

マイクロメカニクスに基づく氷の構成式のモデル化と FEM解析による氷外力の予測

Micromechanics-based Constitutive Modeling of Ice Behaviors
and FEM Analysis for Prediction of Ice Forces

プラエマチャンドラン ラジャラツナム* 堀井秀之**

by Rajaratnam PREMACHANDRAN and Hideyuki HORII

A micromechanics based constitutive model is developed to predict the time dependent deformation behavior of ice under compressive load in which creep and microcracking are two dominant mechanisms. The model is based on the idea that ice crystals undergo shear slip along the basal plane, and the microcracking is caused by the local stress due to the mismatch strain in the polycrystalline ice with randomly oriented basal plane. A single crystal is modeled as a cylindrical homogeneous inclusion embedded in an effective matrix of polycrystal aggregate. Eshelby's solution is used to estimate the local stress due to the mismatch strain. The stress-strain relation of the polycrystalline ice is calculated for arbitrary loading condition on the basis of single crystal property. Microcracking is predicted by assuming that the cracking occurs when the maximum tensile stress just outside a grain reaches the tensile strength of ice. Crack density is predicted as a function of time. The effect of crack formation in the deformation process is modeled as the reduction of the constraint of the surrounding matrix. The model prediction for constant load and constant strain rate tests are shown to demonstrate the validity of the model. The proposed constitutive model is implemented in the finite element analysis code to analyze general structural problems of ice sheet. The ice forces which act on structures from moving ice sheet can be estimated by the present analysis code. As an example, indentation problems are analyzed and results are compared with existing experimental data with qualitative agreement.

1. まえがき

海洋構造物等に作用する、移動する板状の氷による外力の予測は工学的に重要な問題であるが、様々な荷重条件下における多結晶の氷の変形、強度特性の把握を必要とする。氷の挙動は大変複雑であるが、それは氷がその融点に近い温度にあることに起因している。氷の変形と破壊は、微視レベルにおけるクリープとマイクロクラッキングの両者に支配されており、結果として氷の力学的挙

* 工博 東京大学工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

** Ph.D. 東京大学助教授 東京大学工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

動は応力やひずみだけでなく温度、荷重速度、時間に依存している。延性な挙動（クリープ）と脆性な挙動（マイクロクラッキング）が並存しているのが氷の力学的挙動の特徴である。

氷の力学における主要な研究課題のひとつは氷の構成式の確立である。これまで発表されている構成式モデルは現象論的構成式と構成式の理論に基づかない物理的モデルとに分けられる。現象論的構成式では微視構造の変化は考慮されず、巨視的な変数間の関係のみが扱われ、パラメータの値はカーブフィッティングにより定められる。この型の構成式は有用であるが、データの存在する範囲でかつ一定応力、一定ひずみ速度といった条件のもとで有効性が保証されているに過ぎない。本研究の目的は、クリープとマイクロクラッキングに支配される氷の時間依存的な挙動を予測し得る氷の構成式モデルをマイクロメカニクスに基づいて開発し、それをFEMプログラムに組み込み、任意の条件のもとで氷外力の予測を可能にすることにある。

2. 氷の構成式モデル

ここでは、板状の氷が面内の変形を生ずる2次元問題を扱う（図1参照）。氷は板厚方向に並んだ柱状の結晶の集合体となっており、各結晶には柱軸に直交する弱面（basal plane）が存在する。弱面の存在により一結晶の弾性定数は方向に依存するが、弱面の方向の分布はランダムなため、巨視的な弾性挙動は2次元面内で等方的である。氷の室内実験としては、応力一定のクリープ試験とひずみ速度一定の試験が一般的である。一定応力試験では時間とともにひずみが増大するが、ある一定時間経過後、圧縮軸にはほぼ平行なマイクロクラックが発生

