

弾性散乱エネルギーの計算と材料の不均質性評価への応用

APPLICATION OF ELASTODYNAMIC SCATTERING ENERGY
TO INHOMOGENEITY EVALUATION OF MATERIALS

北原道弘* 加藤昇治** 中川克也***
 Michihiro KITAHARA, Syoji KATO and Katsuya NAKAGAWA

The problem formulation for scattering of a plane time-harmonic wave by a compact inhomogeneity in a homogeneous, isotropic, linearly elastic solid is reduced to the solution of a system of singular integral equations over the inclusion-matrix interface. Once the interface fields have been determined, the scattered far-field is obtained by the use of elastodynamic representation integrals. Of particular interest is the scattering cross-section. The results can be used to determine the attenuation of a longitudinal wave propagating in a solid with a dilute random distribution of compact inhomogeneities of the shape analyzed in this paper.

1. はじめに

超音波を利用して非破壊的に物質の内部構造を評価しようとする場合、内部構造の不均質性に起因して散乱した弾性散乱波動場を吟味する必要がある。ここでは、均質、等方、線形な弾性母材内の不均質部の存在により全方向に散乱された散乱波動が有するエネルギー量に着目する。不均質部が母材内に分布して存在する場合、この弾性散乱エネルギーの総量は固体内超音波の散乱による減衰量に関係することから、逆に、超音波の散乱減衰量を計測して材料の不均質性の評価に応用することが考えられる。これを可能とするためには、固体内弾性波の不均質部による散乱エネルギーの算定法および散乱エネルギーと散乱減衰の関係が明確になっていることが必要となる。

母材内に分布して存在する不均質体による散乱波動の解析は、厳密には不均質体の相互干渉を考慮に入れた多重散乱問題となる。この多重散乱の影響を取り入れた波動解析は Twersky¹⁾, Varadan 等²⁾ によって行われており、特に Varadan 等²⁾ は T-マトリックス法を利用して回転楕円体状散乱体による散乱減衰の効果を算定している。一方、近似的にはあるが、多重散乱の影響を無視し、単一の不均質体による 2 次元散乱解析をもとに散乱エネルギーを計算し、平均的な意味で散乱減衰量を算定することにより、不均質性を推定しようと試みているものに Nair, Hsu and Rose³⁾ の研究がある。また、体積分の形で散乱場の積分表現を導出し、ボルン近似、準静的近似と組み合わせることにより、散乱エネルギーを算定しているものに Gubernatis⁴⁾ による研究があり、動的な散乱問題を解く必要がなく単なる求積だけを要するという意味で、低周波数域の散乱エネルギーの算定に非常に適した方法となっている。

ここでは、3 次元母材内に任意形状の不均質体が疎に分布している場合を想定し、単一の不均質体による散乱波動解析をもとにした不均質性の評価法について考える。このとき、波動解析法としては境界要素法を採用し、散乱エネルギー量を算定するために必要となる散乱場の表現には、不均質散乱体による遠方散乱場の境界型積分表現を利用する。これにより、多重散乱効果は無視かつ数値的という条件は付くものの、散乱体の動的 3 次元効果を考慮に入れた散乱エネルギーの算定が可能になると思われる。散乱エネルギーを算定するに当たり、本論文では上記境界要素法という数値解析手法と弾性光学定理と呼ばれる近似エネルギー評価式を採用するため、解析解が存在する球形インクルージョンによる散乱問題について、弾性光学定理と数値解析手法の適用可能域の確認、および散乱エネルギーの周波数依存性についてその概略を把握した後、ウィスカー状散乱体に対する散乱エネルギーの数値解析例を示す。最後に、不均質部が母材内に疎に分布した場合について、散乱エネルギー量と散乱減衰量の間に存在する近似関係式について触れ、材料の不均質性の一評価法について考える。

* 工博 東海大学助教授 海洋学部海洋土木工学科 (〒 424 静岡県清水市折戸 3-20-1)
 ** 東海大学 海洋学部海洋土木工学科 (〒 424 静岡県清水市折戸 3-20-1)
 *** 理修 (株)ユニテック 主任研究員 (〒 210 神奈川県川崎市川崎区宮本町 5-4)

2. 弾性散乱振幅

超音波による非破壊評価においては、入射波を材料内部に与え、材料内の不均質部により散乱された散乱波の性質を吟味することにより、不均質部の性状を推定することになる。このとき、散乱波動の観測点は対象とする不均質部の代表長に比べて遠方に位置するのが普通である。ここでは、母材を均質、等方、線形な弾性体と仮定し、母材内に存在する不均質部の表面及びこの表面上の物理量と遠方散乱場の間に成立する関数関係について導出・整理し、後に不均質部による散乱エネルギー量を算定する際の準備とする。

散乱波 u^S を全変位 u から与えられた入射波 u^I を差し引いたものとして次のように定義する。

$$u_i^S(\mathbf{x}) = u_i(\mathbf{x}) - u_i^I(\mathbf{x}) \quad (1)$$

このとき、散乱波 u^S の積分表現は次のようになる。

$$u_i^S(\mathbf{x}) = \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) t_{ij}(\mathbf{y}) dS_y - \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) u_j(\mathbf{y}) dS_y \quad (2)$$

上式において、 S が不均質部の表面であり、基本解 $U(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ は、3次元問題の場合、次のようになる。

$$U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi\mu} \left[\frac{e^{ik_T r}}{r} \delta_{ij} + \frac{1}{k_T^2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \frac{e^{ik_T r}}{r} - \frac{e^{ik_L r}}{r} \right\} \right] \quad (3)$$

