

砂の様な粒状体の増分非線形モデル：重要性と定式化
 An incrementally nonlinear constitutive model for granular materials like sand:
 significance and formulation

飛田善雄* 吉田 望**

by Yoshio TOBITA and Nozomu YOSHIDA

The importance of proper mathematical formulation of incrementally non-linear character in the deformation behavior of granular materials like sand under non-proportional loadings has been recognized in geomechanics. Experimental results indicating the importance of incrementally nonlinear behavior and the effects of induced anisotropy are firstly reviewed, and we give four deformation features observed in experimental results which have been missed in the most of constitutive models proposed up to now. A mathematical formulation with account for these deformation features is developed based on the hypothesis: two micromechanisms, fabric changes and multiple slips, contribute to the inelastic deformation of sands. The relationships among the incrementally nonlinear constitutive models for geomaterials proposed up to now are discussed based on the proposed model

1. はじめに

地盤材料の構成モデルは、数理塑性理論に基づく定式化を中心に発展してきた。古典的数理塑性理論では、塑性ポテンシャル g 、負荷（降伏）関数 f が導入され、数学的な簡潔性が保たれている。この定式化では、弾性・塑性コンプライアンス C^e 、 C^p 共に、ひずみ速度と応力速度の関係は線形性を示している。古典的弾塑性モデルは単調載荷時の変形挙動を良く表現し、有限要素法を用いた地盤の応力・変形解析に利用され、工学的にも有用な情報を与える様になっている。

ところが、近年の実験技術の進歩により、古典的な弾塑性モデルでは表現できない変形特性（非共軸性、増分非線形性、異方性の影響など）が明らかになってきた。これらの特性は、後述する様に（第2章(2)）分岐解析などの特殊な問題ばかりでなく、地盤工学における比較的身近な問題（例えば、軟弱地盤上の盛土）においても重要であることが認識されるようになってきた。

本文の目的は、砂の変形挙動における増分非線形性に特に注目して、その重要性、必然性、定式化を議論することである。併せて、異方性が砂の様な粒状体の変形・破壊挙動に及ぼす影響が大きいことを考えて、異方性の定式化についても必要な議論をおこなう。

本文で対象とする様な増分非線形性を有する構成モデルを実際に境界値問題に適用すると、解の唯一性・安定性などを保証することが難しく、必然的に数値解析にも大きな影響を与える。それにも係わらず

* 工博、八戸工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒031 八戸市妙字大開88-1)

** 工博、佐藤工業（株）中央技術研究所耐震解析室室長 (〒243-02 厚木市三田47-3)

議論の対象とするのは、地盤工学の重要なケースにおいて、増分非線形性が顕著に現われるためであり、十分な検討が必要と考えているからである。

本文においては、ひずみ軟化現象は分岐後のすべり面形成などの不均質な変形による幾何的な現象として捉え、分岐前（近似的には、ひずみ硬化時の挙動）を構成モデルの対象とする。ここでは、砂の様な粒状体に関して論ずるが、同様の議論は一般的な地盤材料（砂、粘土、中間土、岩、コンクリートなど）に対しても可能と考えている。応力・ひずみは引っ張りを正とする*。

記号：本文では、ベクトル、テンソル量をボールド（太文字）をつけて表現する。主な記号の約束は、直交デカルト座標系における指標表示を用いると、次の通りである。

$$\mathbf{T} = T_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \mathbf{AB} = A_{ik} B_{kj} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j, \quad \text{tr}(\mathbf{AB}) = A_{ik} B_{ki}, \quad \mathbf{L:A} = L_{ijk1} A_{k1} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

なお本論文における定式化は、微小ひずみ理論の範囲で行なう。

2. 増分非線形性の定義とその重要性

(1) 増分非線形性の定義

本文における増分非線形性の定義とその重要性について記述する。併せて、混乱を生じる可能性のある用語についての考え方も記す。古典的弾塑性モデルを通常の応力空間における定式化で表現すると、次の式になる。

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{e}} &= \dot{\mathbf{e}}^e + \dot{\mathbf{e}}^p \\ \dot{\mathbf{e}}^e &= \mathbf{C}^e : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\mathbf{e}}^p &= \frac{1}{h^p} (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^p : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{C}^e$ は、4階の弾性コンプライアンステンソル、 $\dot{\mathbf{e}}$ はひずみ速度テンソルであり、 $\dot{\mathbf{e}}$ に上添え字 e, p は弾性成分と塑性成分を表す。 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ は応力速度である。 h^p は塑性係数であり、負荷条件の適合性の条件により決定される。 $\mathbf{P}$ は現応力点に関する塑性ポテンシャル g の法線方向（ $\mathbf{P} = \partial g / \partial \boldsymbol{\sigma}$ ）、 $\mathbf{Q}$ は負荷関数の現応力点に関する法線方向である（ $\mathbf{Q} = \partial f / \partial \boldsymbol{\sigma}$ ）。塑性の発生する条件：負荷条件は、 $f=0$ かつ $\text{tr}(\mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}}) > 0$ である。

式（1）で注意すべきことは、塑性コンプライアンス $\mathbf{C}^p$ の中には、応力速度に関する情報は含まず、その時の状態に依存していることである。言い換えると、増分（速度）表現では線形性を示すことになる。以下では、構成モデルは全て速度形式で記述するが、コンプライアンスの線形・非線形を議論するときには、増分という慣用的表現を用いることにする。

一般に*古典的*弾塑性モデルという場合は、Druckerの安定性の仮説（例えば、橋口（1991）¹⁾参照）を満足する関連（あるいは連合）流動則（ $\mathbf{P}=\mathbf{Q}$ ）を示すが、本文では増分表現において、 $\mathbf{C}^p$ が線形性を示すモデルを、便宜上古典的と呼ぶことにする。この定義より、一般的には、（1）式の $\mathbf{P}$ や $\mathbf{Q}$ は応力テンソル以外の量も含むことができる。例えば、内部構造を表現するダメージテンソルやファブリックテンソル、あるいは移動硬化理論における背応力などである。これらのテンソル量を含むことにより、塑性コンプライアンスは、異方的な性質を表現することになる（例えば、Boehler²⁾、Tobita³⁾など）。このとき、 $\mathbf{H}$ と $\boldsymbol{\sigma}$ の主軸方向が一致しない場合には、主応力軸を座標系に採用しても、 $\dot{\mathbf{e}}^p$ は主軸方向とはならず、非共軸性（塑性ひずみ速度と応力の主軸方向が一致しない性質）を示すことになる。

