

内部に微視構造を有する材料の平均弾塑性関係の一評価

AN AVERAGE ESTIMATE OF ELASTIC-PLASTIC RELATIONS
OF MATERIALS WITH MICROSTRUCTURES

岩熊哲夫*・堀 宗朗**・木谷朋之***・村外志夫****

By Tetsuo IWAKUMA, Muneo HORI, Tomoyuki KITANI and Toshio MURA

A method to estimate the average elastic behavior of an inhomogeneous body is generalized for the elastic-plastic materials. The Mori-Tanaka method is employed to take into account the interaction effect of inhomogeneities and matrix materials. Formulation is formally identical with that for the elastic case, except the governing equations are written in terms of the rates of changes of each quantities. A simple example is solved to show the upper and lower bounds of the tangent modulus in the elastic-plastic range of deformation. One particular experimental result is used to show the eligibility of the method.

1. まえがき

鋼・コンクリート等の構造材料や繊維補強材料等の複合材料はもとより、橋梁基礎を含む岩盤・地盤等も、内部亀裂・空隙・介在物・杭等の微視構造を有している。このような不均質材料を対象とした実際の設計で、どの程度その微視構造の情報を厳密に取り扱う必要があるかは難しい問題だが、土木構造の全体解析等のような非常に大きな領域を対象とする場合に限れば、まずその巨視的な挙動だけが必要な情報である。

このような巨視的な力学挙動を微視的な観点から予測する研究は古くから行なわれており、介在物の体積比率が比較的高い場合をも含めた場合の平均化手法の多くが Eshelby¹⁾ の研究成果に基礎を置いている。また、微視構造の存在による力学挙動の乱れを解析するためによく用いられる「等価介在物法」も Eshelby の研究結果を利用した考え方を基礎としている。最も重要な点は、母材と介在物、および介在物同士の相互作用をどのようにして考慮するかにある。この相互作用を近似する方法には、self-consistent 法等の提案²⁾や、挙動の上下界算定法³⁾等の研究がある。また近年 Mori-Tanaka による方法等も提案され、文献^{4),5),6)}にその比較等も報告されている。

このほとんどの方法が主に弾性体を対象として提案されてきたものであるが、本質的に流れ則で表現できる弾塑性問題への拡張は非常に簡単であるため、既にいくつかの提案もなされている。Hill の考え方を実測値に合わせるために割線係数を用いて補正した Weng⁷⁾ の方法等がその一例である。また、微小変形理論の範囲での全

* Ph.D 東北大学助教授 工学部土木工学科 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

** Ph.D 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷 7-3-1)

*** 工修 三菱重工業(株) 神戸造船所 (〒652 神戸市兵庫区和田崎町 1-1-1)

**** 工博 Northwestern 大学教授 理工学部土木工学科 (2145 Sheridan Rd., Evanston IL, 60208 U.S.A.)

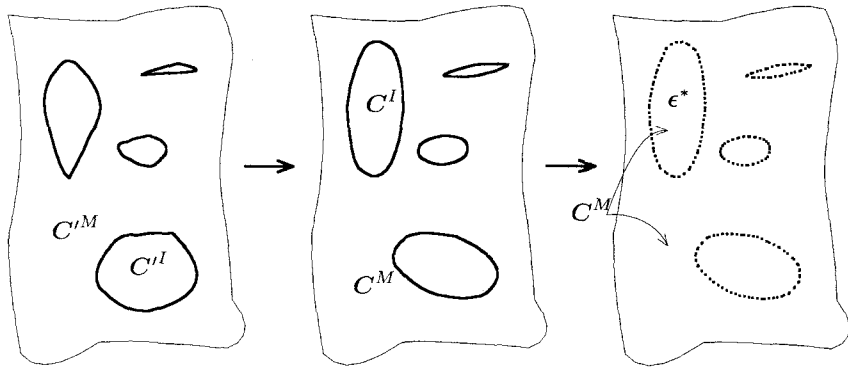


図-1 等価介在物置換

ひずみ理論で表現した弾塑性体に対し、Mori-Tanaka 理論による平均的な弾塑性挙動解析の例もある⁸⁾。ここでも Mori-Tanaka の方法を増分理論で定式化された弾塑性材料に用い、複合材料の平均的な弾塑性挙動を予測する手法を提案する。母材と介在物とはいずれも Prandtl-Reuss 流の流れ則に従い、硬化則は Power-law で記述できるものと設定した。