ここに、 $k_L (= \omega/C_L)$ と $k_T (= \omega/C_T)$ は縦波と横波の波数、 r は波動の観測点 $\mathbf{x}$ と散乱体表面上の2次波源 $\mathbf{y}$ の距離 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である (Fig.1 参照)。表面力核 $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ の表現は

$$T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\{\lambda U_{im,m} \delta_{jk} + \mu U_{ij,k} + \mu U_{ik,j}\} n_k(\mathbf{y}) \quad (4)$$

となる。カンマ $(\cdot)_{,i}$ は点 $\mathbf{x}$ における座標成分 x_i による微分を表す。

いま、Fig.1 を参照して、次のように遠方近似⁵⁾を導入する。

$$r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \sim x - \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y} \quad (5a)$$

$$\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}/x, \quad x = |\mathbf{x}| = (x_i x_i)^{1/2} \quad (5b)$$

ここで、 $\hat{\mathbf{x}}$ は座標原点から遠方の観測点 $\mathbf{x}$ に向く単位ベクトルである。いま、基本解の主要項 $\exp(ik_\alpha r)/r$ は次のように書ける。

$$\frac{e^{ik_\alpha r}}{r} \sim \frac{e^{ik_\alpha x}}{x} e^{-ik_\alpha \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} \quad (\alpha = L, T) \quad (6)$$

この基本解の主要項の遠方表現を基本解と表面力核の表現 (3), (4) に代入して微分を実行し、さらに散乱波の積分表現 (2) に代入する。結果を整理して、次のように散乱波の遠方表現を得る。

$$\begin{aligned} u_i^S(\mathbf{x}) &\sim u_i^{SL}(\mathbf{x}) + u_i^{ST}(\mathbf{x}) \\ &= A_i(k_L) \frac{e^{ik_L x}}{x} + B_i(k_T) \frac{e^{ik_T x}}{x} \end{aligned} \quad (7)$$

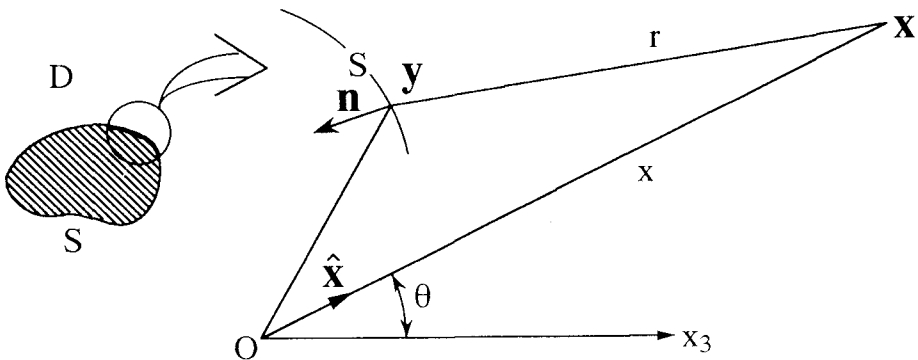


Fig.1 Relation of field point $\mathbf{x}$ and source point $\mathbf{y}$.

ここに、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は次のようである。

$$A_i(k_L) = \hat{x}_i \hat{x}_j f_j(k_L) \quad (8a)$$

$$B_i(k_T) = (\delta_{ij} - \hat{x}_i \hat{x}_j) f_j(k_T) \quad (8b)$$

上式中のベクトル $\mathbf{f}(k_\alpha)$ が散乱体の形状、散乱体の物性、散乱体表面上の境界条件、伝播母材の物性などを反映する項であり、具体的には次のようである。

$$f_j(k_\alpha) = \frac{1}{4\pi\rho c_\alpha^2} \int_S [ik_\alpha \lambda \hat{x}_j u_k(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) + ik_\alpha \mu \{u_j(\mathbf{y}) n_k(\mathbf{y}) + u_k(\mathbf{y}) n_j(\mathbf{y})\} \hat{x}_k + t_j(\mathbf{y})] e^{-ik_\alpha \hat{x} \cdot \mathbf{y}} dS_y, \quad (\alpha = L, T) \quad (9)$$

ここに、 $n_j(\mathbf{y})$ は散乱体表面上の単位外向き法線ベクトルである。式 (8) より、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は次の性質を有する。

$$\hat{\mathbf{x}} \times \mathbf{A} = \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (10a, b)$$

これより、遠方において、 $\mathbf{A}$ は波動の縦波成分を、 $\mathbf{B}$ は横波成分を表していることがわかる。さらに、式 (7) より、 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は幾何学的な意味の波動の減衰項 $1/x$ を除いた散乱波動の振幅を意味し、 $\mathbf{A}$ が縦波の散乱振幅ベクトル、 $\mathbf{B}$ が横波の散乱振幅ベクトルである (Fig.2 参照)。

式 (7) ~ (9) より、散乱ベクトル $f_i(k_\alpha)$ が決まれば縦波と横波の散乱振幅 A_i と B_i が決まり、さらには遠方散乱場 u_i^S が決まる。式 (9) をもとに、ベクトル $f_i(k_\alpha)$ を求めるためには、不均質部の形状 S 、入射波の波数 $k_\alpha (= \omega/C_\alpha)$ 、母材の物性 λ, μ, ρ 、観測点の方向 $\hat{\mathbf{x}}$ を与え、不均質部の表面上の境界条件を満足するように不均質部表面上の変位 u_i と表面力 t_i を決めればよい。ここでは、不均質部を母材と弾性的性質が異なる均質、等方、線形なインクルージョンと仮定し、不均質部の表面上では変位と表面力の連続性を次のように仮定する。

$$u_i(\mathbf{x}) = \bar{u}_i(\mathbf{x}), \quad t_i(\mathbf{x}) = -\bar{t}_i(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \quad (11)$$

