

初期不整感度則による分岐特性の漸近近似法

Asymptotic simulation of bifurcation properties by imperfection sensitivity laws

池田 清宏* 岩熊 哲夫** 中沢 正利*** 後藤 聡****堀 宗朗†

By Kiyohiro IKEDA, Tetsuo IWAKUMA, Masatoshi NAKAZAWA, Satoshi GOTO, and Muneco HORI

This paper presents an asymptotic analytical simulation for the bifurcation behavior of imperfect systems in the vicinity of a (symmetry-breaking) simple bifurcation point. With reference to the bifurcation equation, which asymptotically can yield complete information on the influence of imperfections, we obtain a series of pertinent power laws for imperfection sensitivity. Based on the analytical or experimental results, the parameters for this equation are determined by means of these power laws. The equation can simulate the bifurcation behavior of diversified problems, such as the compressive analysis of carbon fibers, the elastic buckling of a simply supported plate, and the drained triaxial compression test of granular materials.

1. まえがき

初期不整が構造系の耐荷力に及ぼす影響は、幅広く研究されており、殆ど解明され尽くしたという感さもある程である。例えば、Koiter¹⁾が発見した初期不整感度則(2/3乗則)は、Thompson & Hunt²⁾の分岐理論の枠組みに取入れられおり、シェルの実験・解析結果の理解に大きく寄与している³⁾。また、文献4では、応用数学で分岐の標準的な記述法であるLyapunov-Schmidt reduction⁵⁻⁷⁾を用いて、分岐方程式や初期不整感度則を誘導することにより、最も耐荷力を低下させる初期不整のパターンを求めている。

漸近的(初期不整の値が十分小さい場合)には、初期不整の影響は分岐方程式により完全に記述し得るものである。しかし、分岐方程式のパラメータを解析的に求めることは、多くの場合難しく、初期不整の影響の記述の大きな障壁になっている。またKoiterの2/3乗則は、不安定対称分岐点に対しては、構造物の最大荷重に関する重要な情報を与えるが、安定対称分岐点に対しては、物理的に意味が無い解に対する情報しか与えない。このため、初期不整が安定対称分岐点に及ぼす影響の定量的評価は立ち後れている。

これらの問題点を解決すべく、この論文では実験や解析結果にもとづき、単純対称分岐点の分岐方程式のパラメータを求める手法を提案する。文献4と8で用いた手法により、各種の漸近近似式を定式化する。Koiterの2/3乗則では物理的に意味がある情報が得られない安定対称分岐点に対しても適用可能な初期不

* 正会員 Ph.D 長岡技術科学大学建設系 助教授 (〒940-21 長岡市上富岡町 1603-1)

** 正会員 Ph.D 東北大学工学部土木工学科 助教授 (〒980 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉)

*** 正会員 工博 東北大学工学部土木工学科 助手 (〒980 宮城県仙台市青葉区荒巻字青葉)

**** 正会員 工博 大成建設株式会社技術研究所 研究員 (〒245 横浜市戸塚区名瀬町 344-1)

† 正会員 Ph.D 東京大学工学部土木工学科 助教授 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

整感度則を導いたことが、この論文の理論的な成果である。初期不整の値をいろいろと変えて行なった数値解析・実験結果を、漸近近似式を用いて整理することにより、分岐方程式のパラメータを求める手法を紹介する。炭素繊維の圧縮強度解析、板の弾性座屈解析や粒状体（砂）の排水三軸圧縮試験結果の初期不整感度の記述に本近似法を適用し、その妥当性と有用性を検証した。

2. 単純分岐点の分岐方程式

この章では構造系の非線形の釣合式から分岐方程式を誘導する。この誘導は Thompson & Hunt⁽²⁾ の分岐理論を、応用数学で常用される Lyapunov-Schmidt 展開を用いて書き直したものである（詳細は文献 4 と 8 を参照）。非線形の釣合式を

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, f, \epsilon) = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (1)$$

とする。ここに、 $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)^T$ は n 次元の変位ベクトルを、 f は荷重パラメータを、 ϵ は初期不整変数をそれぞれ表す。

完全系 ($\epsilon = 0$) の安定な主径路上の最初の単純対称分岐点 ($\mathbf{u}_c^0, f_c^0$) を考える。ここに、上付添字 (0) は完全系の値を、下付添字 (c) は特異点での値をそれぞれ表す。接線剛性行列

$$J \equiv J(\mathbf{u}, f, \epsilon) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{u}} \quad \dots\dots\dots (2)$$

のこの特異点における固有ベクトル ξ_i ($i = 1, \dots, n$) からなる座標変換行列 $H = [\xi_1, \dots, \xi_n]$ を定義する。特に、最初の固有ベクトル ξ_1 が単純特異点の条件

$$J_c \xi_1 = \mathbf{0} \quad \dots\dots\dots (3)$$

を満足することとする。また固有ベクトル ξ_i ($i = 1, \dots, n$) に対応する固有値を λ_i と定義する。

不完全系の釣合点 ($\mathbf{u}, f$) と完全系の特異点 ($\mathbf{u}_c^0, f_c^0$) の間の増分量 ($\mathbf{w}, \tilde{f}$) を、この座標変換行列 H を用いて

$$\mathbf{u} - \mathbf{u}_c^0 = H\mathbf{w} = \sum_{i=1}^n \xi_i w_i, \quad \tilde{f} = f - f_c^0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