2. 平均挙動のモデル化

微視構造を有する材料の最も簡単なモデルとして、一種類のある形状の異物質、あるいは空隙・亀裂等がランダムに配置されている無限体を考える。ただし、実際の材料で母材と介在物とが明確に区別できない場合をも含むこの力学モデル上は、どちらの相を母材にするかは任意である。この節では平均化の一般論を定義するため、個々の相の構成則についての詳細は省略し、通常の流れ則に従う材料のように適切な降伏関数が定義され、増分応力-ひずみ関係が次式で表されるものを対象とする。

$$\dot{\sigma}^M(x) = C^M(x) \dot{\epsilon}^M(x), \quad \dot{\sigma}^I(x) = C^I(x) \dot{\epsilon}^I(x) \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに上付き添え字の I と M とはそれぞれ2種類の材料を区別するために用いるが、通例に従い前者が介在物、後者が母材を示すことにする。さらに、

$$f \equiv \frac{V^I}{V^M + V^I} \quad \dots \dots \dots (2)$$

で介在物の占める体積比率を定義する。

母材の平均挙動は、まわりに多くの介在物が存在することによる乱れを考慮しなければならず、Mori-Tanaka 流に書くと、その平均挙動が

$$\langle \dot{\sigma} \rangle^M = C^M \dot{\epsilon}^D \quad \dots \dots \dots (3)$$

であるとする。ここに $\langle \dots \rangle$ は上添え字で指示された体積平均 $\int_M(\dots) dV$ あるいは $\int_I(\dots) dV$ を表し、 $\dot{\epsilon}^D$ は介在物が多数存在する効果を考慮して導入された平均的なひずみ場を表す。また C^M は、実際は場所の関数である母材の接線係数 $C^M(x)$ の何等かの平均値として用いる。

一方、もうひとつの相を介在物とすると、その部分の平均的な抵抗則も同様に、

$$\langle \dot{\sigma} \rangle^I = C^I \langle \dot{\epsilon} \rangle^I \quad \dots \dots \dots (4)$$

で表すことができる。ここに $\langle \dot{\epsilon} \rangle^I$ は母材との相互作用のために発生する乱れの成分を含んでおり、

$$\langle \dot{\epsilon} \rangle^I = \dot{\epsilon}^D + \langle \dot{\gamma} \rangle^I \quad \dots \dots \dots (5)$$

と表すことができる。右辺第二項が乱れ成分の平均である。 C^I も係数 C^M と同様の平均として用いる。

このように考えた上で、Mori-Tanaka は乱れ成分を Eshelby の方法で近似することができるとした。すなわち、 C^M を持つ無限体中に C^I の介在物が一個だけ存在し、平均的なひずみ場 $\dot{\epsilon}^D$ を乱している状態が解析できれば、母材と介在物との相互作用を考慮できたと考える。この解析には「等価介在物法」を用いればよく、介在物の材料則を母材と同じにする代わりに、その中に「アイゲンひずみ」を分布させることによって等価性を持たせる。したがって、介在物中の等価法則として次式を得る。

$$\langle \dot{\sigma} \rangle^I = C^I \{ \dot{\epsilon}^D + \langle \dot{\gamma} \rangle^I \} = C^M \{ \dot{\epsilon}^D + \langle \dot{\gamma} \rangle^I - \langle \dot{\epsilon}^* \rangle^I \} \dots\dots\dots (6)$$

ここで扱う微小変形の範囲内なら、増分応力・ひずみで表した支配方程式は微小変形弾性理論のそれと形式的に一致するので、等価な介在物で置き換えられた弾性系に対する Eshelby の解がそのまま成立する。したがって

$$\langle \dot{\gamma} \rangle^I = S \langle \dot{\epsilon}^* \rangle^I \dots\dots\dots (7)$$

と表してもよいことになる。ここに S は、母材の接線係数 C^M と介在物の形状に依存するテンソル関数であり、特別に等方弾性体中に楕円体形状の介在物が存在する場合にのみ定数となる。

式 (7) は等方弾性体中に楕円体介在物が存在する場合にのみ正しい。すなわち、ここで対象としているような弾塑性体では、変形に依る異方性を常に有しているから、無限体中に一個の楕円体介在物が存在する問題であっても、厳密には場所の関数としての関係式、つまり式 (7) に形式的に対応させるなら

$$\dot{\gamma}^I(x) = S'(x) \dot{\epsilon}^I(x) \dots\dots\dots (8)$$

と書くことができるが S' は介在物が楕円体であっても定数テンソルにはならず、式 (7) は厳密にこの式 (8) の平均を取ったものにはならない。この意味でもさらに大きな近似が含まれている。

式 (7) を式 (6) に代入して整理すると、

$$\langle \dot{\epsilon}^* \rangle^I = \{ C^M - (C^M - C^I) S \}^{-1} (C^M - C^I) (C^M)^{-1} \langle \dot{\sigma} \rangle^M \dots\dots\dots (9)$$

となるから、再度式 (7) に代入し直せば乱れ成分が求まる。これを介在物の構成則に代入することにより、介在物中の平均応力増分が、

$$\langle \dot{\sigma} \rangle^I = \langle \dot{\sigma} \rangle^M + C^M (S - I) \langle \dot{\epsilon}^* \rangle^I \dots\dots\dots (10)$$