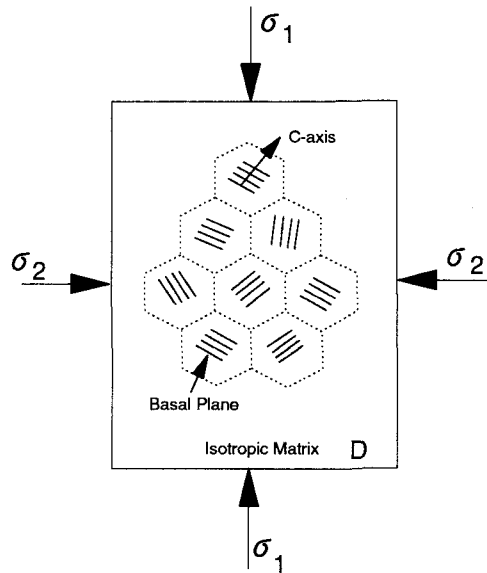


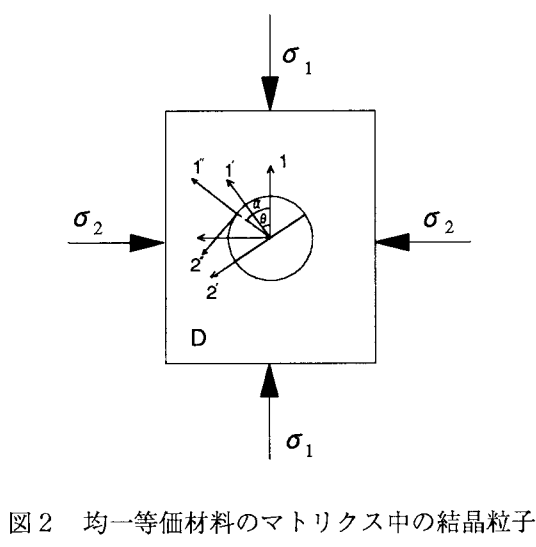
図1 多結晶の氷の2次元問題

し、その数は時間とともに増大して最終破壊に至る。一定ひずみ試験においてもマイクロクラックの発生が大きな役割を果たす。ひずみ速度が小さい場合にはマイクロクラックの発生はともなわず、挙動は延性的である。ひずみ速度の増加にともない、応力ひずみ曲線はピークとその後のひずみ軟化挙動を示すようになる。強度（最大応力）はひずみ速度とともに増加するが、ひずみ速度が 10^{-4} sを越えると、全体の挙動は延性から脆性に遷移し、強度もピークを迎えてその後は減少し、完全に脆性な挙動となる。¹⁻³⁾

このように複雑な挙動を予測するためには、現象を支配しているクリープとマイクロクラッキングをモデル化する必要がある。マイクロクラック発生のメカニズムについては諸説がある。弾性定数の異方性に基づくモデルが提案されているが、一定応力下で時間とともにマイクロクラックが発生する現象を説明できず、ひずみ速度の大きい領域を除けば、有効ではない。結晶粒界のすべりに基づくモデルも検討されているが、氷の挙動を説明できないことが報告されている。

本研究では、各結晶粒子においてランダムな方向に存在する弱面(basal plane)にそって生ずるクリープ変形に着目し、それによって引き起こされる局所的な応力がマイクロクラック発生の原因であると考えてモデルを構築する。

一つの結晶粒子に着目し、その結晶内のクリープひずみによって生ずる応力を計算する。図2に示すように、一つの結晶粒子を円柱とモデル化し、周囲の多結晶の氷を等価な均一材料に置き換える。クリープ変形は、結晶粒子内に存在する、ある方向を向いた弱面に沿って生ずるものとし、そのクリープ則としては、単結晶の氷の実験結果に基づき、クリープひずみが応力と時間に関するべき乗則で与えられるものとする。すなわち、



$$\epsilon_{12}^* = A \sigma_{12}^n t^m \tag{1}$$

ここで、 A 、 n 及び m は材料定数であり、単結晶の氷に対するクリープ試験の結果をフィットするように定めるものとする。図3はGriggsらの実験結果⁴⁾をフィットするように定数を定めた結果である ($A = 23.0 \times 10^{-7}$, $n = 4.7$, 及び $m = 1.9$)。以下の計算では全てこの値を用いた。