により定義する。ここに、 $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_n)^T$ である。この 2 点における釣合式 (1) の差を取ることににより、下記の増分釣合式が求まる。

$$G_i(\mathbf{w}, \tilde{f}, \epsilon) = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに、

$$G_i(\mathbf{w}, \tilde{f}, \epsilon) \equiv \xi_i^T [\mathbf{F}(\mathbf{u}_c^0 + H\mathbf{w}, f_c^0 + \tilde{f}, \epsilon) - \mathbf{F}(\mathbf{u}_c^0, f_c^0, 0)] = \lambda_i^c w_i + a_i \tilde{f} + b_i \epsilon + c_i w^2 + \text{高次項} \quad \dots\dots (6)$$

であり、 a_i, b_i, c_i はある定数を表す。 $w \equiv w_1$ は特異モード ξ_1 に対応し、他の変数と異なる性質を持つことを表すために、以後添字を省略する。

この増分釣合式から他の変数 w_i ($i = 2, \dots, n$) を消去することにより、分岐方程式

$$G(w, \tilde{f}, \epsilon) \equiv G_1(\mathbf{w}(w), \tilde{f}, \epsilon) = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

が誘導できる。この式の右辺の $\mathbf{w}(w)$ は、変位ベクトル $\mathbf{w}$ を変数 $w \equiv w_1$ の関数として表すことにより、 w_i ($i = 2, \dots, n$) を変数消去したことを表す。

この分岐方程式を変数 $w, \tilde{f}, \epsilon$ に関して級数展開すると

$$\bar{G}(w, \tilde{f}, \epsilon) \equiv \sum_{i=0} \sum_{j=0} \sum_{k=0} A_{ijk} w^i \tilde{f}^j \epsilon^k = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。この式の右辺の係数

$$A_{ijk} = \frac{1}{i!j!k!} \frac{\partial \bar{G}^{i+j+k}}{\partial w^i \partial \tilde{f}^j \partial \epsilon^k} \Big|_{(w, \tilde{f}, \epsilon) = (0, 0, 0)} \dots\dots\dots (9)$$

の具体形を解析的に求めようとせず、形式論理を展開することが、近代的な分岐理論の哲学であり、また本論文の重要な着眼点でもある。分岐方程式に対する特異性 (特異点) 条件式 $\det[J(u_c, f_c, \epsilon)] = 0$ は、1 次元の接線剛性行列 $\partial \bar{G} / \partial w$ を用いて

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial w} = 0 \dots\dots\dots (10)$$

と表される。

完全系の分岐点 $(w, \tilde{f}, \epsilon) = (0, 0, 0)$ で、釣合条件式 (8) と特異性条件式 (10) が成立つことから、

$$A_{000} = A_{100} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

であることが分かる。また、他の係数の消失の仕組により、図 1 のように単純特異点が分類できる。

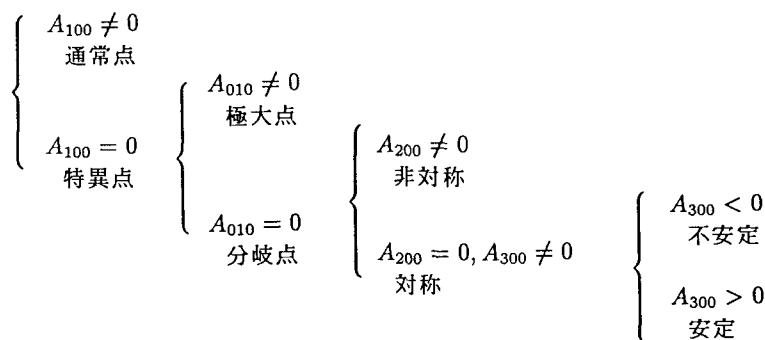


図-1 単純特異点の分類

単純対称分岐点に対しては、図 1 より

$$A_{010} = A_{200} = 0, \quad A_{300} \neq 0 \dots\dots\dots (12)$$

が成立つ。自然界の殆どの対称分岐点は、対称性の喪失に起因する対称性破壊分岐点とよばれるものである⁹⁾ので、以後この種の分岐点に限定して議論を進めることとする。単純対称 (性破壊) 分岐点の分岐方程式では、反対称性条件 (奇関数条件) 式

$$\bar{G}(-w, \tilde{f}, -\epsilon) = -\bar{G}(w, \tilde{f}, \epsilon) \dots\dots\dots (13)$$

すなわち

$$A_{ijk} = 0, \quad i + k = \text{偶数} \dots\dots\dots (14)$$

が成立つ¹⁾。

式 (8), (11), (12), (14) より、単純対称分岐点の分岐方程式が

$$\bar{G}(w, \tilde{f}, \epsilon) = (A_{110}w\tilde{f} + A_{300}w^3 + A_{001}\epsilon) + [A_{120}w\tilde{f}^2 + A_{310}w^3\tilde{f} + A_{500}w^5 + A_{011}\tilde{f}\epsilon] + \text{高次項} = 0 \quad (15)$$

と求まる。ここに、 $(\dots)$ は 1 次項を、 $[\dots]$ は 2 次項をそれぞれ表す。式 (15) により、特異性条件式 (10) は

$$\frac{\partial \bar{G}}{\partial w} = A_{110}\tilde{f} + 3A_{300}w^2 + \text{高次項} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

