。

Mode 1 の降伏関数により計算された崩壊荷重は他の3種類の降伏関数による結果と比較して、一般的に大きい値となることを前節で述べた。この理由としては、曲線格子桁の主桁および横桁に大きな曲げねじりモーメントが生じているにもかかわらず、Mode 1 の降伏関数ではこの影響を無視しているためであると考えられる。したがって、塑性ヒンジの発生順序は他と異なり、最終的に得られる塑性崩壊機構も他と異なる結果となっている。Mode 3 の降伏関数より求められた崩壊荷重は最も小さな値となっており、Mode 2 の降伏関数による $P-\delta$ 曲線に非常によく似た数値計算結果を得ている。これは、曲げモーメント M_y による垂直応力度 σ_y および曲げねじりモーメント M_w による垂直応力度 σ_w に比べて、St. Venant のねじりモーメント T_s によるせん断応力度 τ は非常に小さいためであると考えられる。図-9、10、11より、塑性ヒンジはほぼ曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w とが連成した状態で塑性化するのに対して、ねじりモーメント T_s による影響が非常に小さい結果を得ていることから理解できる。 $t=T_s/T_s$ による影響が小さいと言うことで、もし、式(22)において $t=0$ とすれば、Mode 2 と Mode 3 の降伏関数の類似性が確かめられる。

Mode 4 の降伏関数による $P-\delta$ 曲線は前述の場合と比較すると中間的な位置を占めており、室内実験による測定結果ともよく一致している。Mode 3 より Mode 4 による解析結果が大きな崩壊荷重を与えるのは、図-3に示した相関曲面の大きさに起因する。すなわち、弾性域を意味する相関曲面の内部空間の領域が Mode 3 よりも Mode 4 の方が大きいためである。

さらに、曲げねじりモーメントの影響を含んだ降伏関数 Mode 2、3、4 による崩壊機構について調べてみると、図-9において主桁に生じる塑性ヒンジ1と2は曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w とが連成した状態で塑性化し、横桁に発生する塑性ヒンジ3と4はほとんど曲げねじりモーメント M_w のみで完全塑性状態に達していることがわかる。同じ荷重載荷の場合で、曲率半径のやや大きい Type B の場合(図-10)についてみると、横桁の塑性ヒンジはほぼ曲げねじりモーメント M_w のみで全塑性状態になってい

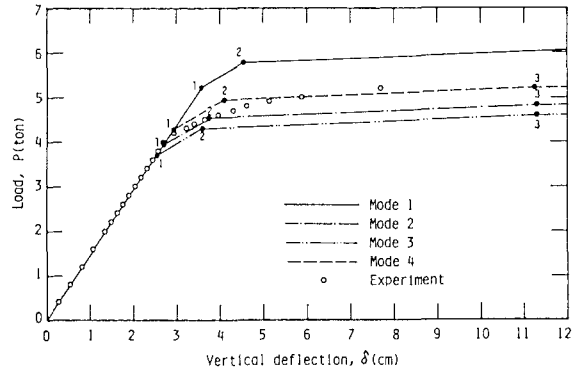


図-6 $P-\delta$ 曲線 (Type A 場合)

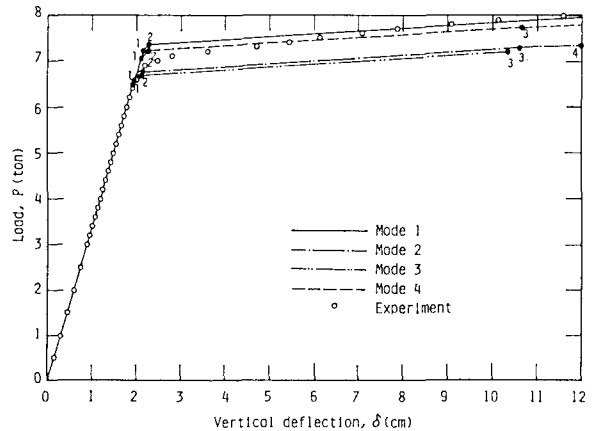


図-7 $P-\delta$ 曲線 (Type B 場合)

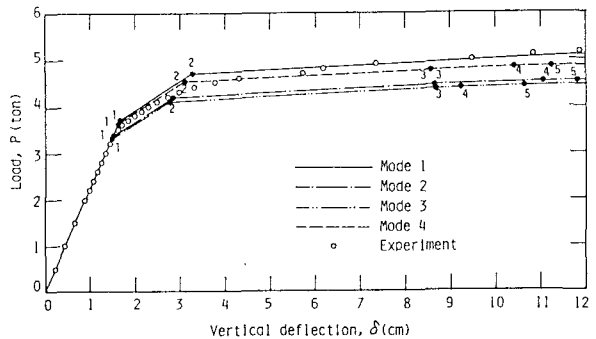
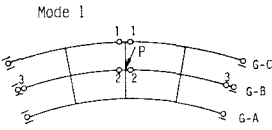
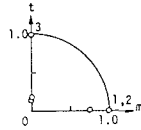


