

任意形状の要素を用いた粒状要素法とその応用例

ON THE PROCEDURE OF GRANULAR ELEMENT ANALYSIS USING ARBITRARY-SHAPED ELEMENTS
AND ITS SIMPLE APPLICATION

土倉 泰*

By Toru TSUCHIKURA

Granular element method is one of the simulation methods of quasi-static behavior of granular media. In order to apply this method to much more problems of the deformation mechanism of materials including discontinuous regions, the investigation of the procedure to analyse arbitrary-shaped elements is necessary. In this paper, the method of combining circles or spheres to approximate an arbitrary-shaped element is first developed. New transformation matrix is introduced. This matrix is found to be applicable to the analysis using arbitrary-shaped elements. A simple application to the analysis of the progress of rockfall clarifies a special feature of the method of combining circles or spheres which enable us to characterize the uneven surface of an element.

1. まえがき

粒状体や亀裂性岩盤などのように不連続部を含む材料を、剛体要素の集合体とみなしてモデル化し、その力学特性を計算機を用いてシミュレートする手法の1つとして、個別要素法¹⁾を挙げることができる。個別要素法が本来動的な解析を主眼としているのに対し、準静的な解析を目的として粒状要素法^{2), 3)}が提案されている。粒状要素法は、個々の要素の接触についての扱いは個別要素法と同一であるが、要素の移動や回転量の算定に接触状態に基づく剛性行列を用いる点で個別要素法とは異なっている。粒状要素法が剛性行列を基本とする解析であることを利用して、粒子集合体の固有変形解析を行う試みもある^{4), 5)}。

ところで、従来の粒状要素法では、構成要素として円あるいは球を扱う解析が行われているのみである。円あるいは球は最も単純な形状で計算上の取り扱いが簡単であるが、現実問題への適用性を考慮した場合には限界がある。例えば、粒状体の異方性には粒子の形状が少なからず影響する。円形要素では、実地盤に普通にみられる直行異方性をモデルに組み入れることが容易でない。また、亀裂性岩盤の力学特性を解析するためには、現実により得ない大きな回転の発生が考えられる円や球の要素は適当とは言いがたい。したがって、粒状要素法をより多くの問題に適用するため、円や球以外の形状の要素を扱えるようにする必要がある。

個別要素法では、多角形や楕円の要素を用いた解析が従来より数多く行われている。多角形を用いる場合、要素間に働く接触力は、一方の頂点と他方の辺との間に生じるものと近似される。すなわち、2つの多角形が面を介して接触している状態でも、接触力はすべて頂点に作用するものとして与えられるという大胆な近似を伴った手法がとられ、必ずしも現実問題を直接的に表現してはならず、解析定数の決定方法についても

* 工博 山梨大学助手 工学部土木環境工学科 (〒400 山梨県甲府市武田四丁目3番11号)

確実な方法がないのが実状である。一方、楕円は粒状体の異方性を表すのに適しているが、表現できる形状に限られる。また、多角形や楕円の要素を用いる場合には、計算上の取り扱いが複雑となる。

上述の問題を解決するものとして、間隙パネという概念を導入して不規則形状要素を扱う手法が個別要素法に適用されている⁶⁾。これは、円形要素を間隙パネで連結することによって、解析対象の複雑な形状を表現するものである。粒状要素法においても、同様の手法で計算を行うことが可能である。しかしながら、現状では間隙パネに関する定数を現実問題に即して合理的に決定する明確な方法はない。

そこで、円や球を完全に接着させて種々の形状の剛体要素を作ることを考えた。円や球の重なりを許せば、比較的少ない要素数で種々の形状を表現できる。本文では、粒状要素法において、円や球を組み合わせた要素を用いた場合に必要となる、新しい変換行列を導き、これが任意形状の要素に適用可能であることを示す。応用例として、円や球を要素とした場合には扱えなかった、はく落型落石の発生機構の解析結果を示す。