ここに、 u_i と t_i は母材側の変位と表面力、 $\bar{u}_i$ と $\bar{t}_i$ は不均質部側の変位と表面力である。不均質部の表面上で変位と表面力の連続性 (11) を満足する変位と表面力を決定するために、ここでは境界要素法を採用する。境界要素法については既に多くの論文があり (例えば、文献 6))、その詳細については省略する。不均質部の特性を満足するように境界上の変位と表面力を連続条件 (11) を用いて決定すれば、式 (7) ~ (9) より、遠方散乱場 u_i^S を決めることができ、遠方における応力は散乱場を微分することにより次のように求まる。

$$\sigma_{ij}^S \sim i\lambda k_L A_k \hat{x}_k \delta_{ij} M(k_L x) + i\mu [k_L (A_i \hat{x}_j + A_j \hat{x}_i) M(k_L x) + k_T (B_i \hat{x}_j + B_j \hat{x}_i) M(k_T x)] \quad (12a)$$

ここに

$$M(k_\alpha x) = \frac{e^{ik_\alpha x}}{x} \quad (\alpha = L, T) \quad (12b)$$

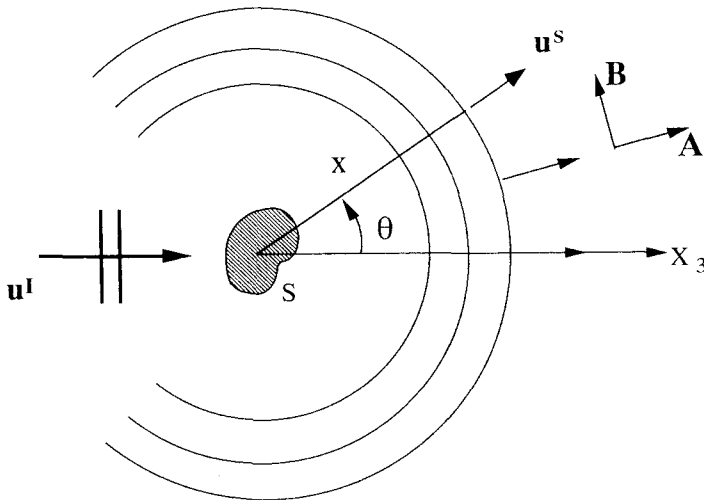


Fig.2 Incident wave and scattered far field.

3. 弾性散乱断面積

不均質部の存在により全方向に散乱された散乱エネルギー量を、入射波の進行方向に垂直な断面に投影し、これを断面積の次元で表示したものは散乱全断面積と呼ばれている⁷⁾。ここでは、散乱全断面積の定義を要約した後、前節で導いた弾性波動場に対する遠方散乱場の表現 (7) ~ (9) の利用を意図して、弾性散乱全断面積の具体的計算に便利のように散乱全断面積の計算式を整理する。

波動の伝播方向を示す単位ベクトル $\hat{\mathbf{x}}$ に垂直な単位面積、単位時間当たりのエネルギー（インテンシティー）は次のように書ける。

$$I = \hat{x}_i \sigma_{ij} \dot{u}_j \quad (13)$$

ここに、 σ_{ij} は応力、 $\dot{u}_j$ は変位の時間微分である。いま、入射波として x_3 軸方向に進む平面波を考えれば、この入射波 $\mathbf{u}^I$ が有するインテンシティーは

$$I^I = \sigma_{3j}^I \dot{u}_j^I \quad (14)$$

となる。単位法線 $\hat{\mathbf{x}}$ を持つ表面 A を通過する散乱波 $\mathbf{u}^S$ が有する単位時間当たりのエネルギー（パワー）は、散乱波成分について式 (13) を積分して次のようになる。

$$P^S = \int_A \hat{x}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S dA \quad (15)$$

いま、弾性散乱全断面積 $P(\omega)$ を、入射波の時間平均インテンシティー $\langle I^I \rangle$ に対する全方向に散乱された散乱波の時間平均パワー $\langle P^S \rangle$ の比として、次のように定義する。

$$P(\omega) = \frac{\langle P^S \rangle}{\langle I^I \rangle} \quad (16)$$

ここに、 ω は角振動数であり、 $\langle \cdot \rangle$ は次の時間平均を表す。

$$\langle g \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T g(t) dt \quad (T: \text{周期}) \quad (17)$$

散乱全断面積 (16) を具体的に計算するために有用な表現について考える。波動観測点を示す位置ベクトルを $\mathbf{x} = (x, \theta, \phi)$ とすれば、遠方における面積素 dA は $dA = x^2 d\Omega$ 、 $d\Omega$ は立体角、と書けることから、散乱全断面積の立体角による微分量 $dP/d\Omega$ は次のようになる。

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\langle x^2 \hat{x}_i \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S \rangle}{\langle I^I \rangle} \quad (18)$$

散乱波による遠方変位 u_j^S と応力 σ_{ij}^S の表現、式 (7) と式 (12) より、遠方において $u_j^S \sim 1/x$ 、 $\sigma_{ij}^S \sim 1/x$ であるから、上式の表現 $dP/d\Omega$ は遠方において有限値を持つことがわかる。さらに、時間因子を $\exp(-i\omega t)$ とする時間調和な場を仮定すると、現実の意味ある物理量の評価には実数部を取って評価することの必要性から、式 (18) の分子の $\langle \sigma_{ij}^S \dot{u}_j^S \rangle$ は実際には次のように書ける。