図-8 $P-\delta$ 曲線 (Type C 場合)

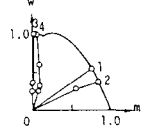
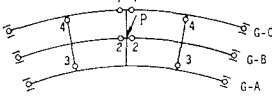
(a) Collapse mechanism



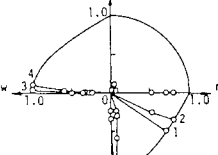
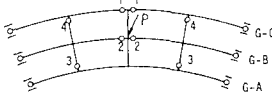
(b) Interaction surface



Mode 2



Mode 3



Mode 4

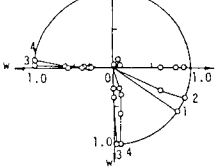
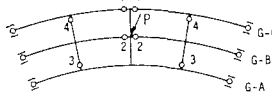


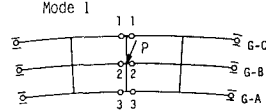
図-9 崩壊機構と相関曲面 (Type A)

る。一方、主桁に生じる塑性ヒンジは曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w が連成しているけれども、曲げモーメント M_y がやや支配的な状態で塑性域に達している。また、曲線格子桁の内桁中央点に荷重載荷した場合 (図-11) についてみると、横桁に発生する塑性ヒンジ3を除いて、他の塑性ヒンジは曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_w とが複雑に連成していることが理解できる。しかし、いずれの場合においても、塑性崩壊荷重に与える St. Venant のねじりモーメント T_w の影響は非常に小さいという結果が得られた。

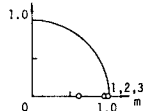
4. 3 応力分布状態

次に、比例荷重を受ける曲線格子桁の主桁および横桁断面に生ずる応力分布の推移状況について検討する。ここでは、図-11に示した相関曲面における塑性ヒンジの発達過程で、その応力分布状態が非常に複雑であった Type C の曲線格子桁について考えることにする。予め、図-11のように数値計算で求められた塑性ヒンジの発生箇所に着目して、ひずみゲージを貼付

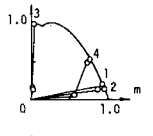
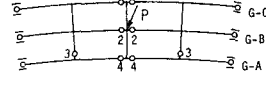
(a) Collapse mechanism



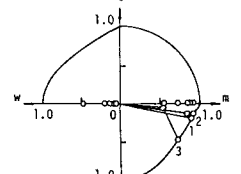
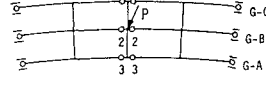
(b) Interaction surface



Mode 2



Mode 3



Mode 4

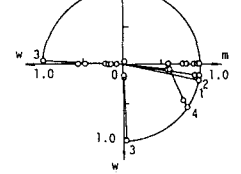
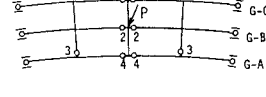
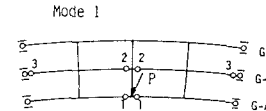
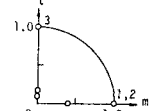


図-10 崩壊機構と相関曲面 (Type B)

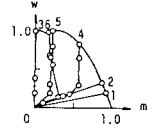
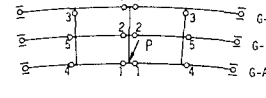
(a) Collapse mechanism



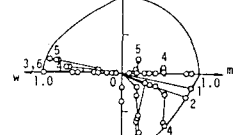
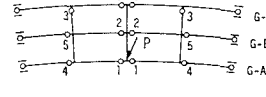
(b) Interaction surface



Mode 2



Mode 3



Mode 4

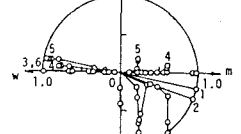
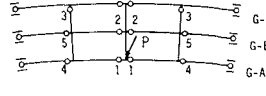


図-11 崩壊機構と相関曲面 (Type C)

した。構造および荷重が対称であることから、曲線格子桁の右側半分の7箇所を選定し、ひずみゲージの貼付箇所a～gが図-12に示されている。1箇所あたりのひずみゲージの枚数は、等間隔に上下フランジ部に5枚、ウェブ部に5枚とした。また、曲線格子桁の主桁および横桁の交差部における応力集中および応力度の乱れを避けるために、格点部より5cm離れた部分でひずみ測定を行った。