¹⁾ 式 (13) は、釣合式 (1) の対称性が分岐方程式に遺伝するという、分岐理論の有名な法則⁷⁾を初期不整がある系に拡張したものであり、初期不整にも対称性があることを意味している¹⁰⁾。

となる。分岐点 $(w, \tilde{f}, \epsilon) = (0, 0, 0)$ に遭遇するまで、主径路 $(w = 0, \tilde{f} < 0, \epsilon = 0)$ は安定であるので、式 (16) より

$$\left. \frac{\partial \bar{G}}{\partial w} \right|_{w=0} = A_{110} \tilde{f} + \text{高次項} > 0, \quad \tilde{f} < 0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

が成立つので、 $A_{110} < 0$ である。

分岐方程式 (15) の両辺を $A_{110} < 0$ で割り、2 次項を省略すると

$$w\tilde{f} + pw^3 + q\epsilon + \text{高次項} = 0 \quad \dots\dots\dots (18)$$

と書き直せる。ここに、

$$p = \frac{A_{300}}{A_{110}}, \quad q = \frac{A_{001}}{A_{110}} \quad \dots\dots\dots (19)$$

である。この式で初期不整変数を $\epsilon = 0$ と置くことにより、完全系の径路を表す式

$$\begin{cases} w = 0 & \text{主径路} \\ \tilde{f} + pw^2 + O(w^4) = 0 & \text{分岐径路} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (20)$$

が求まる。式 (20) より、分岐径路（点）の安定性は、パラメータ p ，すなわち安定係数 A_{300} の正負により定まることが分る。

3. 初期不整感度則の誘導

(1) 分岐モードに対する初期不整感度則

対称分岐点の近傍における、初期不整 ϵ の影響を図 2 に示す。図中、実線は完全系の釣合径路を、破線は不完全系の釣合径路をそれぞれ表す。 ϵ が十分小さい場合には、不完全系の釣合径路上に (●) で示す極大点がこの分岐点の近傍に発生する。この極大点の位置 (w_c, f_c) は式 (15) と (16) を連立して解くことにより

$$\tilde{f}_c \equiv f_c - f_c^0 = -\beta\epsilon^{2/3} + O(\epsilon^{4/3}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

$$w_c = \gamma\epsilon^{1/3} + O(\epsilon) \quad \dots\dots\dots (22)$$

と求まる。ここに、

$$\beta = \frac{3A_{300}^{1/3}A_{001}^{2/3}}{2^{2/3}A_{110}} = \left(\frac{27pq^2}{4} \right)^{1/3}, \quad \gamma = \left(\frac{A_{001}}{2A_{300}} \right)^{1/3} = \left(\frac{q}{2p} \right)^{1/3} \quad \dots\dots\dots (23)$$

である。式 (21) は $\tilde{f}_c$ が漸近的に ϵ の $2/3$ 乗に比例することを表す、Koiter¹⁾ が発見した有名な法則である。

式 (23) の $\beta > 0$ が不安定対称分岐点に対応し、 $\beta < 0$ が安定対称分岐点に対応する。不安定対称分岐点 ($\beta > 0$) では、式 (21) と (22) は原点に近い所から上がってくる不完全系の釣合径路の極大点の感度則を表す。しかし、安定対称分岐点では、この径路には極大点が存在せず、式 (21) と (22) は物理的に意味がある情報を与えないことには注意を要する。式 (21) と (22) から ϵ を消去すると、 ϵ を変化させたときの極大点の軌跡を表す放物線 $\tilde{f}_c = -3pw_c^2$ が求まる。実は Koiter の初期不整感度則は、この放物線上の感度則を表しているのである。

Koiter の初期不整感度則の一般化として、図 2 に一点鎖線で示す、完全系の分岐点からたらし放物線

$$\tilde{f} = -gw^2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

と不完全系の径路との交点（図 2 の▲印を参照）における変位 $w|_{\tilde{f}=-gw^2}$ の感度則を誘導する²⁾。ここに、 g はある定数である。この交点は分岐点の種類によらず存在するので、安定対称分岐点 ($\beta < 0$) に対しても適用可能である。式 (21) と (22) から明らかなように、式 (24) を式 (18) に代入すると、 $w|_{\tilde{f}=-gw^2}$ の $1/3$ 乗則

²⁾ 荷重 $\tilde{f}$ と変位 w とが同じオーダーであるために、この放物線 (24) 上では、式の形が非常に簡単になる。

$$w|_{\tilde{f}=-gw^2} = \left(\frac{q}{g-p}\right)^{1/3} \epsilon^{1/3} + O(\epsilon) \dots\dots\dots (25)$$

が求まる。式 (15) の両辺を w に関して微分し、式 (24) を用いると、交点における接線の 1/3 乗則

$$\frac{df}{dw}\bigg|_{\tilde{f}=-gw^2} = (g-3p) \left(\frac{q}{g-p}\right)^{1/3} \epsilon^{1/3} + O(\epsilon) \dots\dots\dots (26)$$

が求まる。式 (25) と (26) は、初期不整 ϵ の値が大きくなると変位と接線が ϵ の 1/3 乗の速度で増加し、釣合径路 ($\tilde{f}-w$ 曲線) が完全系の径路から離れると同時に、傾きが小さくなる傾向を表している。Koiter の初期不整感度則 (22) は、本論文で誘導した感度則 (25) の特殊なケース ($g=3p$) に相当する。