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}[\sigma_{ij}^S(\mathbf{x}, t)] \text{Re}[\dot{u}_j^S(\mathbf{x}, t)] \rangle &= \frac{1}{4} \langle [\sigma_{ij}^S(\mathbf{x}, t) + \sigma_{ij}^{S*}(\mathbf{x}, t)] [\dot{u}_j^S + \dot{u}_j^{S*}] \rangle \\ &= -\frac{\omega}{2} \text{Im}[\sigma_{ij}^S(\mathbf{x}, \omega) u_j^{S*}(\mathbf{x}, \omega)] \end{aligned} \quad (19)$$

これより、式 (18) は次のように変形できる。

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\frac{\omega}{2} \frac{\text{Im}[x^2 \hat{x}_i \sigma_{ij}^S(\mathbf{x}, \omega) u_j^{S*}(\mathbf{x}, \omega)]}{\langle I^I \rangle} \quad (20)$$

ここで、 u_j^{S*} は u_j^S の複素共役であり、 $\text{Im}[\cdot]$ は $[\cdot]$ の虚数部である。

いま、入射波を具体的に x_3 軸方向に伝播する単位振幅の平面縦 (L) 波とする。

$$\mathbf{u}^I = \mathbf{e}_3 \exp[i(k_L x_3 - \omega t)] \quad (21)$$

この入射波の時間平均インテンシティーは、式 (14) より

$$\langle I^I \rangle = -\frac{\omega}{2} \text{Im}(\sigma_{ij}^I u_j^{I*}) = -\frac{\omega}{2} k_L (\lambda + 2\mu) \quad (22)$$

となる。また、式 (20) の分子は、遠方における散乱波と応力を表す式 (7) と (12) に散乱振幅の性質 (10) を考慮して、次のようになる。

$$\text{Im}[x^2 \hat{x}_i \sigma_{ij}^S u_j^{S*}] = k_L(\lambda + 2\mu) |\mathbf{A}|^2 + k_T \mu |\mathbf{B}|^2 \quad (23)$$

上式 (22) と (23) を式 (20) に代入して、散乱振幅 A_i と B_i で表示した散乱微分断面積の表現を得る。

$$\frac{dP(\omega)}{d\Omega} = |\mathbf{A}|^2 + \frac{k_L}{k_T} |\mathbf{B}|^2 \quad (24)$$

ここに、縦波と横波の散乱振幅 $\mathbf{A}$ と $\mathbf{B}$ は式 (8) と (9) に定義されており、縦波と横波の波数比 k_L/k_T はポアソン比だけの関数である。

$$k_L/k_T = \{(1 - 2\nu)/2(1 - \nu)\}^{1/2} \quad (25)$$

弾性散乱全断面積は、式 (24) を全立体角について積分することにより求める。

$$P(\omega) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{dP}{d\Omega} \sin \theta d\theta d\phi \quad (26)$$

具体的には、微分断面積 $dP/d\Omega$ を式 (24) により求め、上式 (26) の積分は数値的に実行することが可能である。

上記弾性散乱全断面積の計算式 (24) と (26) は散乱全断面積の定義式 (16) の直接的な変形である。遠方において、散乱波が有するパワーが散乱波と入射波の干渉項により生じることを利用して、近似的にはあるが、幾何光学における光学定理と同型の非常にシンプルな弾性散乱全断面積の表現を導出しているものに文献 7) と 8) がある。この結果を、式 (21) に示した x_3 軸方向に伝播する単位振幅の平面縦波入射の場合について書き下すと次のようになる。

$$P(\omega) = \frac{4\pi}{k_L} I_m \tilde{A}_3(0) \quad (27a)$$

ここに、前方平均散乱振幅 $\tilde{A}_3(0)$ は次のように定義されている。

$$\tilde{A}_3(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} A_3(k_L, \theta = 0, \phi) d\phi \quad (27b)$$

上式中の $A_3(k_L, \theta = 0, \phi)$ には、式 (8a) と (9) に導いた縦波の散乱振幅 $A_i(k_L)$ を利用することができる。これは、式 (8a) の散乱振幅において、入射波の進行方向に向けて決めた前方 ($\theta = 0, \theta$ は正の x_3 軸から計った散乱角) 散乱振幅の入射波成分と同一の偏角成分 $A_3(k_L)$ である。

4. 計算例

ここでは、境界要素法と弾性版光学定理 (27) を用いてウィスカー状不均質体による弾性散乱全断面積の一計算例を示す。ただ、周波数の増加に応じて必要となる境界要素法のメッシュの概略寸法 (概略の要素数) と弾性版光学定理の適用範囲を把握しておくために、級数による解析的表現の作成が可能な球形散乱体の散乱全断面積について、まず考える。3 次元波動解析では、適切なメッシュ幅と要素数の選択は、使用する計算機の容量と速度に関係し現実問題として重要となるためである。