異方的な内部構造の存在とその変化が砂の変形・破壊挙動に大きな影響を与える実験事実はよく知られている。しかし、その数式的表現が試みられたのは最近のことであるので、本文でも、構成モデルへの異方性の導入についてやや詳しく記述する。

増分非線形モデルは、この $\mathbf{C}^p$ に応力速度の方向 $\mathbf{r}=(\dot{\boldsymbol{\sigma}}/|\dot{\boldsymbol{\sigma}}|)$ が含まれるモデルを意味する。ここでは時間

*地盤工学においては、圧縮成分を正とするのが慣例であるが、この約束だと応力・ひずみ以外の物理的成分が構成モデルに導入された場合、符号の混乱が生じやすいので、この約束を用いる

依存性のない弾塑性体を対象とするので、応力速度の方向依存性はこの $\mathbf{r}$ を介して表現されることになる。増分非線形性を示す構成モデルは、地盤材料に対してもすでに提案されている^{4,5,6,7,8,9)}。本文では定式化の対象として、負荷規準をもつ弾塑性的な枠組みの中でのモデルを対象に議論していく。このとき、 $\mathbf{C}^p$ の数学的構造は、負荷規準として $\text{tr}(\mathbf{Q}\dot{\boldsymbol{\sigma}})$ を含むことになるので、基本的には、

$$\mathbf{C}^p = \frac{1}{h}(\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) \quad (2)$$

という形式をとることになる。一般的には、 $h^p, \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ いずれもが $\mathbf{r}$ に対する依存性をもつことになる。単調な応力経路に対しての適用（例えば、せん断帯の発生条件など）を中心に考えるのであれば、 $\mathbf{C}^p$ を（2）式のように仮定する必要はなく、単に増分非線形項を古典的弾塑性体に加付することが考えられる¹⁰⁾。ここでは、繰返し載荷時の挙動も考慮しているので、上記のような形式を考える。

（2）地盤工学における増分非線形構成モデルの重要性

地盤工学における増分非線形構成モデルの重要性について簡単にまとめる。古典的弾塑性モデルは、単調な（主応力軸の回転を含まない）応力経路での地盤材料の変形挙動をかなりの精度で表現する。有限要素法を用いた地盤の応力・変形解析に利用され、工学的にも有用な情報を与える様になっている。ところが近年、実験技術が進歩し、応力主軸の方向を制御できるようになり、地盤内の応力経路の忠実なシミュレーションが可能となった結果として、古典的な弾塑性モデルでは表現できない特性：非共軸性、増分非線形性（あるいは、塑性ひずみ増分の応力速度方向依存性）など、が明らかになった（第3章参照）。実際の地盤で生じる応力経路は、単調・繰返しを問わず、主応力軸の回転を含むものであるから、より詳細な解析が必要とされる場合には、増分非線形性を考慮した構成式が必要となる。古典的弾塑性モデルでは、地盤内に発生する基本的な応力経路の変形挙動が表現できず、長い間合理的な定式化はなされなかった経緯がある。例えば、自然に堆積した砂地盤に単純せん断が与えられたときの挙動である（第3章、（3）参照）。この問題も構成モデルに増分非線形性を与えることにより解決できる。

近年、地盤工学の分野でも、材料内に発生する不均質な変形（せん断帯、すべり面の形成）が目されるようになってきた。古典的な弾塑性モデルでは、分岐問題としてのせん断帯の発生条件が実験事実と合わず、非共軸性を示すモデルが必要となることは、認識されるようになってきた。すべり面の形成とその発達、そして地盤の破壊を予測することは、地盤工学においては、常に最重要な課題である。地盤工学で用いられている実用安定解析手法：極限釣り合い解析の適用性と限界を論ずる場合にも重要な研究である。

多くの文献（例えば^{10,11)}）では、非共軸性がせん断帯の発生条件を精度よく表現する（不安定効果をもたらすともいわれる）性質と記述されているが、（1）式の増分線形モデルのうち、 $\mathbf{P}$ や $\mathbf{Q}$ に異方性テンソルを含んだモデルがもたらす非共軸性はこのような効果は示さない（Iizuka et al.¹²⁾）。このことより不安定効果をもたらすのは、増分非線形性がもたらす非共軸性と考えることができる。また、応力速度のうち、 $\mathbf{Q}$ に直交する接線成分によっても、（接線）塑性ひずみ速度が発生するモデルが提案されている。この時、 $\mathbf{C}^p$ に線形性を持たせようとすると、接線成分は負荷規準をもたない亜弾性体としての定式化となり、物理的に不合理なものと考えられ、その適用は応力反転を含まない単調な経路に限定される。以上のことから、本文では一貫して、砂の変形挙動のより本質的な性質と思われる増分非線形性に着目している。

この様に、増分非線形性を考慮した構成モデルの構築を試みることは、単に構成式だけの問題ではなく、地盤工学的にも重要な要素の一部となりうることが理解できる。

3 実験事実としての増分非線形性

最近の実験結果より増分非線形性を明確に示すデータを紹介し、定式化に際して重要となる事項を指摘する。ここでのデータは全て中空ねじり試験器を用いた結果である。中空ねじり試験器は主応力軸方向を変えることが可能であり、様々な応力経路における変形特性を調べるのに、最も適した試験器と考えられ

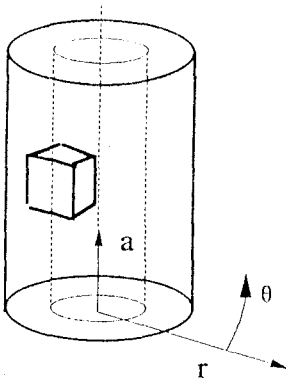


図1：中空ねじり試験器の応力状態

ている。

図1に、中空ねじり試験器の供試体の形状と応力成分を示す。研究者により応力成分の表現が異なるが、以下では図1の応力成分の表現を用いて記述する。用いる応力はすべて全応力より間隙水压を引いた有効応力であるから、(′)などの添え字は用いない。

(1) Miura et al.による実験結果¹³⁾

図2はMiura et al.による実験結果(Fig.16, Fig.22)に基づいて作成したものである。図は平均応力により正規化された偏差応力 $(\sigma_a - \sigma_\theta)/2p^*$ と