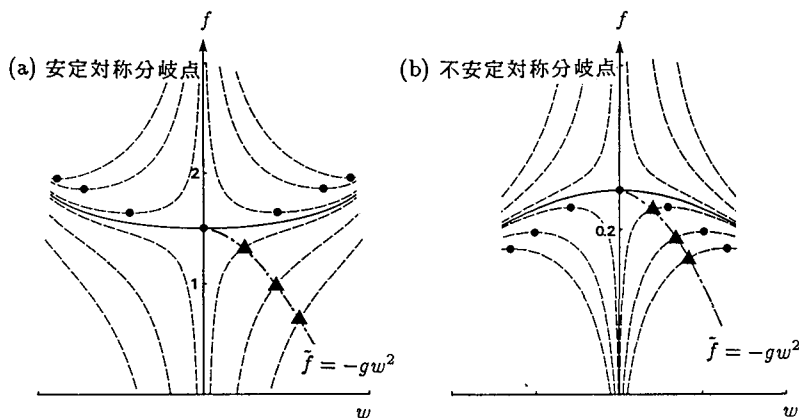


図-2 対称分岐点の近傍の釣合径路と放物線 [式 (24)] との関係図

(2) 一般的な変位に対する初期不整感度則

実験では、分岐モードに対応する変位 w を計測することは困難であり、一般的な変位 u_i しか計測できないので、前節で w に対して求めた初期不整感度則を、 u_i に関する式に書き直すことが必要になる。式 (4) と (6) により δu_i ($i=1, \dots, n$) が w の関数として

$$\delta u_i \equiv u_i - (u_i)_c^0 = \sum_{j=1}^n \xi_{ij} w_j = \xi_{i1} w + r_i \tilde{f} + \xi_{i1}^2 s_i w^2 + \text{高次項}, \quad i=1, \dots, n \dots\dots\dots (27)$$

と求まる³。ここに、

$$r_i = -\sum_{j=2}^n \frac{\xi_{ij} a_j}{\lambda_j^c}, \quad s_i = \frac{-1}{\xi_{i1}^2} \sum_{j=2}^n \frac{\xi_{ij} c_j}{\lambda_j^c} \dots\dots\dots (28)$$

である。式 (27) の逆関係

$$w = \frac{1}{\xi_{i1}} (\delta u_i - r_i \tilde{f} - s_i \delta u_i^2) + \text{高次項}, \quad i=1, \dots, n \dots\dots\dots (29)$$

も容易に求まる。

式 (29) を式 (18) に代入することにより、 δu_i に対する分岐方程式

$$(\delta u_i - r_i \tilde{f} - s_i \delta u_i^2) \tilde{f} + p_i (\delta u_i - r_i \tilde{f} - s_i \delta u_i^2)^3 + q_i \epsilon + \text{高次項} = 0 \dots\dots\dots (30)$$

が求まる。ここに、

³ $\tilde{f}$ と w^2 が $\epsilon^{2/3}$ のオーダーであるので、 ϵ のオーダーの項は式 (27) では高次項となる。

$$p_i = \frac{A_{300}}{\xi_{i1}^2 A_{110}}, \quad q_i = \frac{\xi_{i1} A_{001}}{A_{110}} \dots\dots\dots (31)$$

である。また、式(30)で $\epsilon = 0$ と置くことにより、完全系の径路を表す式

$$\begin{cases} \delta u_i - r_i \bar{f} - s_i \delta u_i^2 + \text{高次項} = 0 & \text{主径路} \\ \bar{f} + p_i (\delta u_i - r_i \bar{f} - s_i \delta u_i^2)^2 + \text{高次項} = 0 & \text{分岐径路} \end{cases} \dots\dots\dots (32)$$

が求まる。パラメータ s_i の値が小さい場合には、 $1/r_i > 0$ は主径路〔式(32)参照〕の傾きにおおよそ比例する。パラメータ $|p_i|$ の増加は分岐径路の曲率を増加させる。

増分 δu_i ($i = 1, \dots, n$) に対して、式(22)は式(29)により

$$(\delta u_i)_c \equiv (u_i)_c - (u_i)_c^0 = \gamma_i \epsilon^{1/3} + O(\epsilon^{2/3}), \quad i = 1, \dots, n \dots\dots\dots (33)$$

と書き直せる。ここに、

$$\gamma_i = \xi_{i1} \gamma = \left(\frac{q_i}{2p_i} \right)^{1/3} \dots\dots\dots (34)$$

である。不完全系の釣合径路と式(24)の放物線 $\bar{f} = -g\delta u_i^2$ との交点における変位と接線の値は、いずれも

$$\delta u_i|_{\bar{f}=-g\delta u_i^2} = \left(\frac{q_i}{g-p_i} \right)^{1/3} \epsilon^{1/3} + O(\epsilon^{2/3}) \dots\dots\dots (35)$$

$$\left. \frac{df}{du_i} \right|_{\bar{f}=-g\delta u_i^2} = (g-3p_i) \left(\frac{q_i}{g-p_i} \right)^{1/3} \epsilon^{1/3} + O(\epsilon^{2/3}) \dots\dots\dots (36)$$

という $1/3$ 乗則に乗る。

4. 適用例

この章では、漸近近似式(27)－(36)中のパラメータ p_i , q_i , r_i , s_i を、実験及び解析結果にもとづき決定する手法を具体例に即して紹介する。

(1) 炭素繊維の解析(安定対称分岐点)