式(1)は応力一定のクリープ試験に対するものであり、任意の荷重条件に対するクリープ則を構築するためには、何らかのクリープ硬化則を仮定しなくてはならない。時間硬化則とひずみ硬化則が一般的であるが、応力の変化速度が大きい場合には両者の差は小さい。そこで、ここでは定式化の簡便な時間硬化則を適用し、任意の荷重条件の下でクリープひずみ速度は次式で与えられるものとする。

$$\dot{\epsilon}_{12}^* = A m \sigma_{12}^n t^{m-1} \tag{2}$$

弱面の方向はランダムであるため、ある結晶におけるクリープひずみは周囲のひずみと異なり、局所的応力を生ずる。結晶内の応力は、無限体中の楕円形領域に均一な非弾性ひずみが与えられた問題に対するEshelbyの解により求められる⁵⁾。すなわち、 θ 傾いた弱面を有する結晶粒子内部のせん断応力は次式で与えられる。

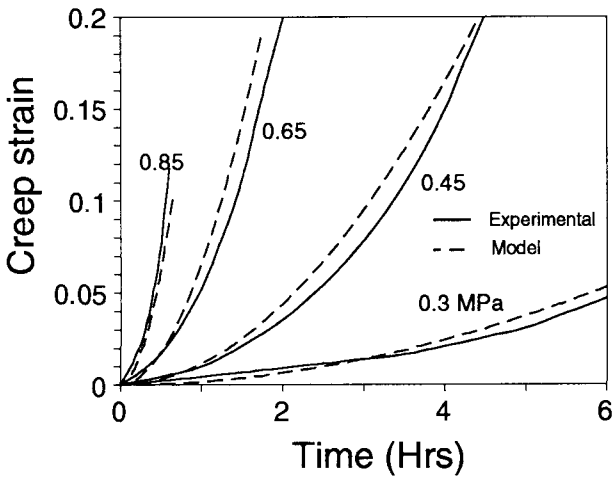


図3 異なる一定応力下における単結晶のクリープ曲線

$$\sigma'_{12} = \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_1)\sin 2\theta - 2D(\epsilon'_{12} - \bar{\epsilon}_{12}^*) \quad (3)$$

ここで、 $D = \mu/4(1-\nu)$ であり、 l は局所座標系における成分を、また、 $\bar{\epsilon}_{ij}^*$ は全ての結晶粒子に対する平均のクリープひずみを表す。

式(3)を式(2)に代入して、クリープひずみ ϵ'_{12} が満足するべき微分方程式

$$\dot{\epsilon}'_{12}(\theta) = Am \left[\frac{\sigma_2 - \sigma_1}{2} \sin 2\theta - 2D(\epsilon'_{12}(\theta) - \bar{\epsilon}_{12}^*) \right]^n t^{m-1}, \quad 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

が得られる。クリープひずみ ϵ'_{12} は、異なる方向の弱面を有するそれぞれの結晶粒子で異なる値をとり得る。従って、クリープひずみ ϵ'_{12} は θ と時間 t の関数である。式(4)は、0から $\pi/2$ のすべての θ の値に対して成り立ち、それらはクリープひずみの平均値である $\bar{\epsilon}_{12}^*$ を通して連成している。角度 θ の範囲、0から $\pi/2$ を N 区間に分割し、 $\epsilon'_{12}(\theta)$ を θ に関して区間一定として離散化する。その上で、微分方程式(4)をEuler法を用いて数値的に解くことにより、様々な方向の弱面を有する結晶粒子について、それぞれの結晶粒子内の応力とクリープひずみが時間の関数として求まる。さらに、結晶粒子外側の応力も、介在物境界の応力テンソルの不連続条件⁹⁾より、時間の関数として求まる。

図4に様々な方向の弱面を持つ結晶粒界外側の主応力の値を各時間に対してプロットした。圧縮軸に対して 45° の方向に弱面をもつ結晶粒子境界で最初に引張強度に達してマイクロクラックが発生し、時間とともにマイクロクラックの発生する弱面の方向が増え、マイクロクラックの密度も増加する。この例で、引張強度 σ_{cr} を 0.83 MPa とすれば、载荷開始約220秒後に最初のクラックが発生し、350秒経過後には圧縮軸に対して弱面の方向が30度から60度の範囲にある結晶粒子においてマイクロクラックが発生しており、クラックを生じた結晶粒子は全体の3分の1に当たっている。クラック密度 ω を全ての結晶粒子に対する、クラックを発生させた結晶粒子の比率と定義し、図5にクリープ試験におけるクラック密度の時間的変化を示した。 $(\sigma_{cr} = 1 \text{ MPa}, E = 8.5 \text{ GPa}, \nu = 0.3)$ この結果は実験結果と定性的に一致している。