$\tau_{a\theta}/p^*$; $P^* = -(\sigma_a + \sigma_\theta)/2$ を直交座標系として採用し、ある応力状態におけるひずみ増分ベクトルの方向を単位長さとして表現したものである。実験では、中間主応力の影響を表す $b = (\sigma_2 - \sigma_3)/(\sigma_1 - \sigma_3)$ は0.5に固定している。

Pは、主応力方向を固定して、平均主応力pを一定にして、単調に载荷したときのひずみ増分ベクトルの方向を示している。Rをつけたベクトルは、平均主応力p、b値、主応力差(すなわち偏差応力の二次不変量) $q = (-\sigma_1 - \sigma_3) = \{(3/2) s_{ij} s_{ij}\}^{(1/2)}$; s_{ij} は偏差応力である)を一定にして主応力軸方向を時計回りに連続的に回転したときの結果である。二つの実験のデータポイントは必ずしも一致しないが、単調载荷時のひずみ増分方向はほとんど変化しないので、始点を同じに取り描いている。

図より、単調载荷時のひずみ増分ベクトルは、応力方向(Sと表示されている)とわずかにずれている(主応力軸方向と塑性ひずみ増分の主軸方向のずれを物理的角度で表し、以下ずれ角と呼ぶ;図では座標の選び方によりずれ角の2倍の角度が表示されている)。主応力軸方向が堆積方向と一致する場合(鉛直線上)には、ずれ角はない結果となっている。一方、主応力軸が回転する場合には、ずれ角は 20° 以上ある。このずれ角は主応力方向と(異方性の主軸となる)堆積方向がなす角度に密接に関係することが示されている(Fig.25 in Miura et al.)。ひずみ増分方向(弾性ひずみ増分は小さいので、ほぼ塑性ひずみ増分方向と考えることができる)は、ある応力状態に対して唯一に決定されるのではなく、応力増分方向に大きく影響されることが解かる。

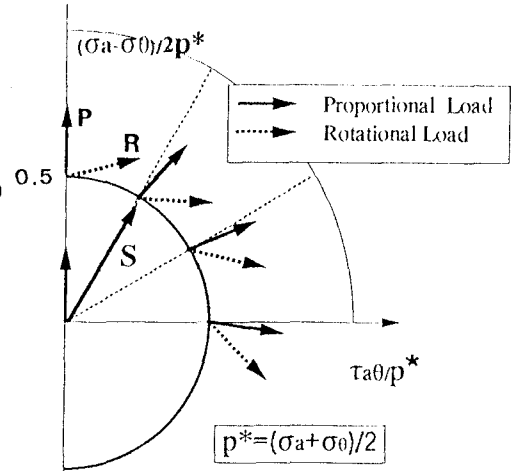


図2：単調経路と主応力軸回転経路のひずみ増分方向(Miura et al., による)¹³⁾

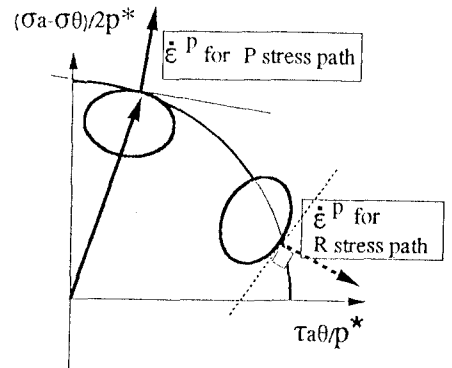


図3：増分線形を示す複合硬化モデルによる図2実験結果の表現の可能性

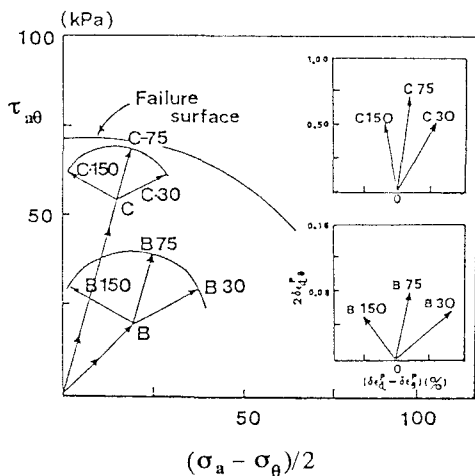


図4：塑性ひずみ増分の応力速度方向依存性 (Gutierrez et al. による)¹⁵⁾

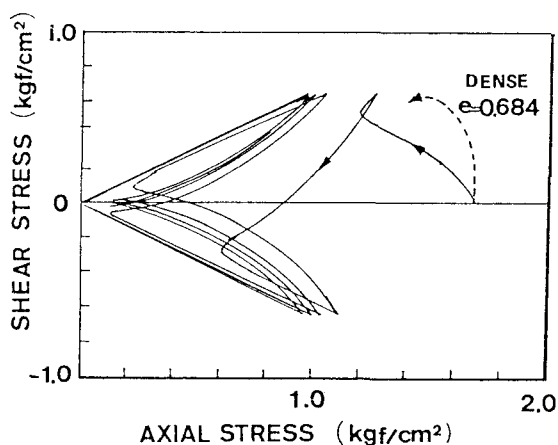


図5：Ko圧密を受けた砂の繰り返し単純せん断時の有効応力経路 (Pradhanによる)¹⁸⁾

また図1より、単調載荷時と主応力軸回転時の非共軸性の程度が大きく異なることは、非共軸性をもたらすメカニズムが異なることを示唆している。Miura et al (1986b)¹⁴⁾は、このような結果を表現できるモデルとして、方向性を持ったすべり面を多数配置する多重すべりモデルを提案し、実験結果との整合性を報告している(第5章参照)。

図2の結果では、ある応力状態に達するまでの応力経路が異なるので、内部履歴変数を含むことにより、増分線形性を考えた(即ち、塑性ポテンシャルを考えた)モデルで表現できる可能性を残している(図3参照)。

(2) Gutierrez et al.の実験¹⁵⁾

図4は、Gutierrez et al.(Fig.6)の実験結果を再録したものである。但し、図中の記号は原著と変えている。同一の応力履歴を与え、異なる方向に応力増分を与えることによりひずみ増分の唯一性が成立するかどうかを検証した。その結果は明らかに非唯一性を示すものとなった(この結果は、基本的に図3のような定式化を否定する)。また、応力レベルが高くなると、ひずみ増分の方の範囲が狭くなることも解かる。