不均質部が球形と仮定できる場合、散乱場 u_j^S を球ハンケル関数の線形結合として級数の形で表現することが可能である。この表現は、文献 9) の Ch.6 に詳しいので、ここでこの表現を書き下すことは省略するが、この表現を利用して散乱全断面積の算定に必要な遠方散乱場および散乱振幅の表現として、球ハンケル関数の漸近形を利用した級数表現を作ることができる。Fig.3 は半径 a の球形キャビティに対する散乱全断面積を定義式 (26) と (24) に基づいて計算した結果をまとめたものである。縦軸が散乱全断面 P を入射波の散乱体への投影面積 πa^2 で除して無次元化したもの、横軸は半径 a で無次元化した縦波の波数 ak_L である。パラメータは母材のポアソン比 ν である。母材のポアソン比が小さい場合、散乱全断面積はほぼ $ak_L = 2$ まで単調に増加し、その後 ak_L が増加してもほとんど変化しないことがわかる。ポアソン比が 0.5 に近づくにつれて明確なピークが現れる。散乱全断面積は、このピークに至るまでは単調増加し、その後、単調に減少し、一定値に近づく。このピークの位置は、ポアソン比の増加につれて低周波側 (小さい ak_L) に移動する。例えば、ポアソン比 $\nu = 0.35$ の場合、散乱全断面積のピーク位置はほぼ $ak_L = 1.5$ である。Fig.4 は不均質部が半径 a の球形インクルージョンである場合の散乱全断面積を整理したものである。比較のために、母材のポアソン比が $\nu = 0.35$ の場合の球形キャビティに対する結果 (黒丸) も挿入してある。図中の Soft, Hard1, Hard2 とは、次のような物性比の場合である。

Cavity	: $E = 1.0$	, $\nu = 0.35$	, $\rho = 1.0$
Soft	: $\bar{E}/E = 0.21$	, $\bar{\nu} = 0.31, \nu = 0.30$	, $\bar{\rho}/\rho = 0.22$
Hard1	: $\bar{E}/E = 1.93$	, $\bar{\nu} = 0.15, \nu = 0.35$	, $\bar{\rho}/\rho = 1.99$
Hard2	: $\bar{E}/E = 5.00$	, $\bar{\nu} = 0.30, \nu = 0.30$	, $\bar{\rho}/\rho = 1.00$

ここで、 $\bar{E}$ 、 $\bar{\nu}$ 、 $\bar{\rho}$ がインクルージョン側のヤング率、ポアソン比、密度であり、 E 、 ν 、 ρ が母材側である。Fig.4 より、軟らかいインクルージョンの場合、散乱全断面積は明確な第 1 ピークの後、一定値のまわりにはほぼ一定周期の振動を繰り返していることがわかる。これらピーク位置は、インクルージョンの伸縮モードに対する固有周期にほぼ対応

している。少し硬めのインクルージョンの場合 (Hard: $\bar{E}/E = 1.93$)、小さな振動を繰り返しながら全体的には増加の傾向を示している。Fig.4 には $ak_L = 6.0$ までの散乱全断面積しか図示していないが、この $\bar{E}/E = 1.93$ に対する散乱全断面積も $ak_L = 7.7$ 付近でピーク値 $P/\pi a^2 \approx 4.4$ を有し、その後 ak_L の増加と共に小さな振動を伴う減少傾向にある。さらに硬いインクルージョンの場合 (Hard: $\bar{E}/E = 5$)、散乱全断面積は単調増加、単一ピークの様相を呈する。インクルージョン内の固有振動的な運動が励起されにくいためと考えられる。

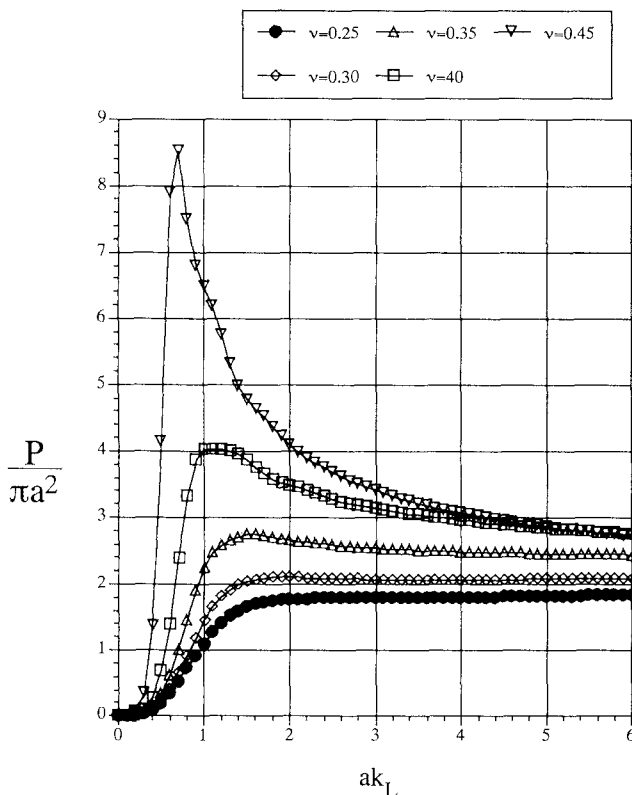


Fig.3 Total scattering cross sections for a spherical cavity.