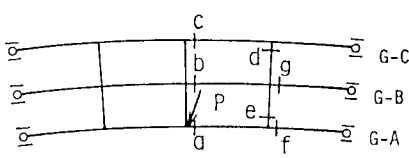


図-12 ひずみの測定箇所

図-13は測定された応力分布の推移状況を示している。載荷点aおよび中央点bにおける主桁断面の垂直応力度についてみると、弾性域においては曲げ応力度 σ_y とそり応力度 σ_w が共存しており、 σ_w に比べて σ_y の値がやや大きいことがわかる。同じく弾性域における主桁の他の部材端c、f、gについてみると、

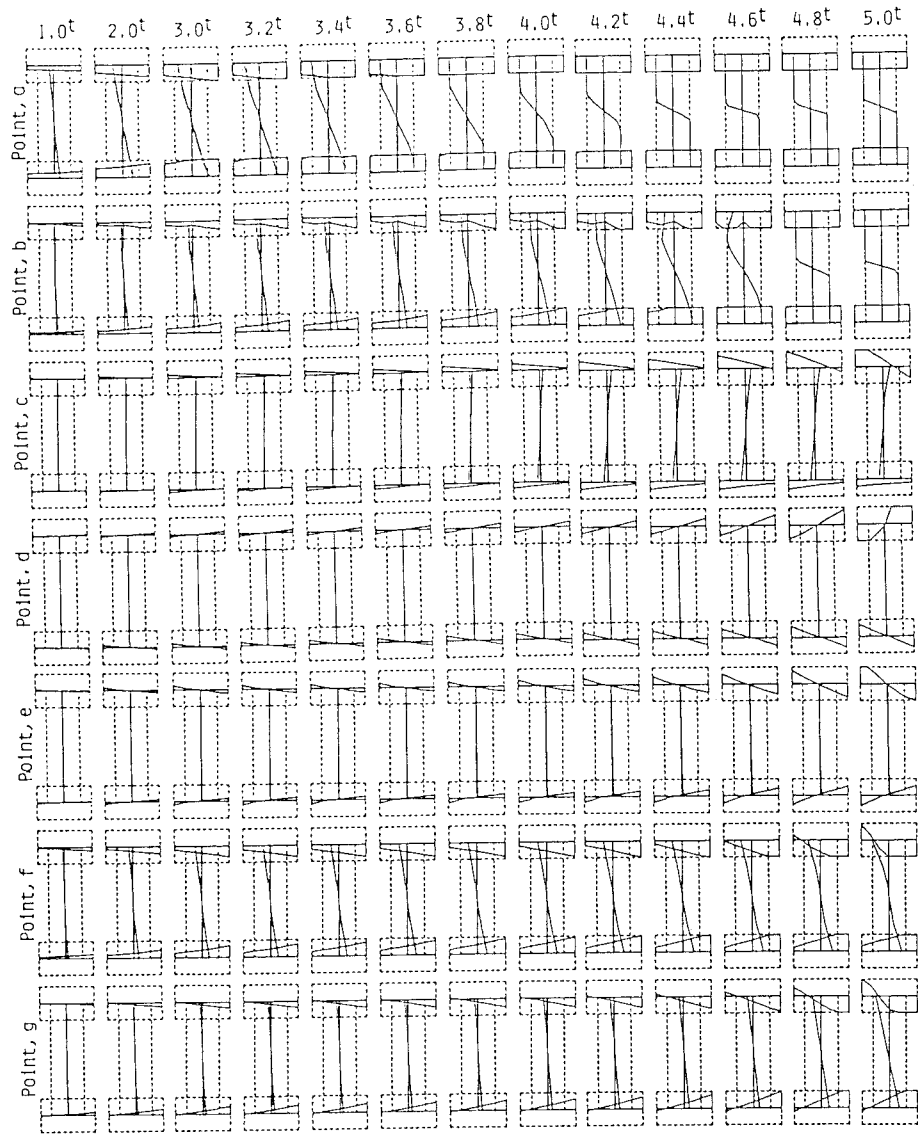


図-13 比例荷重を受ける曲線格子桁の垂直応力度分布の推移状況

曲げ応力度 σ_y とそり応力度 σ_w が複合していることがわかる。一方、横桁の部材端d、eではほとんどそり応力度 σ_w のみが生じていることがわかる。

図-11の数値計算結果より、主桁に発生する塑性ヒンジ1と2は曲げモーメントと曲げねじりモーメントが連成しているが、ほとんど曲げモーメントが支配的な状態で降伏している。このことは、塑性ヒンジ1、2に対応する図-13の着目点a、bについてみると、崩壊荷重付近の5.0 ton では上下フランジおよびウェブとも曲げ応力度のみで全断面塑性域に達しており、実験結果は上述の数値計算結果をよく再現していることが確かめられた。さらに、図-11の塑性ヒンジ4、5、6は曲げおよび曲げねじりモーメントが連成した状態で降伏しており、それらに対応する図-13の着目点f、g、cにおける実験結果は曲げ応力度 σ_y とそり応力度 σ_w とが組み合わさった状態で塑性化し、その現象をよく裏付けている。また、横桁に発生する塑性ヒンジ3は曲げねじりモーメントのみで降伏しており、それに対応する着目点dでは上フランジおよび下フランジがそり応力度 σ_w のみで全断面塑性域に達する様子がよくわかる。ただし、室内実験では上記の7箇所におけるせん断応力度 τ の測定値が非常に小さかったことを付記する。

5. あとがき

本研究では、I形断面で構成された曲線格子桁橋の塑性解析法を提案し、いくつかの降伏関数について検討した。さらに、本解析法および降伏関数の妥当性を室内模型実験により考察した。その結果、曲線格子桁の塑性崩壊荷重は曲げモーメント、ねじりモーメントおよび曲げねじりモーメントの複雑な組み合わせからなる塑性崩壊機構によって決定される。その中でも、部材端（節点）の降伏は曲げモーメントと曲げねじりモーメントによる直応力度が支配的であり、ねじりモーメントによるせん断応力度の影響は非常に小さいことがわかった。さらに、式(23)で提案されたMode 4の降伏関数は塑性解析への適用が簡明であり、その数値計算結果は室内実験結果ともよく一致していることが確認された。初期不整、ひずみ硬化、座屈、塑性域の拡がり、非線形性等による影響は今後の研究課題としたい。