彼らは、この実験事実を表現するために、破壊曲面上に共役点を求める境界曲面モデルを提案した。共役点は、応力増分の方に延長した線分と破壊曲面の交点として定められる。共役点における法線ベクトル $\bar{Q}$ を求め、その偏差成分 $\bar{Q}^*$ と偏差塑性ひずみ増分の方が一致するという流れ則を提案した。またダイレイタンスは、非共軸性を考慮した一般化されたストレスーダイレイタンスー関係式を用いた。 $\bar{Q}$ の決定に、応力増分の方が直接的に関係するので、 P, Q ともに応力増分の方に依存する増分非線形モデルになっている(第5章参照)。

塑性ひずみ増分の非唯一性を示す最初の実験は、Tatsuoka and Ishihara¹⁶⁾により三軸圧縮試験器を用いて行われた。ある与えられた $p(=(\sigma_1+2\sigma_3)/3)$ 、 $q(=\sigma_1-\sigma_3)$ に対して dq/dp が異なる応力探索試験を行ったとき、ひずみ増分ベクトルの方向が異なることを報告している。すなわち、主応力軸が固定された場合でも、唯一の塑性ポテンシャルを p - q 面上に定義することができないことを示したことになる。この結果は、圧密時とせん断時の変形メカニズムは異なり、二つのメカニズムを独立とする二重等硬化モデルの発達を促した。さらに、Ishihara and Okada¹⁷⁾はせん断は圧密に影響を及ぼし、逆の場合も影響が

あり、この二つの経路が独立ではなく、連成挙動を示すことを明らかにした。次章の定式化では、これらの実験結果も考慮できる構成モデルの提案を行なう。

(3) Pradhan の実験¹⁸⁾

比較的身近な場合の増分非線形の重要性をPradhanの実験に基づいて検討する。前記の2つの例とは異なり、直接的に増分非線形性を示す実験ではないが、暗に増分非線形モデルの必要性を示唆し、また異方性の発展式の合理的な定式化が不可欠であることを示している。

図5は、 K_0 状態で圧密された砂 ($K_0=(\sigma_a/\sigma_g)=0.38$) に単純せん断変形を与え、非排水条件 (γ_{a0} のみが0でなく、他のひずみ成分は0となる) で繰り返し载荷を与えたときの有効応力経路を示している。立ち上がりの間隙水圧の発生量が大きいことが解かる。その後、応力反転後も間隙水圧が増加し、ついには瞬間的に有効応力が0となり、繰り返しと共に変形が増大するサイクリックモビリティ現象が起こっている。やや密な砂における典型的な実験結果である。この経路は、強震時の飽和砂地盤の液状化現象を考えるときの最も基本的な経路である。この基本的な挙動を表現できないモデルは、液状化解析への適用性に問題がある。

主応力軸が固定された実験結果をもとに、等方硬化理論による正規降伏曲面を境界曲面とし、適当な内挿関数を用いて繰り返し载荷時の構成モデルを構築したとする。そのモデルが主応力軸固定時の挙動を表現できるからといって、実地盤の解析で大事な図5の挙動を表現できる保証はない。図中の鎖線は、このようなモデル化を行なったときの著者らの結果の傾向を示している。初期の立ち上がり部の大きな間隙水圧の発生とは全く異なる結果を示している。このような結果となってしまう最大の理由は、作用している応力の方向から大きくはずれて応力増分が与えられるような場合には(図5の場合には 45° ずれている)、それまでの履歴にはほとんど影響されない変形が生じてしまうからである。この現象を等方硬化理論で表現することはできない。なぜなら、等方硬化を前提とするモデル化では、応力の影響はすべて不変量で表現され、不変量の変化と塑性ひずみ増分・ダイレイタンス増分の大きさは、1対1に対応する。 K_0 圧密を受けた砂は既に大きなせん断力が作用し、負のダイレイタンス増分は大きくならず、図5のような大きな間隙水圧の変化は表現できない。この様な変形特性の違いを表現するためには、応力増分方向に依存する定式化：増分非線形性の導入を定式化のいずれかの段階で行なうことが不可欠となる。

ここでは、詳しい議論はしないが、非排水時の繰り返し時の挙動では、サイクリックモビリティ現象が大事な性質となる。これは繰り返しとともに、同じ有効応力比に対して塑性係数が減少することを意味するものである。このような現象が生じる理由は、繰り返し载荷中に内部構造が著しく変化し、せん断方向に卓越した異方性をもつため、逆方向载荷時に塑性変形が生じやすくなるためと考えられる。このような現象の表現も対象として、次章において異方性とその変化を考慮した定式化を考える。

以上、増分非線形性(あわせて異方性)の重要性を明らかにするため、最近の実験結果を紹介した。このように主応力軸が回転する、より一般的には応力と応力増分方向が異なる非比例負荷時の砂の変形挙動の表現には、増分非線形性に対する考慮が大切なことが理解できる。金属などの材料においても、物性的観点からは、増分非線形性は重要な変形特性と考えられるが具体的な解析の多くではあまり問題にならないようである。これに対して、地盤工学の分野では、最もありふれた応力経路で増分非線形性が現われてくる。このために、増分非線形性の重要性は、地盤工学の方が重要と言えるかも知れない。

4 増分非線形性を有する構成モデルの定式化

(1) 目的とする変形特性

本章では、3章の実験結果により示された砂の変形特性と定性的な整合性をもつ構成モデルの数学的な枠組みを与えることを目的とする(定量的にも満足できる構成モデルはより複雑な定式化が必要である)。詳細なパラメータの決定、関数の形状、曲線近似等の問題は議論しない。第3章において紹介した

変形特性を、後の便宜のために、ここで整理しておく。

(F-1) 主応力軸の回転を含む非比例負荷経路では、塑性ひずみ増分の方法は応力増分の方法に大きく依存する；

(F-2) 主応力軸が固定された試験でも、平均主応力 p と偏差応力 q の増分の比 dq/dp が異なれば、発生する塑性ひずみ増分は、大きさ、方向共に異なる；

(F-3) 異方性の主軸となる堆積方向と応力主軸の方法が一致しないときには、単調載荷時であっても異方性の影響と考えられる非共軸性が現われる；

(F-4) 平均主応力 p 一定のせん断経路と応力比 $\eta(=q/p)$ 一定の圧密経路における変形挙動は独立ではなく、互いに影響しあう連成挙動を示す。

(F-1,2)は増分非線形性に係わる変形特性であり、(F-3,4)は内部構造における異方的な性質の発達によるものとする定式化を行なう。

以下の定式化の基本的な考え方は、Nemat-Nasser¹¹⁾を基礎としている。塑性ひずみ速度の定式化においてすべり面を導入する。すべり面を複数個導入することにより非共軸性や増分非線形性が表現できることを、二重すべりにより、最初に明確にしたのはSpencer（総合報告⁴⁾参照）である。Nemat-Nasserは結晶塑性理論の成果も踏まえ、一般性を有する定式化を示している。本文でもこれらの成果に従うこととし、拡張して異方性の影響も考慮できる定式化を示す。本章における定式化よりもより一般的な定式化を行ない、地盤材料に共通して適用できるモデルを構築することも可能と思われるが、ここでは、砂の変形挙動に限定し、目的とする変形特性と定性的には整合性を有する最も簡単な構成モデルの定式化を行なう（二つの相異なる微視的メカニズムを考えるコンクリートや岩に対する類似の構成モデルがDragon and Mroz¹⁹⁾、Bazant and Kim²⁰⁾などにより提案されている）。