近年構造部材に用いられるように炭素繊維は、微視的に見ると、層状のフィブリルの束になっているので、矩形断面の柱の束としてモデル化できる。ここでは、さらに1本のフィブリルを弾性床上のTimoshenko梁とモデル化し、実験データにもとづきモデルのパラメータを求め、座屈解析を行なう。この解析の詳細については文献11を参照されたし。

図3に先端に空隙が存在するフィブリルの有限要素モデルを示す。先端部分が下方に折れ曲っている角度 $\epsilon = \theta$ を初期不整とする。図4に θ の値を色々と変えた場合の圧縮荷重 $f = Pl^2/EI$ と先端の中心線からの鉛直変位 $w = u_y/l + \epsilon$ との関係を示す。ここに、 u_y はフィブリルの先端からの鉛直変位を表す。図中に完全系の分岐点、つまり座屈点を矢印で示す。完全系の分岐径路上で荷重が増加していることから、この分岐点は安定対称分岐点であることがわかる。

この一連の $f-w$ 曲線を分岐方程式(18)により近似することを考える。最初に、完全系の分岐径路の式(20)と解析結果がよく一致するように、パラメータ p を

$$p = -0.00245 \dots\dots\dots (37)$$

と取る。次に、放物線(24) ($g = 0.38, 0.76$) と不完全系 ($\epsilon \equiv \theta \neq 0$) の $f-w$ 曲線との交点の w 座標の値を求め、初期不整の $1/3$ 乗 ($\epsilon^{1/3}$) を横軸に取り、図5にプロットした。 w と $\epsilon^{1/3}$ の間には、明らかに直線関係が成立っており、漸近式(25)の妥当性を裏付けている。この直線の傾きが $[q/(g-p)]^{1/3}$ に等しいことと式(37)から

$$q = 0.00119 \dots\dots\dots (38)$$

が求まる。式 (37) と (38) の p と q の値を式 (18) に用いると、漸近近似式

$$f = 0.0691 + 0.00245w^2 - 0.00119\epsilon/w \dots\dots\dots (39)$$

が求まる。ここに、この式の右辺の 0.0691 は正規化した座屈荷重の値である。式 (39) で得られる関係を変位 u_y/l についてプロットしたのが図 6 である。実線が計算値を、記号 (×) が式 (39) による近似値をそれぞれ表す。非常に良い近似が出来ていることが明らかである。

この式を用いて、ここで数値解析をしなかったような比較的小さい初期不整に対する応答が推測できる。一般に初期不整が小さい場合には、安定した解を得ることが困難なことが多いため、ここで求めた漸近近似式 (39) は大変便利である。

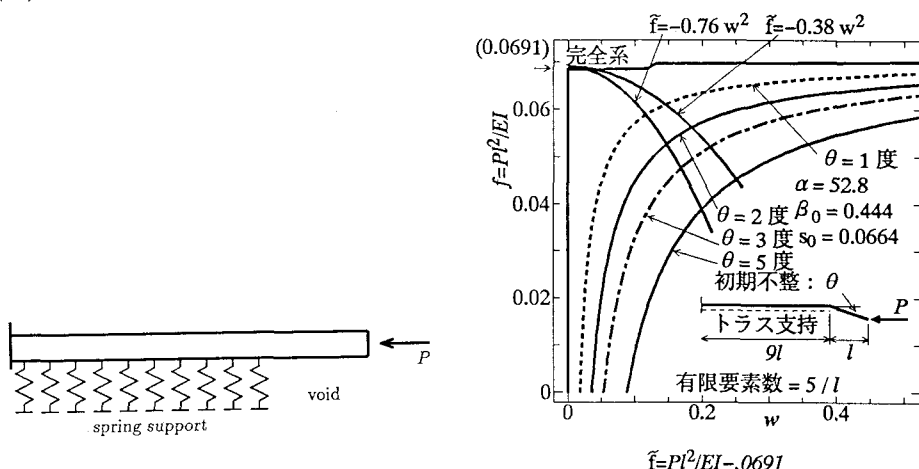


図-3 フィブリルの有限要素モデル

図-4 圧縮荷重-先端変位曲線

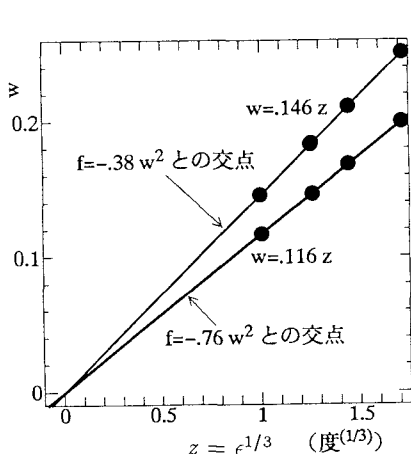


図-5 $w|_{f=-gw^2}$ と $\epsilon^{1/3}$ の関係

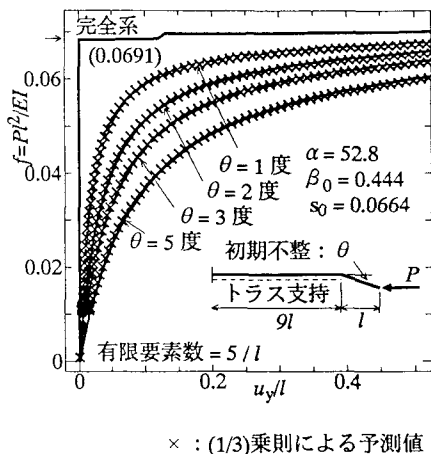


図-6 圧縮荷重-先端変位曲線

(2) 板の弾性座屈解析 (安定対称分岐点)