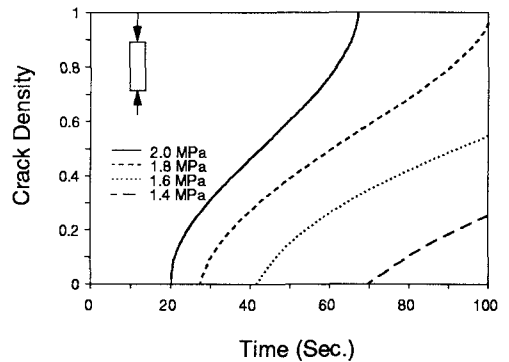
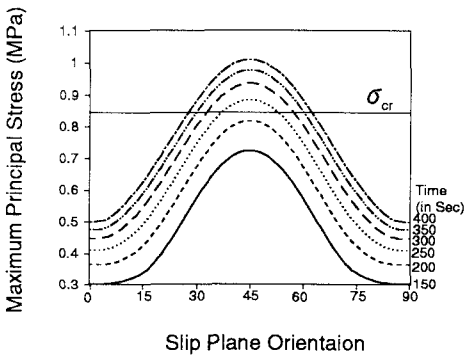


図4 異なる弱面方向の結晶粒子外側の主応力 図5 クリープ試験におけるクラック密度の変化

クラックの発生した後の挙動は複雑であり、現象を忠実にモデル化する事は難しい。重要なメカニズムの一つは、クラックの発生により、結晶粒子内のクリープ変形を拘束する働きが小さくなり、結晶粒子内のクリープが促進されることである。このメカニズムは、前に説明したモデルの中で、マトリクスによる拘束効果をマイクロクラックの密度 ω の増加とともに減少させることによって取り扱うことができる。すなわち、式(3)及び(4)においてマトリクスによる拘束効果を表すパラメータ D を、マイクロクラック発生後は次式に従って低減させる。

$$\bar{D} = D(1-\omega) \tag{5}$$

この効果を取り入れない場合、例えば定ひずみ試験において最大応力が現れない。(図5の計算においても式(5)を用いている。) 式(5)を用いてマイクロクラックの影響を考慮した定ひずみ速度試験の解析結果を図6に示す。入力データはクリープ試験と同じ値を用いた。応力ひずみ曲線はピークを示し、その最大応力の値はひずみ速度の増加とともに増加する。この結果は実験結果とよく一致している。最大応力の値をひずみ速度の関数として、実験結果とともに図7に示す。ひずみ速度の小さい範囲では、モデルによる予測値は実験結果と同様の傾向を示している。しかし、解析結果は、ひずみ速度の増加に伴い最大応力が増加し続けることを示しており、最大応力がピークをむかえ、その後低減する実験結果と一致していない。この現象は、ひずみ速度の増加に伴い、マイクロクラックの分布が局所化しせん断破壊を起こすのが原因であると考えられる。本モデルではマイクロクラックの分布は空間的に均一に分布することを仮定しており、高ひずみ速度領域の挙動を再現するためにはマイクロクラックの局所化を表し得るモデルが必要である。