（謝辞）

本研究に関して多くの貴重な助言を賜った北海道大学名誉教授渡辺昇氏および秋田大学薄木征三教授に謝意を表します。また、本研究の数値計算および実験には岡田泰三氏（現、NKK）に多大の協力を得たことに感謝します。最後に、膨大なる数値計算には北海道大学大型計算機センターのHITAC M-682とS-810 システムを利用したことを付記する。

〔付録 A〕

式(22)と式(23)の降伏関数の誘導過程を示すと以下の通りである。

曲線格子桁を構成する主桁と横桁は曲げモーメント M_y 、ねじりモーメント M_z 、曲げねじりモーメント M_{yz} を常に受けている。全塑性状態においては、曲げねじりによる2次的なねじりモーメント T_w によるせん断応力度 τ_w はSt. Venantのねじりモーメント T_z によるせん断応力度 τ_z に比較して小さい^{17)・18)}と考えられるため、ここではSt. Venantのねじりモーメント T_z のみを考慮することにする。

部材断面には曲げモーメント M_y と曲げねじりモーメント M_{yz} によるそれぞれ垂直応力度 σ_y と σ_w 、およびSt. Venantのねじりモーメント T_z によるせん断応力度 τ_z が同時に作用している。これら3個の応力度を一個の一方方向の垂直応力度 σ_v に置き換えることを考えると、せん断ひずみエネルギー説の合成応力度¹⁹⁾によれば

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_y^2 + \sigma_w^2 + 3\tau_z^2} \quad (A-1)$$

と表現できるであろう。したがって、合成応力度 σ_v が降伏垂直応力度（降伏点） σ に達すると

$$\sigma_v = \sigma_o \quad (\text{A-2})$$

となり、これを式(A-1)に代入することにより次式が得られる。

$$\left(\frac{\sigma_v}{\sigma_o}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_w}{\sigma_o}\right)^2 + \left(\frac{\tau_s}{\sigma_o/\sqrt{3}}\right)^2 = 1 \quad (\text{A-3})$$

一方、応力度と断面力との関係は次のように1次の関係式で表される²²⁾。

$$\sigma_v = \frac{M_v}{J_v} y, \quad \sigma_w = \frac{M_w}{J_w} \omega, \quad \tau_s = \frac{T_s}{J_t} t \quad (\text{A-4})$$