安定対称分岐点の別の例として、純曲げまたは純圧縮を受ける板の弾性座屈解析を取上げる（数値解析の詳細については文献 12 を参照）。幅厚比 $\beta = 200$ の四辺単純支持板の直角 2 方向に振幅 $\epsilon < 0.4$ の 1 半波の初期不整を与えた。純曲げの場合には縦横比 $a/b = 0.8$ ，板厚で無次元化された変位 w の着目点は $(0.5a, 0.7b)$ とし，板の中心線から測ることとする（この変位は厳密には分岐モードに対応する変位ではないが，分岐点の近傍では，漸近的に同じ挙動を呈するので，ここでは便宜的に w と表記することとした）。純圧縮の場合には縦横比 $a/b = 1.0$ ，変位の着目点は中央点 $(0.5a, 0.5b)$ とした。

図 7 に ϵ の値を種々に変えた場合の外力と変位との関係を示す。図 7 中に併記した，分岐点からおろした放物線との交点における変位の値と初期不整 ϵ の $1/3$ 乗との関係を図 8 に示す。両者には正確に直線関係が成立っており，漸近式 (25) に従っている。前節と同じ方法で分岐方程式 (18) のパラメータ p ， q の値を求め，図 9 に分岐方程式による近似値を記号 (×) により示した。この近似値は図中に実線で示した解析値と非常によく一致している。