2. 円や球を組み合わせた要素を用いた粒状要素法

粒状要素法あるいは個別要素法において、要素間の接触の有無は現在の要素配置の中での要素間の重なりによって判定される。円や球の間での重なり判定は容易である。そこで、円や球以外の形状の要素も近似的に円や球を組み合わせることによって表現することを考える。円や球を重なりを許して組み合わせれば、比較的少ない粒子数でも様々な要素の形状を近似的に表すことができる。

粒状要素法の基本的な考え方や計算の流れは要素の形状に関係なく共通であるが、要素の剛性（接触剛性）を算定する際に用いられる、変位増分・接触力の変換行列は、従来、円と球の場合に限って示されているのみで、他の形状に適用できない。そこで、ここでは円や球を組み合わせた要素を用いた場合の変換行列を2次元と3次元に分けて導く。単なる円や球の場合とは、要素の重心が円や球の重心と一致しない点で異なる。

なお、変位増分・接触力の変換行列を決定できれば、各要素毎に全接触点についての剛性の和（接触剛性）を求めることができ、これと各要素毎に与えられる不釣り合い力に基づいて、それぞれの要素の移動・回転量が算定されることとなる^{2), 3)}。ただし、接触剛性行列が特異となる可能性があるので注意が必要である。接触剛性行列が特異となる状態として、一般には、①要素が全く他の要素と接触していない、②他の要素と1点のみで接触している、③他の要素と2点のみで接触している（3次元の場合に限る）、が考えられる²⁾。本文では、剛性行列が特異となる場合の計算アルゴリズムを詳述することは省略するが、上述の①については、要素に対し重力を含む接触力以外の外力による移動・回転を与えるものとし、②（3次元では③も含む）については、接触力による移動を与えると共に、接触点に作用する要素重心に働く重力などに由来したモーメントを算定し、これと対応した接触点まわりの回転を要素に対して与えるものとすることを確認しておく。

（1）2次元の場合

まず、図-1に示す接触点Cの変位増分の変換を考える。Gは要素の重心である。要素の変位・回転増分を、図に示す (x, y) 座標系での変位増分と要素重心まわりの回転増分によって、 $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta \omega)^T$ と表し、これに対応した接触点Cにおける変位増分を図中に示す接触法線・接線方向で定まる (n, t) 座標系を考えて、 $\Delta U_c = (\Delta u_n, \Delta u_t)^c$ と表す。ここに、 $\Delta \omega$ は反時計回りを正とする。要素重心まわりの回転増分 $\Delta \omega$ による点Cの変位増分が (x, y) 座標系で表すと、 $(-a \Delta \omega \sin \alpha - r \Delta \omega \sin \theta, a \Delta \omega \cos \alpha + r \Delta \omega \cos \theta)$ であることに注意すれば、 ΔU_c と ΔX の関係が次のように求められる。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta u_n \\ \Delta u_t \end{pmatrix}_c &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}_c \left[\begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a \sin \alpha - r \sin \theta \\ a \cos \alpha + r \cos \theta \end{pmatrix}_c \Delta \omega \right] \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & a \sin(\theta - \alpha) \\ -\sin \theta & \cos \theta & a \cos(\theta - \alpha) + r \end{pmatrix}_c \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \omega \end{pmatrix} \cdots \cdots \cdots (1) \end{aligned}$$

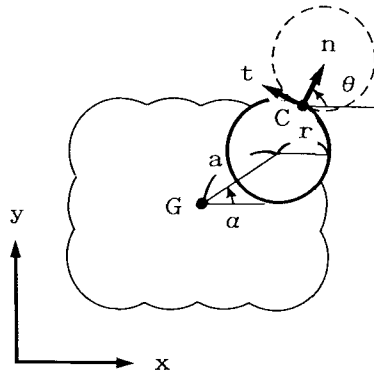


図-1 2次元の場合の要素と座標系の関係

式(1)の右辺の行列を変換行列 T_c と表す。すなわち、

$$T_c = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & a\sin(\theta-\alpha) \\ -\sin\theta & \cos\theta & a\cos(\theta-\alpha)+r \end{pmatrix}_c \quad (2)$$