Table 1 に式 (24) と式 (26) を用いた定義に基づく散乱全断面積の計算結果と式 (27) を用いた弾性版光学定理に基づく散乱全断面積の計算結果の比較を示す。Table 中の数値は、Fig.4 の $ak_L = 1.0, 2.0, 3.0$ における $P/\pi a^2$ の値を Cavity 及び Soft, Hard1, Hard2 の 3 種類のインクルージョンについて整理したものである。Table 中、Definition の列が定義に基づいて計算した結果、Optical theorem の列が光学定理に基づいて計算した結果である。無次元化波数 $ak_L = 1.0, 2.0, 3.0$ すべての場合において、光学定理 (27) による結果は定義に基づいた結果とよく一致している。Fig.4 作成過程において、すべての波数で両結果を打ち出しているが、Table 1 と同様に、弾性版光学定理には近似が含まれているにも係わらず、実質的に両者の結果はよく一致している。また、境界要素法により同じ問題を解析し、散乱全断面積を比較した結果、未知量を要素内で一定近似とする場合で、比較的低周波数域においても一波长中に要素が 12 個程度は含まれるように要素の最大寸法を選ぶ必要があることがわかった。これは、散乱波動場を計算する際の通常の日安、8 要素、よりもやや厳しめの結果である。

球形以外の形状の散乱体について、散乱振幅を陽に書き下すことは一般に難しい。この場合、式 (9) における散乱ベクトル f_i を数値的に計算し、散乱振幅を式 (8) により求め、散乱全断面積の算定を式 (26) あるいは式 (27) により行うことになる。以下の計算では評価が簡単な式 (27) を用いた。散乱ベクトル f_i に含まれる不均質体表面上の u_i と t_i を境界要素法により求め、上記手順により散乱全断面積を計算した一例を示したのが Fig.5 と Fig.6 である。Fig.5 が解析対象としたウィスカー状不均質体モデルである。正確な幾何形状は、円柱の長さ $2b$ と半径 a の比を $2b/a = 8$ とする円柱部分の両側に半径 a の半球が取り付けられた細長い形状であり、 x_2 軸が長軸と一致するように位置している。物性として、次の場合を考えた。 $\bar{E}/E = 5$, $\nu = \bar{\nu} = 0.3$, $\bar{\rho}/\rho = 1.0$ 。入射波は平面縦 (L) 波とし、進行方向として長軸 (x_2 軸) 方向と短軸 (x_3 軸) 方向の 2 通りを考えた。Fig.6 は、この円柱状不均質体に対する散乱全断面積を円柱部分の半径 a で無次元化した縦波の波数 ak_L に対して図化した結果である。縦軸の P_n は、入射波の進行方向に直交する散乱体の断面積で無次元化した弾性散乱断面積であり、入射波が長軸 (x_2 軸)、短軸 (x_3 軸) 方向に伝播するそれぞれの場合について P_n は次のようである。

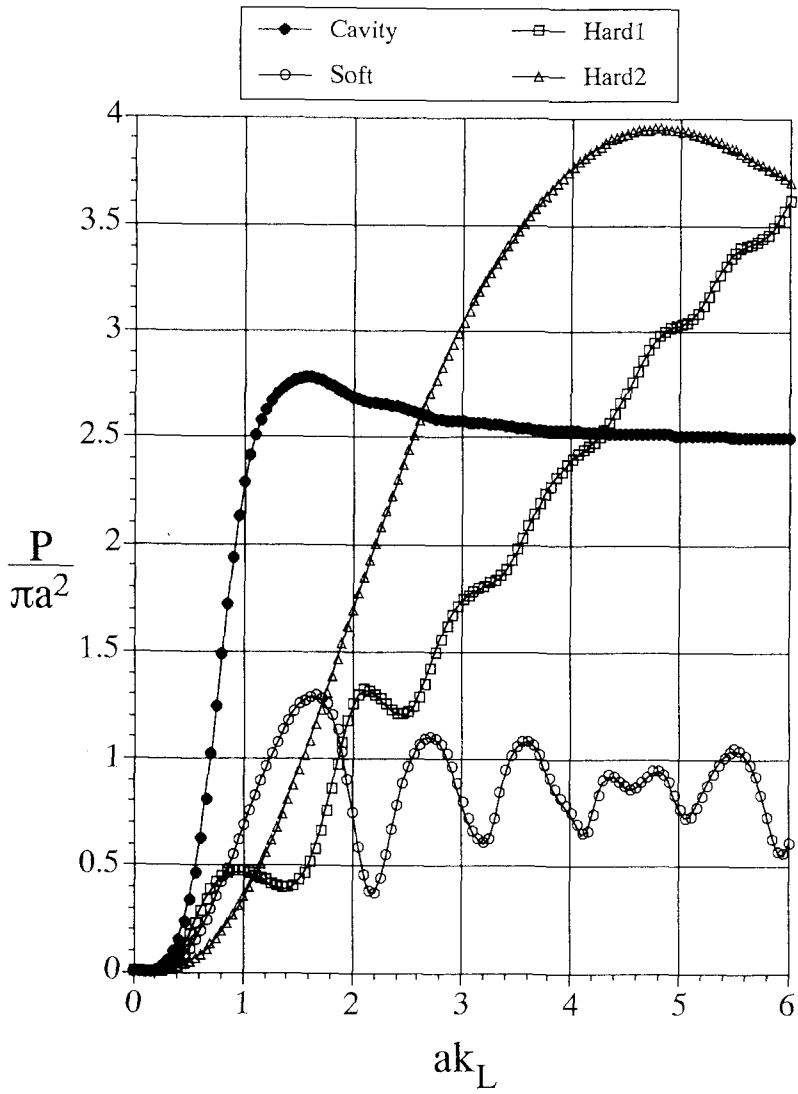


Fig.4 Total scattering cross sections for a spherical inclusion.

Table1 Scattering cross sections for spherical inclusions.