(2) ひずみ速度の分割

全ひずみ速度は、粒子間力の伝達に密接に関係する内部の構造変化によるひずみ速度 $\dot{\epsilon}^*$ とすべり面に沿ったすべり運動による塑性ひずみ速度 $\dot{\epsilon}^p$ に分離できるものとする。

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^* + \dot{\epsilon}^p \quad (3)$$

このような分割は、(F-2,4)の変形挙動を表現することを目的としている。通常、地盤工学においては、 p 一定のせん断経路における塑性ひずみ速度と $\eta(=q/p)$ 一定の圧密経路における塑性ひずみ速度の線形和を考えるが、異方的な構造を有する砂では、等方圧密経路であってもすべり運動は生じているので、(3)式による分割の方が合理的と考えられる。また、微視的メカニズムを想定して定式化する手法は、他の材料に対しても基本的な概念は適用できるという一般性がある。

(3) 構造変化に関するひずみ速度成分

砂の様な粒状体は、与えられた応力履歴により、その内部構造が容易に変化する。砂内部の異方的構造の変化については、せん断中ほとんど変化しない固有異方性（粒子の長軸方向の卓越的配向による）と容易に変化する（応力）誘導異方性（例えば、粒子の接触方向の分布による）がある。ここでは、誘導異方性に着目した定式化を行なう。

まず、粒状体力学において提案された異方的性質を表現する構造テンソルと修正応力を導入する^{3,21)}。構造テンソルは、ある領域における粒状体の微視的・幾何的な量の空間的な分布を2階のテンソルとして表現したものである。空間的な分布がある方向に卓越していれば、構造テンソルは主値が異なり、異方的性質を表現する。この構造テンソルを $\mathbf{H}$ と表現する。修正応力は、一般的には構造テンソル $\mathbf{H}$ と応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の等方関数として考えることができる。すなわち、

$$\mathbf{T} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) \text{ s.t. } \mathbf{Q} \mathbf{T} \mathbf{Q}^T = \mathbf{f}(\mathbf{Q} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{Q}^T, \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{Q}^T)$$

ここに、 $\mathbf{Q}$ は任意の直交テンソルである。上付き T は転置を表す。このように一般化すると、古典的硬化モデル（等方、移動、複合）は修正応力により得られる硬化特性の特別な場合として求めることができる²¹⁾。粒状体力学の分野で最もよく利用されるのは、物理的な意味（構造テンソルで与えられる平均的な接

断面積に作用する応力と解釈できる³⁾を与えることのできる次の形の修正応力である。

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}\mathbf{H} + \mathbf{H}\boldsymbol{\sigma}) \quad (4)$$

一般に、等方体に関する構成モデルの応力を、修正応力により置き換えると、簡単な演算のみで異方的な性質を表現することができる。これを異方性を構成モデルに導入するための修正応力法と呼んでいる²¹⁾。この方法は配向的組織をもつ金属材料に対して、その異方的性質を表現するためにBoehler and Sawczuk²²⁾がすでに提案しており、修正応力は変換テンソルと呼ばれている。ここでは、粒状体力学における修正応力という用語を採用する。ここでも、(5)式による修正応力と構造ひずみの関係は等方性を示すとする。すなわち、

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{C}^e : \dot{\mathbf{T}} \quad (5)$$

ここに、 $\mathbf{C}^e = -(\nu/E)\boldsymbol{\delta} \otimes \boldsymbol{\delta} + ((1+\nu)/E)\mathbf{I}$ であり $\boldsymbol{\delta}$ はKroneckerのデルタであり、 $\mathbf{I}$ は4階の等方テンソルである。 ν はPoisson比、 E はYoung係数である。砂の弾性定数は拘束圧やひずみレベルに依存するので、変形と共に $\mathbf{C}^e$ も変化する事になる。つまり、 $\mathbf{C}^e$ の構造依存性を定式化する必要がある。これは定式化を著しく複雑にする。ここでは、簡単のために $\mathbf{C}^e$ の変化は考慮しない。

(5)式の両辺を微分して、速度表現を求めると

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \mathbf{C}^e : \dot{\mathbf{T}}; \quad \dot{\mathbf{T}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \mathbf{H}} : \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{L} : \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{M} : \dot{\mathbf{H}} \quad (6)$$

ここに、 $L_{ijkl} = (\delta_{ik}H_{lj} + H_{ik}\delta_{lj})/2$, $M_{ijkl} = (\delta_{ik}\sigma_{lj} + \sigma_{ik}\delta_{lj})/2$ となる。

構造変化は、非可逆的な性質を有するので、何らかの負荷規準が必要となる。ここでは、形式的に塑性理論のように、ポテンシャル G^f と負荷関数 F^f を導入して、

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{h} \mathbf{P}^f \text{tr}(\mathbf{Q}^f : \dot{\boldsymbol{\sigma}}); \quad \mathbf{P}^f = \left(\frac{\partial G^f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right), \quad \mathbf{Q}^f = \left(\frac{\partial F^f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (7)$$

と表現できるものとする。構造変化は応力増分の方向に強く依存することが知られているので、一般的には $\mathbf{P}^f$ や $\mathbf{Q}^f$ が方向依存性をもつことが考えられる。しかし、ここでは変形の増分依存性は、後述する塑性ひずみ増分により表現できるので、構造変化および構造ひずみ速度の定式化は線形性を示す定式化を行ない、簡略化している。また、構造テンソルは応力テンソルと密接な関係をもち、単調に載荷した場合にはその主軸が一致する傾向を示す。しかし、非比例負荷経路では一般的には一致しないと考えられるので、ここでは独立と考えて定式化している。