とする。

次に、接触力の変換を考える。 ΔU_c に対応する接触力を、 $P_c = (p_n, p_t)_c^t$ とし、その正の向きは ΔU_c の向きと逆にとる。符号については、接触点の変位増分 ΔU_c に正值を与えたときに P_c にも正の増分が与えられるように定義している。力の釣合を考えることによって以下の関係を見い出せる。

$$F_c = -T_c^t P_c \quad (3)$$

ここに、 $F_c = (F_x, F_y, M)_c^t$ は接触点Cに作用する接触力 P_c によって要素の重心に作用する力とモーメントよりなるベクトルであり、力の成分は (x, y) 座標系で与え、モーメントMは反時計回りを正とする。上式において変換を担う行列が式(1)における変換を担う行列を転置したものとなっているのは、一般に反傾(contragradience)として知られる、力の変換と変位の変換の間の相互関係である⁷⁾。なお、式(3)の負の符号は P_c の符号の定義によって出てくるものである。

式(2)の T_c は、 $r=0$ を代入することにより、2次元任意形状要素の変換行列とみなすこともできる。接触点の剛性は通常の場合、接触法線方向と接線方向に分けて与えられるので、要素がどのような形状をもつものであれ、①要素重心からの接触点の位置、②接触法線ベクトル・接線ベクトル、の2点が明らかならば接触点の剛性を要素に対する剛性として評価できるからである。

ところで、図-1に示す要素の形状は、後述する例題に用いている岩塊をモデル化したものである。要素として円の組み合わせを考えたのは、計算アルゴリズムを計算時間のかからない単純なものにするための要請からであった。しかし、図のようなモデルを用いれば、例えば岩塊を楕円や長方形でモデル化した場合には直接的に考慮することの不可能な、岩塊表面の凹凸を要素の性質としてもたせることが可能となっている点に注目すべきである。図-1の要素は表面に凹凸があるので、要素間のかみ合わせを表現できる。後述の例題は、この特性を生かして亀裂性岩盤の力学特性を解析することを試みたものであり、粒状要素法あるいは個別要素法による解析の応用として、新たな方向を示すものといえよう。

(2) 3次元の場合

2次元の場合と同様に、まず、要素の変位・回転増分の変換を考える。図-2には、球の表面に存在する接触点Cと要素の重心Gとの間の位置関係を示している。接触点Cに設けた座標系の基底ベクトルは、図に

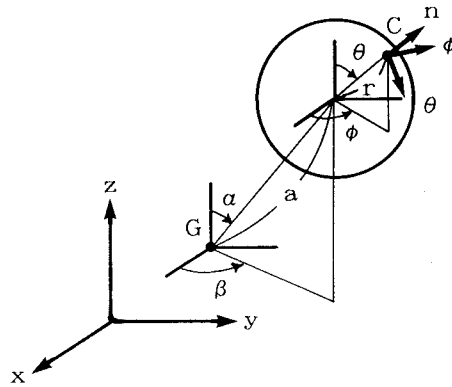


図-2 3次元の場合の要素と座標系の関係

示す球座標系 (n, θ, ϕ) のそれと定める。ここで、図に示す直行デカルト座標系 (x, y, z) の基底ベクトルを球座標系 (n, θ, ϕ) の基底ベクトルに変換する行列を R とし、式 (4) に示す。