	$ak_L = 1.0$		$ak_L = 2.0$		$ak_L = 3.0$	
	Definition	Optical theorem	Definition	Optical theorem	Definition	Optical theorem
Cavity	2.286	2.260	2.687	2.653	2.572	2.535
Soft	0.689	0.681	0.748	0.739	0.799	0.789
Hard1	0.469	0.464	1.251	1.235	1.740	1.713
Hard2	0.352	0.348	1.693	1.670	3.043	2.993

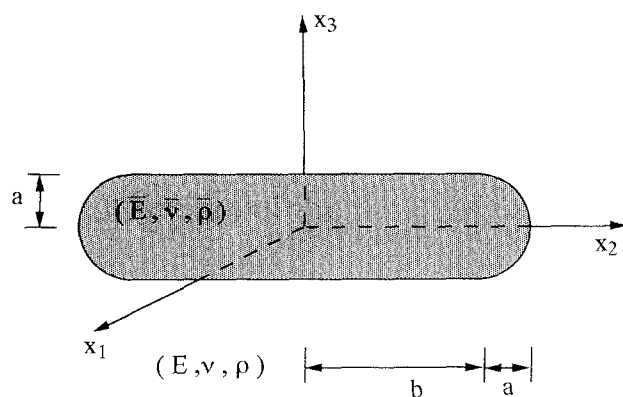


Fig.5 Numerical model.

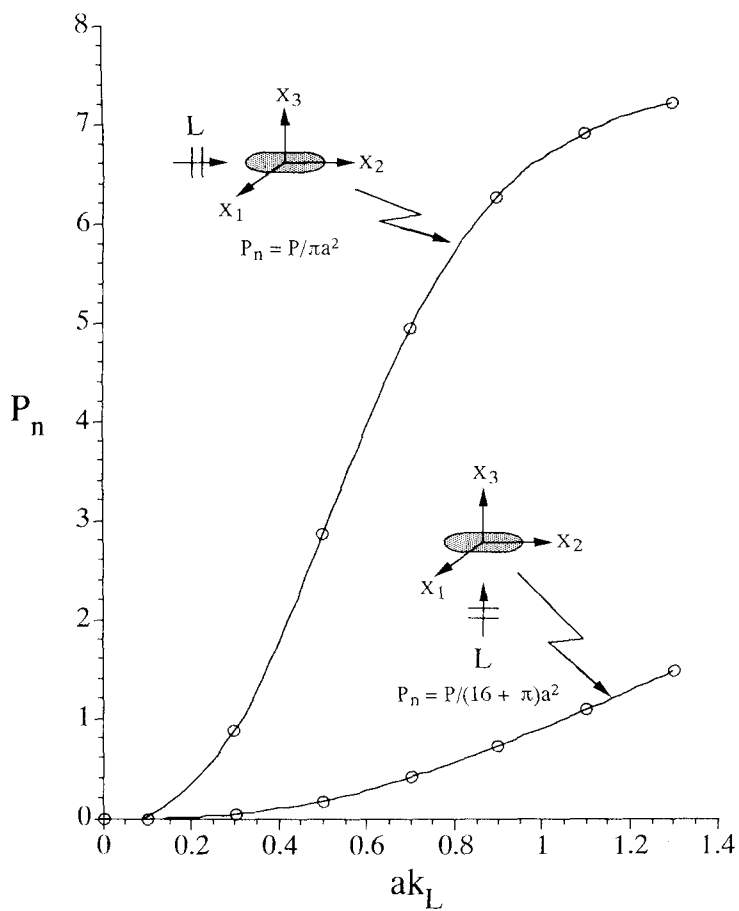


Fig.6 Normalized total cross section P_n vs. dimensionless wavenumber ak_L .

$$P_n = P/\pi a^2 \quad (\text{入射波が長軸方向に伝播})$$

$$P_n = P/(16 + \pi)a^2 \quad (\text{入射波が短軸方向に伝播})$$

この図に示した計算は現実のメッシュ数の制約から低周波数域に限られているものの、低周波数域における散乱全断面積の変動傾向と入射波の進行方向依存性が理解できる。

5. 不均質性の評価への応用

いま、均質、等方、線形な3次元弾性母材全域に母材と異なる弾性的性質を有する不均質部が分布している場合を考える (Fig.7 参照)。この分布形態に規則性は仮定しないが、次のことを仮定する。

- (a) 不均質部の大きさと向きは同じ。
- (b) 不均質部は疎に分布している。

不均質場の波動を特徴付ける現象は分散性と散乱減衰であり、この一つの表現法として、ここでは次のように複素波数を導入する¹⁰⁾。

$$k_L(\omega) = \omega/c_L(\omega) + i\alpha(\omega) \quad (28)$$

この表現において、実数部が波動の分散性を虚数部が波動の散乱減衰を代表する項である。上式を入射波の表現 (21) に代入して、次のようになる。

$$u^I(\mathbf{x}) = e_3 e^{-\alpha(\omega)x_3} e^{i[(\omega/c_L(\omega))x_3 - \omega t]} \quad (29)$$

以下、散乱減衰量に関するパラメータ $\alpha(\omega)$ に着目する。上記入射波の表現 (29) を入射波のインテンシティーを表す式 (14) に代入し、時間平均を取って次のようになる。

$$\langle I^I \rangle = \langle I_0^I \rangle e^{-2\alpha x_3} \quad (30)$$

ここに、 $\langle I_0^I \rangle$ は $x_3 = 0$ における入射波の時間平均インテンシティーである。入射波のインテンシティー (30) の、波動の伝播方向への微小変化量は次のようになる。

$$d \langle I^I \rangle = -2\alpha \langle I^I \rangle dx_3 \quad (31)$$

いま、単位立方体中のインクルージョンの平均個数を N とすると、入射波が有するインテンシティーの減少量は、 N 個のインクルージョンにより全方向に散乱された散乱波動が有する時間平均パワーに等しいから、不均質部は疎に分布し