(7)式を(6)式に代入して、構造変化に関係するひずみ速度を与える式として次式を得る。

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e = \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e + \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f = \mathbf{C}^e : \left[\mathbf{L} + \frac{1}{h} \mathbf{M} : (\mathbf{P}^f \otimes \mathbf{Q}^f) \right] : \dot{\boldsymbol{\sigma}} \quad (8)$$

ここに、 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^e$ は構造変化がないときの応力変化によるものであり、 $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f$ は構造変化によるものである（一般には、さらに $\mathbf{C}^e$ の変化による成分が加わる）。この $\dot{\boldsymbol{\epsilon}}^f$ は非弾性成分であり、圧密とせん断の連成挙動が重要でないときには塑性成分とみなした定式化も可能である。

(4) 塑性ひずみ速度の定式化

砂のような粒状体の場合には、多結晶金属の様に、ひずみ硬化時には明確なすべり面を指定することはできず、すべり面の概念を持ち込むことには、必ずしも物理的な裏付けがあるわけではない。しかし、すべり面の概念に代わるような（物理的基礎が確固たる）メカニズムは提案されていない。すべり面を導入してモデルの定式化を行なうと、比較的簡単な数学的構造で多様な変形挙動（特に、増分非線形性）を表現できる、という理由から、ここではすべり面に沿ったすべり運動を考える¹⁷⁾。

いま、法線ベクトル $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ を有するすべり面を考える。この面に沿って、 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ の大きさをもつ（工学的）せん断ひずみ速度が生じ、それと共に、 $\mathbf{n}^{(\alpha)}$ の方向にダイレイタンスーを表現するひずみ速度 $\dot{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ が生じているものとする。 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ と $\dot{\mathbf{v}}^{(\alpha)}$ の関係をいま $\dot{\mathbf{v}}^{(\alpha)} = \tan \nu^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)}$ と表現する。この様な運動を考えると、固定された座標系におけるこの運動の表現は、通常の2階のテンソルの座標変換則を利用して、次のように求めるこ

とができる。

$$\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}(\alpha)} = \mathbf{P}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (9)$$

$$\mathbf{P} = \frac{1}{2}(\mathbf{s} \otimes \mathbf{n} + \mathbf{n} \otimes \mathbf{s} + 2 \tan \nu \mathbf{n} \otimes \mathbf{n})$$

(9)式では、簡単のために α を省略している。以下混乱の生じない場合は特定のすべり面を示す α は省略する。

多数のすべり面が存在し、活動するすべり面の運動の総和により全体の塑性ひずみ速度が決定されるものとする、

$$\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}} = \sum_{\alpha=1}^N \mathbf{P}^{(\alpha)} \dot{\gamma}^{(\alpha)} \quad (10)$$

ここに N は活動するすべり面の総数を表す。各すべり面における負荷規準は、 α -すべり面の活動を支配する負荷関数 $f^{(\alpha)}$ を考えて、次のように与える。

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} > 0; \quad f^{(\alpha)} = 0, \quad \text{and} \quad \text{tr}(\mathbf{Q}^{(\alpha)} \dot{\boldsymbol{\sigma}}) > 0, \quad \mathbf{Q}^{(\alpha)} = \left(\frac{\partial f^{(\alpha)}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right) \quad (11)$$

(11)式以外の場合には、このすべり面は活動しない。

ここでは、最も単純な摩擦則を採用する：

$$f^{(\alpha)} = \tau^{(\alpha)} - \mu^{(\alpha)} \sigma^{(\alpha)} = 0 \quad (12)$$

$$\tau^{(\alpha)} = \sigma_{ij} n_j s_i; \quad \sigma^{(\alpha)} = -\sigma_{ij} n_j n_i,$$

$\mu^{(\alpha)}$ は硬化パラメータを表す。

(12)式における定式化では、主応力軸に対称にすべり面を配置した場合（数学的な取り扱いが便利になる）、変形特性（F-3）：比例負荷時の、異方性の主軸と応力主軸が一致しない場合の非共軸性が表現できない。そこで修正応力 $\mathbf{T}$ を応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の代わりに(12)式に用いる。

$$f^{*(\alpha)} = \tau^{*(\alpha)} - \mu^{*(\alpha)} \sigma^{*(\alpha)} = 0 \quad (13)$$

$$\tau^{*(\alpha)} = T_{ij} n_j s_i; \quad \sigma^{*(\alpha)} = -T_{ij} n_j n_i$$

この様な定式化（等方材料に対して定義されたすべり面の負荷条件(式(12))を、修正応力 $\mathbf{T}$ で置き換えることにより異方性材料の降伏規準を求めるので修正応力法による定式化と言える）を行なうことにより、特性（F-3）を表現することができる。

各すべり面の $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ と $\mu^{*(\alpha)}$ の間に一意的な関係：

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \dot{\gamma}(\mu^{*(\alpha)}) \quad (14)$$

を仮定し、両辺の微分を行ない、せん断ひずみ速度 $\dot{\gamma}^{(\alpha)}$ を求めると、次の式になる。

$$\dot{\gamma}^{(\alpha)} = \frac{1}{h^{(\alpha)}} \text{tr}(\mathbf{Q}^{(\alpha)} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(\alpha)}); \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^*: \mathbf{L}; \quad h^{(\alpha)} = \sigma^{(\alpha)} \frac{\partial \mu^{*(\alpha)}}{\partial \dot{\gamma}^{(\alpha)}} \quad (15)$$

この定式化は、各すべり面が独立に硬化し、他のすべり面の活動には影響されないとする定式化である。より一般的に、各すべり面の相互依存性を考えて形式的な議論を行なうことは可能である（Nemat-Nasser¹¹⁾）。しかし、砂のような粒状体では、その様な定式化が正当化されるほど、物理的基礎は確立しておらず、またその様な複雑な定式化が必要な現象も知られていないので、現時点では、各すべり面が独立と考える硬化則で十分である。

以上の定式化により、塑性ひずみ速度と応力速度の関係は次の式で与えられる。

$$\dot{\mathbf{e}}^{\mathbf{p}} = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{h^{(\alpha)}} \mathbf{P}^{(\alpha)} \text{tr}(\mathbf{Q}^{(\alpha)} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^{(\alpha)}) \quad (16)$$

各すべり面の活性化の程度は、 $\text{tr}(\mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\sigma}})$ により決定される。 $\mathbf{Q}^{(\alpha)}$ は方向の情報をもつために（式(9)2）、その程度は応力速度の方向に依存する。すなわち個々のすべり面の全体の塑性ひずみ速度に対する寄与は、