$$R = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{pmatrix} \quad (4)$$

要素の変位増分は接触点の変位増分と同一であり、これを (x, y, z) 座標系を考えて、 $\Delta X' = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)^t$ とする。一方、要素の回転増分による接触点の変位増分を与えるために、要素の重心 G に始点をもち、接触点 C に終点をもつベクトル $\underline{r}_c$ を考える。これを (x, y, z) 座標系で成分表示すると、 $\underline{r}_c = (a \sin\alpha \cos\beta + r \sin\theta \cos\phi, a \sin\alpha \sin\beta + r \sin\theta \sin\phi, a \cos\alpha + r \cos\theta)$ となる。要素の重心 G を通る軸のまわりの回転増分 $\Delta\omega$ によって生じる接触点 C の変位増分 $\Delta \underline{u}_c$ は次のようなベクトルの外積で与えられる。

$$\Delta \underline{u}_c = \Delta\omega \times \underline{r}_c \quad (5)$$

ここに、 $\Delta\omega = (\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z)$ である。 $\Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z$ はそれぞれ、 x, y, z 軸と平行で要素の重心を通る直線を軸とした回転増分を表しており、着目する軸の正の向きにみて右回りを正とする。

式 (5) より、要素の回転増分によって生じる接触点 C の変位増分は、 (x, y, z) 座標系を考えると、 $\Delta X'' = ((a \cos\alpha + r \cos\theta)\Delta\omega_y - (a \sin\alpha \sin\beta + r \sin\theta \sin\phi)\Delta\omega_z, (a \sin\alpha \cos\beta + r \sin\theta \cos\phi)\Delta\omega_z - (a \cos\alpha + r \cos\theta)\Delta\omega_x, (a \sin\alpha \sin\beta + r \sin\theta \sin\phi)\Delta\omega_x - (a \sin\alpha \cos\beta + r \sin\theta \cos\phi)\Delta\omega_y)^t$ と表せることがわかる。

以上より、要素の変位・回転増分を接触点 C における球座標系を用いた変位増分 ΔU_c に変換する式は、

$$\Delta U_c = R (\Delta X' + \Delta X'') \quad (6)$$

と求められる。ここに、 $\Delta X = (\Delta x, \Delta y, \Delta z, \Delta\omega_x, \Delta\omega_y, \Delta\omega_z)^t$ は要素の変位・回転増分を表す行列である。式 (6) の T_c が導出すべき変換行列で、以下のようになる。

$$T_c = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi & \sin\theta \sin\phi & \cos\theta & a(\cos\theta \sin\alpha \sin\beta - \sin\theta \sin\phi \cos\alpha) \\ \cos\theta \cos\phi & \cos\theta \sin\phi & -\sin\theta & -a(\cos\theta \sin\phi \cos\alpha + \sin\theta \sin\alpha \sin\beta) - r \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & -a \cos\phi \cos\alpha - r \cos\theta \cos\phi \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} & a(\sin\theta\cos\phi\cos\alpha - \cos\theta\sin\alpha\cos\beta) & a(\sin\theta\sin\phi\sin\alpha\cos\beta - \sin\theta\cos\phi\sin\alpha\sin\beta) \\ & a(\sin\theta\sin\alpha\cos\beta + \cos\theta\cos\phi\cos\alpha) + r\cos\phi & a(\cos\theta\sin\phi\sin\alpha\cos\beta - \cos\theta\cos\phi\sin\alpha\sin\beta) \\ & -a\sin\phi\cos\alpha - r\cos\theta\sin\phi & a(\cos\phi\sin\alpha\cos\beta + \sin\phi\sin\alpha\sin\beta) + r\sin\theta \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

接触力の変換については、力の釣合から式(8)のように導き出される。なお、2次元のときのように、接触力 P_c は ΔU_c と同じ座標系すなわち接触点Cにおける球座標系で与える。 P_c の正の向きは接触点の変位増分 ΔU_c に正値を与えたときに P_c にも正の増分が与えられるように定めるものとする。

$$F_c = -T_c^t P_c \quad (8)$$

ここに、 $F_c = (F_x, F_y, F_z, M_x, M_y, M_z)_c$ は接触点Cに作用する接触力 P_c によって要素の重心に作用する力とモーメントよりなるベクトルである。力の成分は (x, y, z) 座標系で与え、 M_x, M_y, M_z はそれぞれ x, y, z 軸と平行で要素の重心を通る直線のまわりに作用するモーメントで、着目する軸の正の向きにみて右回りを正とする。