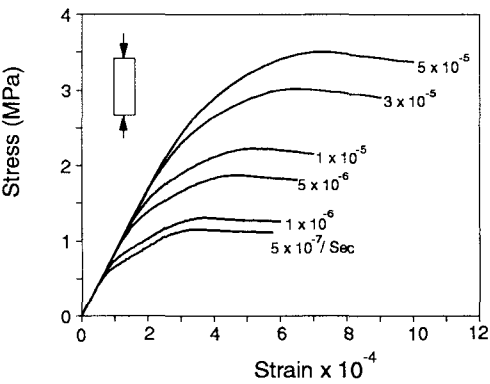


図6 定ひずみ速度試験の解析結果

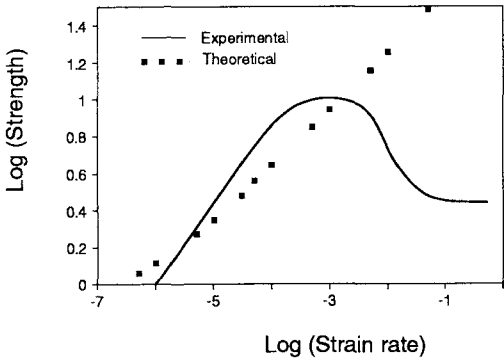


図7 定ひずみ速度試験における最大応力

3. 氷問題の有限要素解析

ここで提案した構成式モデルは、任意の荷重条件・履歴に対して有効である。この構成式を有限要素解析プログラムに組み、任意の境界条件に対する解析を可能とした。例題として、過去に報告

された氷の押し込み試験⁶⁾(図8)の解析を行った。実験に用いた氷のデータが明かでないため、前の計算に用いた別の氷に対するデータを用いて解析を行った。但し、引張強度はこの氷の粒子寸法7.5mmに対応する $\sigma_{cr}=0.83\text{MPa}$ を用いた。このため、実験結果と解析結果を直接比較することは出来ないが、押し込み速度を変化させた場合の結果を表1にまとめた。押し込み速度とともに最大荷重は増加する。解析結果と実験結果は定性的な一致を示している。

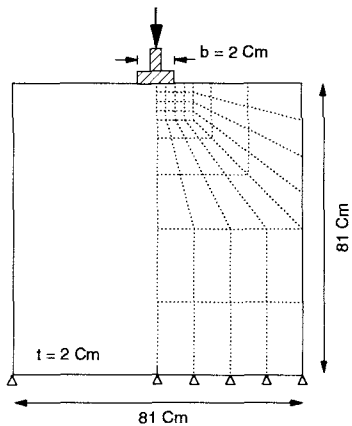


図8 氷の押し込み試験の解析

表1 氷の押し込み試験における最大荷重

Indentation Rate (b/sec)	Maximum strength(MPa)	
	Experimental	Theoretical
2.3x10 ⁻⁵	4.62	6.06
2.0x10 ⁻⁴	7.38	9.59
5.0x10 ⁻⁴	9.83	12.08
1.9x10 ⁻³	13.44	17.37

4. おわりに

本研究では、微視的メカニズムに着目し、クリープとマイクロクラッキングの両者の影響を含む氷の構成式モデルを提案した。これにより、任意の応力、ひずみ履歴における氷の挙動を予測する事が可能となった。すなわち、応力、ひずみ、クラック密度等が時間の関数として計算される。この構成式モデルを有限要素解析プログラムに組み込むことにより、任意の幾何条件の問題に対する解析が可能となり、例えば異なる氷の速度に対して、任意の寸法・形状の構造物に作用する氷外力の算定が可能となった。しかし、ここで扱ったのは、限られた破壊モードに対する破壊挙動に限られており、変形速度の大きい場合や、巨視的クラックが発生進展する場合も含めた解析を行うことが次の課題である。

参考文献

[1]Gold,L.W.(1970). Process of failure in ice. Canadian Geotechnical Journal, 7, pp. 405-413.
 [2]Sinha,N.K..(1982). Constant strain- and stress-rate compressive strength of columnar-grained ice, Journal of Material Science, 17: 785-802.
 [3]Sinha,N.K.(1988). Crack-enhanced creep in polycrystalline material: strain-rate sensitive strength and deformation of ice. Journal of Material Science, 23, pp.4415-4428.
 [4]Weertman,J.(1973). Creep of ice. In: Whalley,E.,Jones,S.J. and Gold,L.W.(Eds.), Physics and Chemistry of Ice, Roy. Soc. Canada, Ottawa, pp.320-340.
 [5]Mura,T.(1987). **Micromechanics of defects in solids**. Second edition, Martinus Nijhoff Publishers, Netherlands, 1987.
 [6]Michel,B.,Toussaint,N.(1977). Mechanisms and theory of indentations of ice plates, Journal of Glaciology, 19(81): 285-300.

(1992年9月21日受付)