応力速度方向に依存する（各すべり面の重みが応力速度の方向に依存する、とも言える）。このことより、全体の塑性ひずみ速度の方向は応力速度の方向に対して変化し、増分非線形性を示すことになる。

この様な多数の独立したすべり面を仮定するモデルが示す現象を、現象論的な構成式（例えば、境界曲面モデルなどが利用できる^{7), 15)}）により表現するときには、 h^p, P, Q いずれもが応力速度の方向に依存することは明らかである。

(5) ひずみ速度の増分非線形性と連成挙動の表現

全ひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ と応力速度 $\dot{\sigma}$ の関係を表す接線コンプライアンスは次の式となる。

$$\dot{\epsilon} = C : \dot{\sigma}; \quad C = C^* + C^p; \quad (17)$$

$$C^* = C^e : [L + \frac{1}{h} M : P^f \otimes Q^f]; \quad C^p = \sum_{\alpha=1}^N \frac{1}{h^{(\alpha)}} P^{(\alpha)} \text{tr}(Q^{(\alpha)} \dot{\sigma}^{(\alpha)})$$

構造異方性を考慮し、修正応力に基づく定式化を行なうことにより、主応力軸が固定されたときの異方性による非共軸性：(F-3), が表現される。多数のすべり面を配置することにより、個々のすべり面の活動が応力速度の方向に影響され、すべり面の活動の総和としての塑性ひずみ速度は応力速度方向に依存し、増分非線形性を示すこと：(F-1), を表現できる。これらは構造変化による成分を考慮しなくても、表現可能であるので(F-1, 3)を表現することを主たる目的とするモデルでは、構造成分を簡単に弾性成分とする定式化で十分である。

(F-2): 主応力軸が固定されたときの p, q 空間における dq/dp 依存性は、圧密とせん断を独立（降伏曲面は現応力点において角点を形成し、塑性ひずみ速度は唯一性を失う）とする二重硬化モデルでも表現できる。本定式化でも、相異なる二つのメカニズム：構造変化とすべり運動、に対して定式化を行なっているのでこの現象は、定性的には表現できる。

本定式化の特徴は、構造変化とすべりの二つのメカニズムに共通する内部変数（構造テンソル）を含んで、その発展則を与えていることである。すなわち、せん断において発生する異方的な構造（特に、正のダイレイタンス領域で顕著である）を構造テンソルを用いて表現し、修正応力の形で取り入れると、せん断中に構造変化を規定する F^f もせん断と共に形状が変化し、せん断方向に引き伸ばされた形状になる。このような形状変化をおこせば、 $q=0$ に除荷されて、さらに等方圧密を受けたときに異方的な構造変化がおこり、 $\dot{\epsilon}^f$ は異方的な挙動を示す。また、ダイレイタンス領域に達したときの F^f の形状は、 p 軸をかなり低いレベルで横切るので、ほとんどせん断前の圧密履歴による硬化（弾性領域）は失われることになる。このように、モデルはIshihara and Okada¹⁷⁾の実験結果とその定性的な傾向は一致することになる。

5 既存の増分非線形性を有する構成モデルの分類

4章において定式化された構造変化とすべり面に沿ったすべり運動を考える構成モデル（構造変化+すべりモデル）は定性的には(F-1~4)の変形特性を表現できる。しかし、単一のパラメータの設定で、すべての特性を満足すべき精度で表現することはかなり難しい。また、このモデルを数値解析に应用する場合、現時点ではあまりにも複雑である。著者らも、その様な構成モデルを数値解析に应用しようと試みているわけではない。目的に応じた、あるいは必要とされる精度に応じた構成モデルの構築を考えている。その際、構成式の基本的な制約条件（客観性の原理、座標系無差別の原理、熱力学の制約条件（Clausius-Duhemの不等式）；例えば、北川²⁴⁾参照）を満足する定式化を行なうことに注意するのはもちろんのことである。満足しないモデルは、一般性をもたず適用性が限られてしまう。そのことよりも便宜的な定式化を行なうと、大事な変形特性を見逃す可能性がある。目的に応じて、最も便利な構成モデルをある一定の理論的枠組みの中で構築することは、構成モデルの限界を認識し、数値計算結果を適切に解釈することに役立つし、また不十分と判断された場合には、どのような特性をどのような定式化で取り

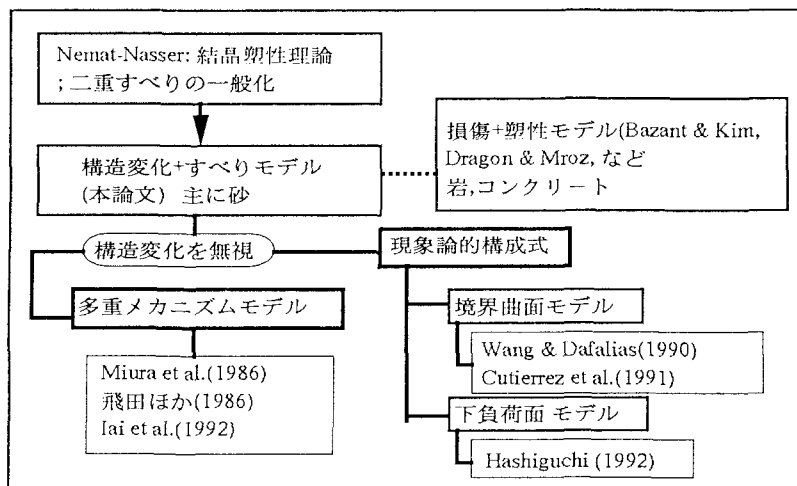


図6：増分非線形モデルの関係（連成挙動の表現可能なモデルを含む）

入れればよいが、が明確になる。本論文で述べた構成モデルはこの様な枠組みを与えるものと考えている。

4章において定式化した構成式を基にして、既存の増分非線形性を表現できる現象論的構成モデルの分類を試みた結果を図-6に示す。ここで比較の対象としたのは、なんらかの形で負荷規準を有するモデルである。この図は完全を期したものではなく、増分非線形モデルが数多く提案されている現状を示すこと、またそれらのモデルは何らかの関係が存在すること、の2点を明らかにすることを目的にしている。増分非線形性あるいは非共軸性を論じる上で重要なモデルである二重すべりモデルについては、参考文献(4,9,11,26)を参考にして頂きたい。