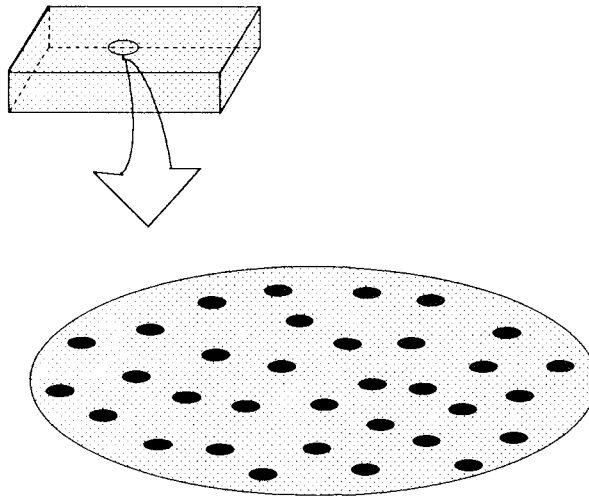


Fig.7 Inhomogeneous body.

ているとの仮定により、一個の散乱体に対する散乱全断面積の定義式(16)を参照して、次式が成立する。

$$d \langle I^1 \rangle = -NP(\omega) \langle I^1 \rangle dx_3 \quad (32)$$

式(31)と式(32)を比較して、波動の散乱による散乱減衰率 $\alpha(\omega)$ と散乱全断面積 $P(\omega)$ の関係式を次のように得る。

$$\alpha(\omega) = \frac{1}{2}NP(\omega) \quad (33)$$

上式より、単位立方体中のインクルージョンの平均個数(不均質の程度) N が既知の場合、一個のインクルージョンによる散乱全断面積 $P(\omega)$ を計算すれば、散乱減衰率(散乱による減衰の程度) $\alpha(\omega)$ を評価することができる。逆に、散乱減衰率 $\alpha(\omega)$ が、例えば超音波計測等により既知であれば、散乱全断面積 $P(\omega)$ を計算することにより、単位立方体中のインクルージョンの平均個数 N を評価することが原理的には可能である。

6. おわりに

ここで得られた結果についてまとめてみると次のようになる。不均質部の存在により散乱される散乱エネルギー量を表す散乱全断面積の計算過程を、境界要素法の利用を念頭において、任意形状の散乱体に対し整理・導出した。球形不均質体に対し、弾性版光学定理の適用可能域と散乱断面積の計算において必要となる境界要素法のメッシュ数について検討した。この検討結果をもとに、ウィスカー状不均質体に対し、低周波域においてだけではあるが、散乱全断面積の周波数依存性及び入射波の進行方向依存性を示すことができた。これらの結果は、超音波による非破壊評価において、散乱減衰率を計測することにより、材料の不均質性評価に利用できる可能性を示した。現実の波動計測では、波動の散乱に起因する散乱減衰とダンピングを伴う材料減衰を区別するのが難しいことが予想され、実用性については今後の検討を要する。

なお、与えられた入射波に対し、不均質部により散乱する散乱波が有するエネルギーは有限であり、Fig.6に示した散乱全断面積は、ある入射波の波数に対してピークとなり、その後、減少傾向に転ずるものと推察される。今後、より高周波域の解析を進めることにより、この点について確認したい。

参考文献

- 1) Twerski, V.: Multiple scattering of radiation by an arbitrary configuration of parallel cylinders, J. Acoust. Soc. Am., Vol.24, pp.42-46, 1952.
- 2) Varadan, V.V., Ma, Y. and Varadan, V.K.: Anisotropic dielectric properties of media containing aligned non-spherical scatterers, IEEE Transactions on Antennas and Propagation, Vol.AP-33, pp.886-890, 1985.
- 3) Nair, S.M., Hsu, D.K. and Rose, J.H.: Porosity estimation using the frequency dependence of the ultrasonic attenuation, J. of Nondestructive Evaluation, Vol.8, pp.13-26, 1989.
- 4) Gubernatis, J.E.: Long-wave approximation for the scattering of elastic waves from flaws with applications to ellipsoidal voids and inclusions, J. Appl. Phys., Vol.50, pp.4046-4058, 1979.
- 5) Achenbach, J.D., Gautesen, A.K. and McMaken, H.: Ray Methods for Waves in Elastic Solids, Pitman Pub., 1982.
- 6) Kitahara, M., Nakagawa, K. and Achenbach, J.D.: Boundary-integral equation method for elastodynamic scattering by a compact inhomogeneity, Computational Mechanics, Vol.5, pp.129-144, 1989.
- 7) Gubernatis, J.E., Domany, E. and Krumhansl, J.A.: Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials, J. Appl. Phys., Vol.48, pp.2804-2811, 1977.
- 8) Barratt, P.J. and Collins, W.D.: The scattering cross-section of an obstacle in an elastic solid for plane harmonic waves, Proc. Camb. Phil. Soc., Vol.61, pp.969-981, 1965.
- 9) Pao, Y.H. and Mow, C.C.: Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations, Crane Russak, New York, 1971.
- 10) Baltzer, A.I.: The effective dynamic response of random composites and polycrystals - a survey of the causal approach, Wave Motion, Vol.11, pp.211-229, 1989.

(1992年9月21日受付)