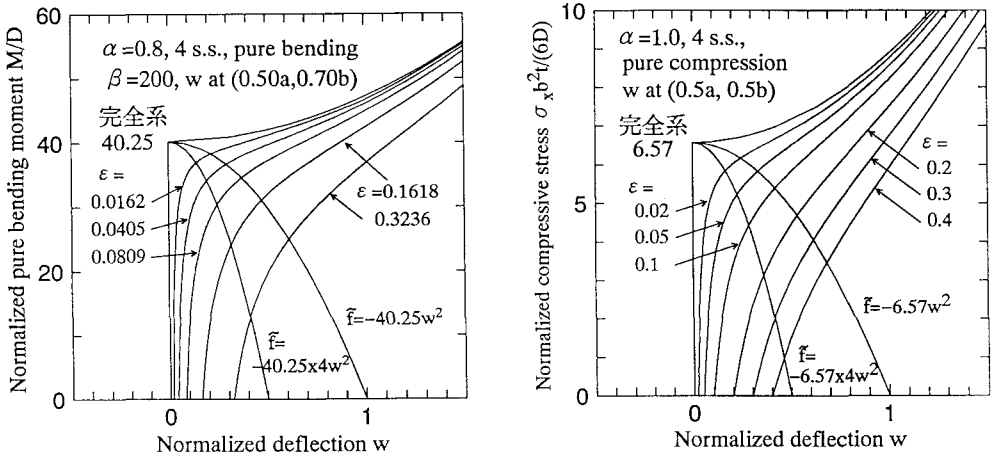


図-7 板の安定対称分岐点の近傍の釣合径路と放物線〔式(24)〕との関係図

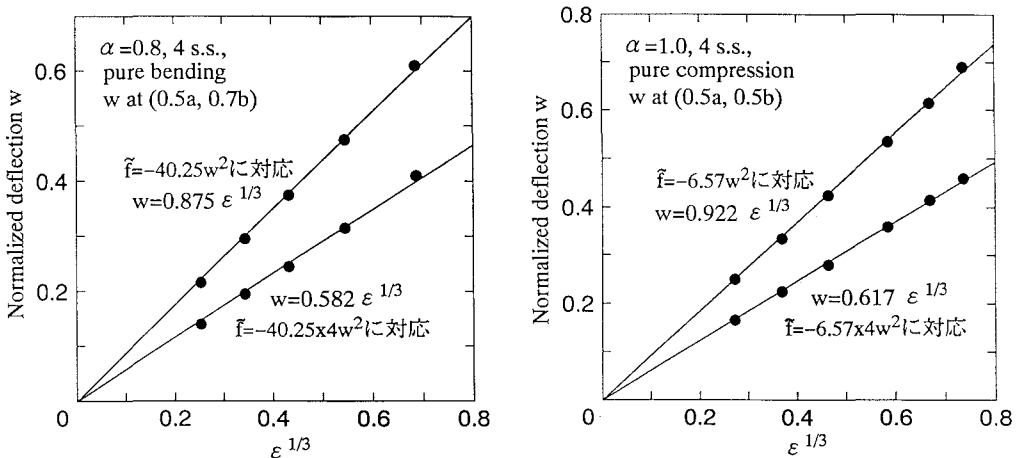


図-8 w と $\epsilon^{1/3}$ の関係

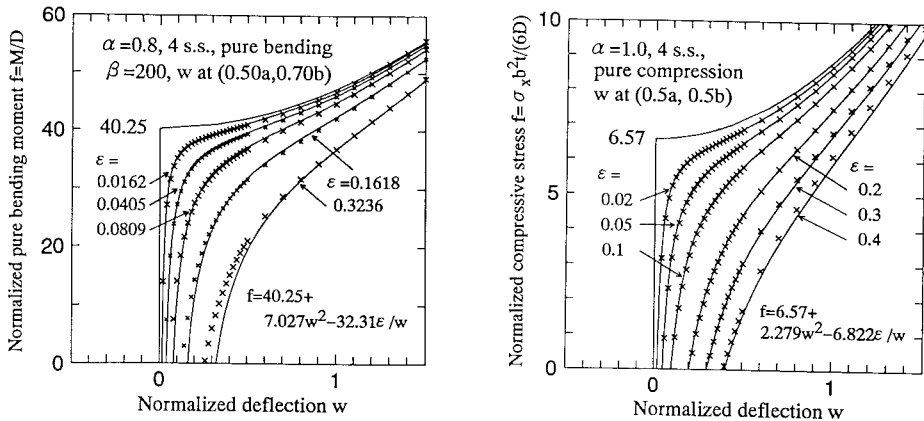


図-9 板の安定対称分岐点の近傍の釣合径路とその漸近近似値との関係

(3) 砂の三軸圧縮試験 (不安定対称分岐点)

粒状体(砂)の三軸圧縮試験における滑り現象が分岐により引き起こされていることが近年明らかになってきている。文献13で圧密排水三軸圧縮試験により求められた、密な砂の応力比-軸ひずみ($R-\varepsilon_a$)曲線を図10に示す。ここに、軸ひずみは試験体の鉛直方向のひずみであり、応力比は最大有効応力 σ'_1 と最小有効応力 σ'_3 の比として $R = \sigma'_1/\sigma'_3$ と定義される。また e_0 は間隙比を表す。試験体高さ H の寸法効果を調べるために、図10(a)では、直径 D は7cmで一定とし、高さ H は2.6, 4.6, 7.6, 15.0cmという4種類の試験体を用いた。図10(b)の半径 $D = 30$ cm, 高さ $H = 63$ cmの大きな試験体のデータは、半径が異なるために直接用いることはできないが、一般的な傾向を調べるために適宜参照することとする。

実験は不可避免的に初期不整を有するものであるので、これらの曲線は不完全系の釣合径路である。文献8では、これらの試験体に同一の長さの初期不整 Δ が存在するとき、その相対的な影響は高さ H に反比例するという仮説

$$\epsilon = \frac{\Delta}{H} \dots\dots\dots (40)$$

に基づき、試験体の分岐現象の仕組を説明している。現在の研究段階では Δ の値を知ることは不可能であるので、以下単位値($\Delta = 1$ cm)を用いることとする。さらに、

$$f = R, \quad u_i = \varepsilon_a \dots\dots\dots (41)$$

とおくことにより、第2・3章の理論が粒状体の寸法効果の研究にも適用できることになる。

高さ無限大($H = \infty$)の理想的な試験体が完全系に対応する。図10の応力比-軸ひずみ曲線上に極大点(●)が存在することから、完全系の分岐点($(\varepsilon_a)_c^0, R_c^0$)は不安定対称分岐点であることがわかる[図2(b)参照]。この問題は、前節の問題と分岐点の種類も異なり、分岐点の位置も不明であり、また取扱う変位が分岐モードに対応していない。そのために、分岐方程式(18)のパラメータの決定法も全く異なることになる。

図10の実験結果にもとづき、式(21)と(33)に対応する関係をそれぞれ図11, 12にプロットした。図中、(●)が半径7cmのデータ(4点)に対応し、(○)が半径30cmのデータに対応している。図11の荷重の2/3乗則のグラフから、半径7cmのデータに対し

$$R_c = -0.874 \left(\frac{\Delta}{H} \right)^{2/3} + 5.47 \dots\dots\dots (42)$$

という非常によい直線関係が得られた。図12の変位の1/3乗則のグラフからは、半径7cmのデータ間のバラツキが大きかったので、半径30cmのデータを参考にして

$$(\varepsilon_a)_c = 12.64 \left(\frac{\Delta}{H} \right)^{1/3} + 1.0 \quad (43)$$

という直線関係を求めた。

式(42)と(43)で $H = \infty$ とおくことにより、完全系の分岐点の位置が

$$((\varepsilon_a)_c^0, R_c^0) = (1.0, 5.47) \quad (44)$$

と推定できる。また、式(42)と(43)の傾きがそれぞれ式(23)の β と式(34)の γ_i にそれぞれ等しいことから、

$$p_i = 0.00184, \quad q_i = 7.35 \quad (45)$$

が求まる。ここに、式(19), (23), (31)より

$$\beta = \left(\frac{27p_i q_i^2}{4} \right)^{1/3} \quad (46)$$

が成立つことを利用した。さらに、実験結果と分岐方程式(30)がよく一致するように、この式中のパラメータを $r_i = 0.32$, $s_i = 0.08$ とした。この様にして求めた分岐方程式(30)と実験結果との比較を図13に示す。図中、実線が実験結果を、破線が分岐方程式(30)による近似値を表す。