6 結論

砂の様な粒状体は、古典的な（増分線形）弾塑性モデルでは表現できない変形特性（非共軸性、増分非線形性、異方的な内部構造の変化による複雑な挙動）を示すことを最近の実験事実を基に明らかにした。このような変形特性の定式化は、せん断帯発生条件などの特別な解析ばかりでなく、地盤に発生する身近な応力経路の変形挙動の表現にも重要である。従来古典的弾塑性理論により表現できず、（構成式の制約条件を満たさないという意味で）便宜的に取り扱われてきた変形特性は、増分非線形性や異方性の発達を考慮した構成モデルを構築することにより、表現できるものと考えられる。

本論文では、2つの相異なる微視的メカニズム：構造変化と多重すべり、を想定する構成モデルの定式化を、異方性を考慮できる修正応力法を用いて行なった。提案する構成モデルは、増分非線形性、せん断による圧密特性の変化などの連成挙動、非排水繰返しせん断時のサイクリックモビリティ現象、などを表現しうる数学的な構造を有している。また、従来提案されている負荷規準を持つ増分非線形モデルの原形となっていることも第5章において示した。

具体的な関数やパラメーターの決定は別の機会に譲るが、その決定はやさしくはない。特に、従来あま

り注目されなかった内部変数（ここでは、構造テンソル）の発展則の決定が難しい。粒状体の力学分野における基本的な知見はあるものの、その決定には要素のシミュレーション解析により試行錯誤で決定しているのが著者らの現状である。

このような増分非線形の構成モデルは、定式化とその検証が難しいばかりでなく、解の唯一性や安定性にも大きな影響を与え、数値解析の効率を著しく低下させる。増分非線形性を有する構成モデルの効率的な演算法の開発など、数値解析の分野でも検討すべき事項が多く残されている。

参考文献

- 1) 橋口：最新弾塑性学、朝倉書店、1991
- 2) Boehler, J.P.(ed.): Application of tensor functions in solid mechanics, Springer Verlag, 1987
- 3) Tobita, Y.: Fabric tensors in constitutive equations for granular materials, " Soils and Foundations, Vol.29 (4) , pp.91-104, 1989
- 4) Spencer, A.J.M.: Deformation of ideal granular materials, in Mechanics of Solids (eds. H.G. Hopkins and M.J. Sewell), Pergamon Press, Oxford, 607-652, 1982
- 5) Darve, F.: An incrementally non-linear constitutive law of second order and its application to localization, in Mechanics of Engineering Materials (eds. C.S. Desai and R.H. Gallagher), John Wiley & Sons, pp. 179-196, 1984
- 6) Wang, Z.L. and Dafalias, Y.F.: Bounding surface hypoplasticity model for sand, J. Engng. Mech, ASCE, Vol.116(5), pp.983-1001, 1990
- 7) Hashiguchi, K.: Fundamental requirements and formulation of elastoplastic constitutive equation with tangential plasticity, " being submitted to Int. J. Plasticity (Private communication), 1992
- 8) Tobita, Y.: Modified double slip model with fabric anisotropy for hardening behavior of granular materials, " in Advances in Micromechanics of Granular Materials(eds. H.H. Shen et al.), Elsevier Science Pub., pp. 203-212, 1992
- 9) Kolymbas, D.A.: A constitutive law of the rate type of soils: position, calibration and predictions, in Constitutive Relations for soils (eds Gudehus, G. et al.), A.A. Balkema, 419-437, 1984
- 10) Rudnicki, J.W. and J.R. Rice: Conditions for the localization of deformation in pressure sensitive dilatant material, J. Mech, Phys. Solids, Vol.12, 371-394, 1975
- 11) Nemat-Nasser, S.: On finite plastic flow of crystalline solids and geomaterials, J. Appl. Mech., Vol. 50, pp. 1114 -26, 1983
- 12) Iizuka, A. , Yatomi, C., Yashima, A. , Sano, I. and Ohta, H.: The effect of stress induced anisotropy on shear band formation, " Archive of Applied Mechanics, Vol. 62, pp.104-114, 1992
- 13) Miura, K., S. Miura, and S. Toki: Deformation behavior of anisotropic dense sand under principal stress axes rotation, " Soils and Foundations, Vol.26(1), pp. 36-52, 1986a
- 14) Miura, K., S. Miura, and S. Toki: Deformation prediction for anisotropic sand during the rotation of principal stress axes, Soils and Foundations, Vol.26(3), pp.42-56, 1986b
- 15) Gutierrez, M., Ishihara K. and Towhata, I.: Flow theory for sand during rotation of principal stress direction, " Soils and Foundations, Vol. 31(4), pp. 121-132, 1991
- 16) Tatsuoka, F. and Ishihara, K.: Yielding of sand in triaxial compression, Soils and Foundations, Vol.14(2), pp.63-76, 1974
- 17) Ishihara, K. and Okada, S.: Effects of stress history on cyclic behavior of sand, Soils and Foundations, Vol.18(4), pp.31-45, 1978
- 18) Pradhan, T.B.S.: The behavior of sand subjected to monotonic and cyclic loadings, Dr. thesis of Kyoto University, 1989
- 19) Dragon, A. and Mroz, Z.: A continuum model for plastic brittle behavior of rock and concrete, Int. J. Engng. Sci., Vol. 17, pp.1114-1126, 1979
- 20) Bazant, Z.P. and Kim, S.S.: Plastic fracturing theory for concrete, J. Engng. Mech. ASCE, Vol.105 (EM3), pp.407-428, 1979
- 21) Tobita, Y. and Yanagisawa, E.: Modified stress tensors for anisotropic behavior of granular materials, Soils and Foundations, Vol. 32(1) , pp.85-99, 1992
- 22) Boehler, J.P. and Sawczuk, A.: On yielding of oriented solids, Acta Mechanica, Vol.27, pp.185-206, 1977
- 23) 飛田、加藤、柳沢：砂の様な粒状体の構成則としてのすべりモデルの定式化と適用性、土木学会論文集、第370号、pp.57-66, 1986
- 24) 北川：弾・塑性力学、裳華房、1987
- 25) Iai, S. , Matsunaga, Y. and Kameoka, T.: Strain space plasticity model for cyclic mobility, Soils and Foundations, Vol. 32(2), pp.1-15, 1992
- 26) 飛田、岩熊、北：二重すべりモデル：非共軸性と増分非線形性、土質工学会、ひずみと変形局所化に関する研究委員会総合報告（印刷予定、1993）

（1992年9月21日受付）