2次元の場合にみたのと同様に、式(7)は3次元任意形状要素の変換行列とみなすことができる。

3. はく落型落石を想定した簡単な応用例

亀裂性岩盤を矩形岩塊を積み上げたモデルとしてとらえ、先に示した変換行列を用いて、凍結融解作用を誘因として発生するはく落型落石について2次元で解析を行った例を示す。なお、ここに扱う矩形岩塊モデルと現実に存在する岩塊との対応について細かな議論はしないものとする。

矩形は円を組み合わせることによって近似し、図-1に示した要素を用いる。実際の岩塊の表面には凹凸があると考えられる。ここで用いる要素は単純なモデル化としてはあってもこの凹凸をもっている点は2.でも述べた。円の半径はすべて10cm、接触点の剛性にはHerz, Mindlinの理論³⁾を適用する。ただし、若干の簡略化のため、接線方向の剛性には接線方向の力が全く作用していないときの剛性に0.7をかけたものを用いる。なお、用いた理論は球の接触に対して求められたものである。ここでは2次元解析を行うが、今後岩塊を3次元でモデル化することも考慮した上で球の接触理論を用いることとした。材料定数はヤング率が $5 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比は0.2、接触点における摩擦角は 30° とする。比重は2.65とし、岩塊の体積を $40 \times 50 \times 1 \text{ (cm}^3\text{)}$ とみなすこととする。

落石は節理をもった岩盤斜面の上部の岩塊が、節理内部の水分の凍結時に圧力 p を受けるなどする過程で生ずるものと考え、図-3のようにして発生すると想定した。解析は図中に落下方向を矢印で示した要素1つのみに着目して行う。この要素は初め図の右側、下側で隣の岩塊要素と接している。図-5は後に説明する解析結果を示すものであるが、同図(a)に着目要素と隣接2要素のもともとのモデル化をみることができる。隣接する2要素は全く動かさない。着目要素は水平面と β なる角度をなす斜面上にある。 β は図-3にも示してある節理の傾きに対応する。

まず、着目する要素の斜面上での安定性をみるために、 β を 0° から 1° ずつ大きくしてみる。この場合、隣接する2要素を動かすことはせず、重力の方向を回転させていくことで β の変化に対応させる。着目要素は $\beta = 0^\circ$ とした時に、図-5(a)の中に示した下側要素との間の①～⑦の接触点によって支えられ、右側要素とは接するように配置した。なお、①～⑦は接触する2つの円を特定する番号と考える。したがって、着目要素の動きに伴いそれぞれの番号で表された点は動くことに注意する。 $\beta = 1^\circ$ で右側要素との間の接触点はすべて消失し、以後着目要素が右側要素と接することはない。①～⑦の接触点の存在は着目要素と下側要素との間のかみ合わせとみなすことができるが、 β が大きくなるにつれ、⑦⑤⑥③④の順で接触点は消失し、 $\beta = 28^\circ$ となった時点で要素は転がるように大きく回転し始めるため、かみ合わせの効果はなくなり①②の接触点が離れて要素は落下する。そこで、重力のみ作用しているときには安定した状態である $\beta =$