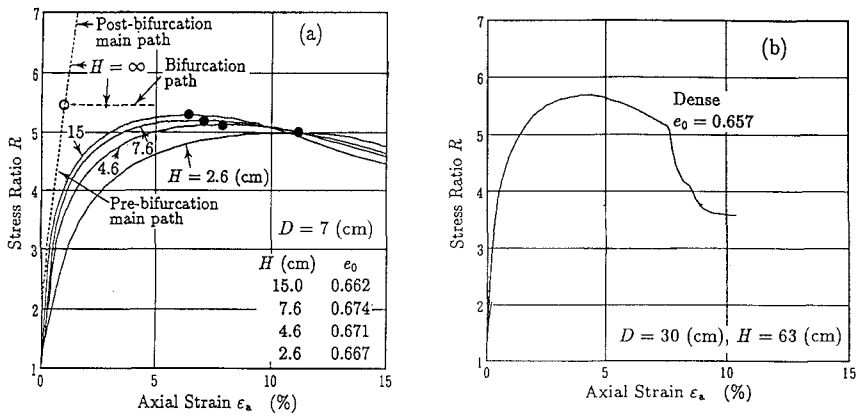


図-10 密な砂の応力比-軸ひずみ ($R - \varepsilon_a$) 曲線

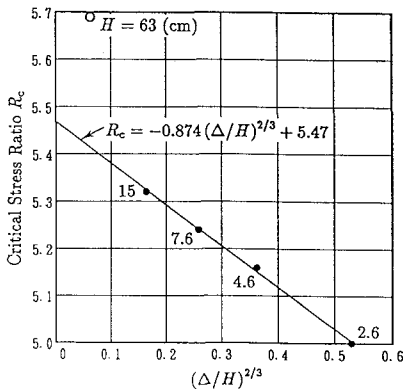


図-11 R_c と $(\frac{\Delta}{H})^{2/3}$ の関係式

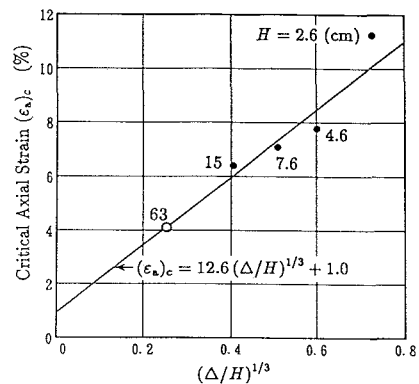


図-12 $(\varepsilon_a)_c$ と $(\frac{\Delta}{H})^{1/3}$ の関係式

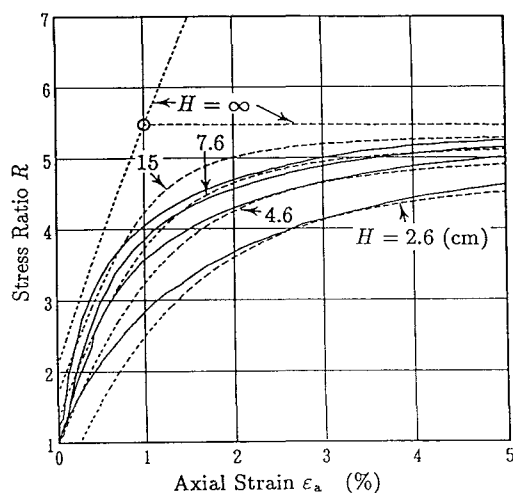


図-1 3 実験値と漸近近似値との比較 ($R - \varepsilon_a$ 曲線)

5. 結論

この論文で提案した初期不整感度の漸近近似法は、理論的に簡潔であり、また解析・実験結果との整合性も非常に高いものであった。種々の分岐問題にいかに関適用して行くかということが今後の課題である。

参考文献

- 1) Koiter, W.T. (1945): On the stability of elastic equilibrium, Dissertation. Delft, Holland, (English translation: NASA Tech. Trans. F10: 833, 1967).
- 2) Thompson, J.M.T. and Hunt, G.W. (1973): A General Theory of Elastic Stability, John Wiley and Sons, New York.
- 3) Bazant, Z.P. and Cedolin, L. (1991): Stability of Structures; Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories, Oxford University Press, New York.
- 4) Ikeda, K. and Murota, K. (1990a): Critical initial imperfection of structures, International Journal of Solids and Structures, Vol. 26, No. 8, pp. 865-886.
- 5) Golubitsky, M. and Schaeffer, D.G. (1985): Singularities and Groups in Bifurcation Theory, Vol. 1, Springer, New York.
- 6) Fujii, H. and Yamaguti, M. (1980): "Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity," J. Math. Kyoto Univ., Vol. 20, No. 3, pp. 489-590.
- 7) Sattinger, D. H. (1979): Group Theoretic Methods in Bifurcation Theory, Lecture Notes in Mathematics, 762, Springer, 1979.
- 8) Ikeda, K. and Goto, S. (1992): Imperfection sensitivity for size effect of granular materials, Preprint.

- 9) Ikeda, K. and Murota, K., and Fujii, H. (1991): Bifurcation hierarchy of symmetric structures, *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 27, No. 12, pp. 1151–1573.
- 10) Murota, K. and Ikeda, K. (1991): Critical imperfection of symmetric structures, *Journal of Applied Mathematics, Soc. of Industrial and Appl. Math.*, Vol. 51, No. 5, pp. 1222–1254.
- 11) 岩熊哲夫・堀宗朗 (1992): 炭素繊維の圧縮強度の一理論予測, 投稿準備中
- 12) Nakazawa, M., Iwakuma, T., and Kuranishi, S. (1991): Elastic buckling strength and post-buckling behavior of a panel under unequal bending and shear, *Structural Eng./Earthquake Eng.*, Vol. 8, No. 1, pp.11s-20s.
- 13) Goto, S. (1986): Strength and deformation characteristics of granular materials in triaxial tests, Doctor thesis, University of Tokyo.

(平成4年 9月 21日 受付)