ここで、 y は重心からの距離、 ω はそり関数、 t は板厚である。また、降伏せん断応力度 τ_o は Mises-Henckyの降伏条件より²³⁾

$$\tau_o = \sigma_o/\sqrt{3} \quad (\text{A-5})$$

である。したがって、全塑性曲げモーメント M_v 、および全塑性曲げねじりモーメント M_w は降伏垂直応力度 σ_o と、全塑性ねじりモーメント T_s は降伏せん断応力度 τ_o とそれぞれ1次の関係式で表されることから、式(A-3)より次式が得られる。

$$\left(\frac{M_v}{M_{vp}}\right)^2 + \left(\frac{M_w}{M_{wp}}\right)^2 + \left(\frac{T_s}{T_{sp}}\right)^2 = 1 \quad (\text{A-6})$$

ゆえに、式(23)が求められた。次に、式(22)の降伏関数はKollbrunnerら¹⁶⁾により提案された式(21)の降伏関数との類似性を考え、また、図-3に示した相関曲面の内部空間の領域を式(23)の降伏関数のものより小さくし、数値計算において塑性崩壊荷重に与える影響を検討するために提示したものである。

参 考 文 献

- 1) Culver, C.G., Dym, C.L. and Vddin, T.: Web Slenderness Requirements for Curved Girders, Proc. of ASCE, Vol. 99, No. ST3, pp.417-430, 1973.
- 2) Fukumoto, Y. and Nishida, S.: Ultimate Load Behavior of Curved I-Beams, Proc. of ASCE, Vol. 107, No. EM2, pp.367-385, 1981.
- 3) 中井 博・北田俊行・大南亮一: 曲線桁橋腹板の曲げ強度に関する実験的研究、土木学会論文報告集、第340号、pp.19-28, 1983年.
- 4) 米沢 博・三上市蔵: 曲線格子桁の極限解析について、土木学会論文集、第132号、pp.18-26, 1966年.
- 5) 長谷部薫・薄木征三: 曲線格子桁の弾塑性解析と実験、土木学会第41回年次学術講演会講演概要集、第1部、pp.97-98、1986年.
- 6) 今井富士夫・太田俊昭・大塚久哲: 横構を有する並列曲線I桁橋の崩壊挙動に関する研究、構造工学論文集、Vol. 32A、pp.411-419、1986年.
- 7) 田中 尚: 構造物の極限解析、彰国社、1969年.
- 8) 石川信隆・大野友則: 入門・塑性解析と設計法、森北出版、1988年.
- 9) 薄木征三・稼農知徳: 薄肉断面曲線材の変形法による解析、土木学会論文報告集、第235号、pp.29-39、1975年.

- 10) 渡辺 昇・稼農知徳・藤井裕司：曲げねじれ剛性をもった曲線桁橋の剛性マトリックス法による解析、土木学会論文報告集、第218号、pp.1-8、1973年。および討議；西野文雄・倉方慶夫：土木学会論文報告集、第229号、pp.117-118、1973年。
- 11) 深沢泰晴：薄肉曲線材の静力学的解析に関する基礎的理論、土木学会論文集、第110号、pp.30-51、1964年。
- 12) 鷹羽信勝・成岡昌夫：変形法による任意形状の薄肉断面格子桁の解析、土木学会論文集、第178号、pp.1-9、1970年。
- 13) Yoo, C.H. and Heins, C.P.: Plastic Collapse of Horizontally Curved Bridge Girders, Proc. of ASCE, Vol. 98, No. ST4, pp.899-914, 1972.
- 14) Badawy, H.E.I. and Jordaan, I.J.: Plastic Analysis of Curved Beams under Point Loads, Proc. of ASCE, Vol. 103, No. ST7, PP.1429-1445, 1977.
- 15) Jackson, N.: The Automatic Calculation of Collapse Loads for Circular-Arc Beams, The Structural Engineer, Vol. 43, No. 12, pp.413-421, 1965.
- 16) Kollbrunner, C.F. and Hajdin, N.: Dünnwandige Stäbe, Band 2, Springer-Verlag, 1975.
- 17) 今井富士夫・太田俊昭：曲線 I 形部材の降伏関数に関する考察、土木学会論文集、第380号、I-7、pp.349-354、1987年。
- 18) 鈴木敏郎・木村 衛：H形鋼の弾塑性捩り、日本建築学会論文報告集、第180号、pp.13-18、1971年。
- 19) 渡辺 昇：橋梁工学、朝倉書店、1990年。
- 20) 稼農知徳：連続曲線格子桁橋の理論解析と実験的研究、北海道大学工学部研究報告、第57号、pp.17-50、1970年。
- 21) 日本材料試験協会編：材料試験便覧、1957年。
- 22) 渡辺 昇：曲線げたの理論と計算、技報堂、1967年。
- 23) 日本建築学会：鋼構造物塑性設計指針、1981年。

(1992年9月21日受付)