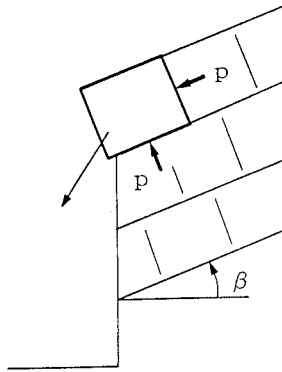


図-3 岩盤斜面に発生する落石

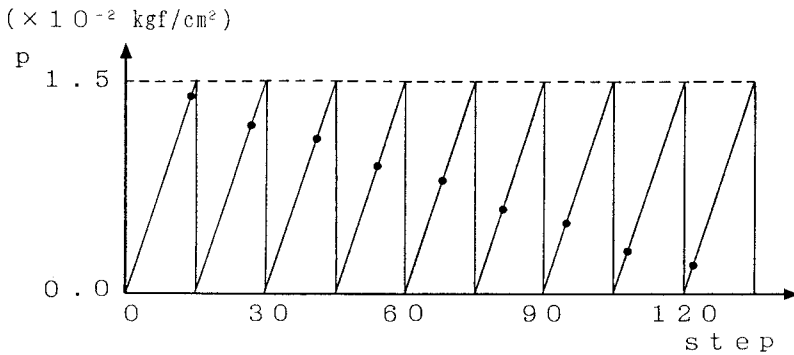
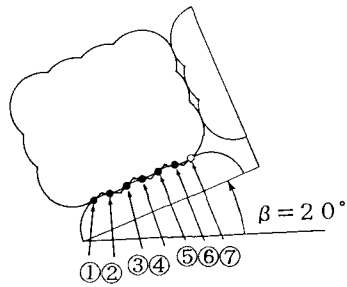


図-4 解析ステップと圧力との関係

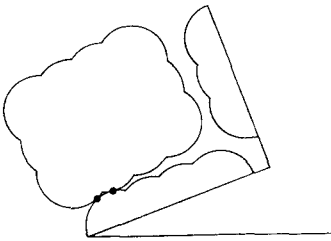
20° となった所を初期状態とし、凍結融解作用を想定した繰り返し载荷を行うこととした。

ところで、凍結融解作用は複雑な現象である。現時点ではそのメカニズムは把握できていないが、おおよそ次のような考え方で模擬的に解析することとした。凍結時には間隙水が膨張するために図-3の中に示すような圧力 p が生じて岩塊を動かす。しかし、凍結時には節理に付着力のようなものが働くであろうから、岩塊の変形はある程度に抑えられるものとみなすべきであろう。ここでは敢えて節理での付着力をモデル化することはせず、岩塊と考えている要素重心の移動量に限界値を設け、移動量が限界値に達した時点で力の釣合を満たしているか否かに関わらず要素を固定する。そして融解時に対応させて圧力 p を除去すると同時に、再び要素を剛性に基づいて動かし出す。 p は図-4に示すように繰り返し加えた。解析では p を $1 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^2$ ずつ増加させる。図の横軸はその際のステップ数に相当する。また、図中のプロットは要素重心の移動量が限界値に達した点である。要素重心の移動量は便宜上斜面と平行な方向の成分 δ でその大きさを判定することとし、限界値 $\delta_{\max}$ は 5mm と定めた。ただし、凍結融解のサイクル毎に δ の原点は改めて定める。

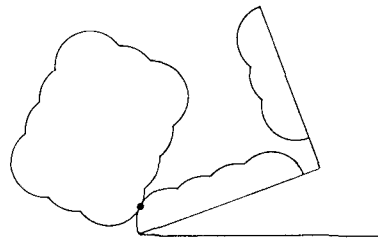
図-5は解析結果である。初め、水平面と $\beta = 20^\circ$ なる角度で斜面上のかみ合わせによって安定した状態にあった岩塊要素が、凍結融解作用を想定した圧力 p の繰り返し载荷によって落下するに至る過程をとらえることができた。(a)、(b)はどちらも力の釣合条件を満たした状態である。(a)は初期状態で、



(a) 初期状態



(b) 8サイクルの凍結融解後の状態



(c) 落石の発生

図-5 モデルが落石に至る過程

図に①～⑥で示す接触点が存在する。⑦が白抜きとなっているのはこの時点ですでに離れていることを示す。

(b) は8サイクルの凍結融解後の状態で、①②の接触点以外は離れてしまい、浮き石状態となっている。辛うじて①②の接触点が存在してかみ合わせが残っているため、力の釣合が保たれている。このような状態は要素表面に凹凸があって初めて得られるものである。(b)の状態からさらに凍結融解を想定した載荷・除荷を繰り返すと、②の接触点も消失して岩塊は完全にかみ合わせを失い、融解時に最終的に残った接触点①のまわりを回転しながら落下する。(c)は岩塊が落下する途中の状態を示しており、この図に限って力の釣合条件は満たされていない。

4. あとがき

粒状要素法あるいは個別要素法のように、不連続部を含む材料を剛体要素の集合体とみなしてモデル化した解析を行うとき、構成要素を円や球と仮定してしまっては不適当な場合がある。そこで、円や球を重ねるを許して組み合わせる種々の形状の要素を作ることと考え、この場合に粒状要素法において計算上必要となる変換行列を導いた。この行列は、任意形状の要素に対して適用できるので、粒状要素法で任意形状の要素を扱うための定式化が成ったことになる。円や球を組み合わせた要素を用いる手法によって、粒状要素法をより多くの問題の解析に適用することが可能となった。

新たに導かれた変換行列を用いた例題として、円を組み合わせた要素で矩形の岩塊をモデル化し、はく落型落石を想定した簡単な2次元解析を行った。要素として円の組み合わせを考えたのは、計算アルゴリズムを計算時間のかからない単純なものにするための要請からであったが、これによって、例えば岩塊を楕円や長方形でモデル化した場合には直接的に考慮することの不可能な、岩塊表面の凹凸を要素の性質としてもたせることが可能となり、岩塊のかみ合わせに由来する落石直前の浮き石状態もシミュレートできることを明

らかにした。

本来、材料の不連続部の表面は凹凸のある不規則な形状を有するものと考えられる。したがって、粒状要素法や個別要素法で不連続部をもつ材料の挙動を解析しようとするとき、扱う問題によってはこの不規則形状をできるだけ忠実にモデル化することが求められることもあろう。本文で示した任意形状要素に対応した定式化はこれを行うための必要条件となる。また、解析上無視できない材料表面の不規則形状を円や球の組合せから成る凹凸に置き換えることができるとすれば、円や球を組み合わせた要素を用いる手法は、その計算上の有利さから上記の問題を解析するための有力な手段ともなるであろう。

参考文献

- 1) Cundall, P. A. and Strack, O. D. L. : A discrete numerical model for granular assemblies, Geotechnique, Vol. 29, No. 1, pp. 47~65, 1979.
- 2) 岸野佑次：新しいシミュレーション法を用いた粒状体の準静的挙動の解析，土木学会論文集，第406号，III-11, pp. 97~106, 1989.
- 3) 土倉泰・岸野佑次・佐武正雄：粒状要素法による粒状体の3次元変形機構の解析，土木学会論文集，第436号，III-16, pp. 111~120, 1991.
- 4) 松井淳・岸野佑次：剛性行列に基づく粒状体の変形局所化の解析，土木学会第47回年次学術講演会講演概要集第3部，pp. 22~23, 1992.
- 5) 渡部秀貴・岸野佑次：フーチング荷重下の粒状体のすべり解析，土木学会第47回年次学術講演会講演概要集第3部，pp. 392~393, 1992.
- 6) Meguro, K., Iwashita, K. and Hakuno, M. : Fracture analyses of media composed of irregularly shaped regions by the extended distinct element method, Structural Eng. /Earthquake Eng., Vol. 8, No. 3, pp. 131s~142s, 1991.
- 7) R. K. リブスレイ (山田嘉昭・川井忠彦訳)：マトリックス構造解析入門，培風館，p. 46, 1968.
- 8) R. D. Mindlin and H. Deresiewicz: Elastic spheres in contact under varying oblique forces, J. appl. Mech. Vol. 20, pp. 327~344, 1953.

(1992年9月21日受付)