と表されることになる。

ここで平均応力速度とひずみ速度とを

$$\dot{\bar{\sigma}} \equiv f \langle \dot{\sigma} \rangle^I + (1-f) \langle \dot{\sigma} \rangle^M, \quad \dot{\bar{\epsilon}} \equiv f \langle \dot{\epsilon} \rangle^I + (1-f) \dot{\epsilon}^D \dots\dots\dots (11)$$

を定義し、上で求まった諸量を代入して整理すると、平均的な接線構成方程式が

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \left\{ \left[C^M - (C^M - C^I) \{ S - f(S - I) \} \right]^{-1} \left[C^M - (1-f)(C^M - C^I) S \right] (C^M)^{-1} \right\} \dot{\bar{\sigma}} \dots\dots\dots (12)$$

と求まる。右辺の係数が平均的なコンプライアンスになる。この結果は弾性体に対し同様のアプローチをした場合⁸⁾と形式的に一致しているが、それは支配方程式が形式的に一致しているからに他ならない。したがって、少なくとも初期降伏までの挙動については、全ひずみ理論による結果⁸⁾と一致しているので、弾性と初期降伏に関する構成則が同じであれば、二つの相のいずれが先に降伏するか条件、及び、平均初期降伏応力については既存の結果^{7),8)}と一致する。

3. 平均弾塑性係数の上下界

式 (6) の等価条件は、実際は C^I の材料が分布している領域を、他の材料で置き換えた代わりにその同じ領域に熱ひずみのような「アイゲンひずみ」を分布させた場合の等価式であり、特にこの場合は、母材で置き換えている。Hashin & Shtrikman³⁾ は、弾性体に対する式 (6) が第一変分になるような「アイゲンひずみ (ある

いは応力)」に関する変分原理を導出し、置き換える材料係数と元の材料係数との関係によって、最終的に求める平均弾性係数の上界あるいは下界が求まることを示した。これを増分理論に単純に拡張すれば、例えばここで扱っているような2相系では、どちらの材料を母材とみなすかによって、ある変形状態における接線弾塑性平均係数の上界あるいは下界を求めることができることは明らかである。

4. 例題と考察

(1) 局所的な構成則と介在物の形状

最も重要な量は式 (7) のテンソル S であり、本来は与えられた個々の相の構成則と幾何形状に対して境界値問題を解かなければならない。一般に、特に弾塑性等を対象とする場合、陽な表現を求めるのは不可能であり、求めようとしても各載荷状態毎に数値解析を用いなければならない。ここでは、ある近似を用いた場合の精度と方法とを示すために、まず形状については最も簡単な球形介在物として近似した場合を取り扱う。

さらに構成則についても最も基礎的な法則を用い、弾性部分は通常の Hooke の法則で与えた。塑性部分も Power-law の硬化則を有する J_2 流れ則でモデル化できるものを対象とした。したがって、それぞれの相での降伏関数は Mises の条件の拡張で

$$f \equiv \sqrt{J_2} - F(\epsilon^p), \quad F(\epsilon^p) \equiv \{\sigma_Y + h(\epsilon_{eq}^p)^n\} / \sqrt{3} \dots\dots\dots (13)$$

とした。ここに σ_Y は初期降伏応力、 ϵ_{eq}^p は相当塑性ひずみ ($\sqrt{2\epsilon^p : \epsilon^p}$)、 h および n は硬化に関する材料パラメータを示す。

各相内の局所的な応力や塑性ひずみは、例えば式 (9), (10), (11) から求まる平均的な増分応力 $\langle \dot{\sigma} \rangle^M$, $\langle \dot{\sigma} \rangle^I$ 等 (形式的には文献⁸⁾の式 (13) を増分応力と読み直せばよい) を単純に累積させた量で近似し、それを用いて式 (13) の降伏条件の判定等を行なうため、その結果から得られる接線弾塑性係数 C^M や C^I もその意味での平均としてしか算定できないことになる。またこのようにして求まる各相の応力場は、相間の相互作用を含み、全体平均応力の何らかの集中係数倍として求まるため、後述の例のように単純に低降伏応力材料相が先に降伏条件を満足するとは限らないことにも注意すべきである。

(2) Eshelby のテンソルの概算

式 (12) の係数を一般的に求めることは困難であるのでここでは通常用いられているように、特別な載荷状態を再現することにより、平均的な材料モデルを誘導する。ひとつは、平均的に単純引っ張り状態にある場合であり、もうひとつは、平均的に純せん断状態にある場合である。

問題は先に述べたようにテンソル S の導出であるが、厳密にはここで定義したような材料であれば、両方の材料共に変形に伴い異方性が強くなるはずで、 S を求めること自体が繁雑に、あるいはほぼ不可能になる。また、前節でも述べたように、得られる結果は現実の挙動の上下界のひとつに過ぎないから、この S を求めるためにだけに労力を使う必要はない。ここでは非常に大胆な取扱として、そのような異方性接線係数を何らかの意味で等方材料係数に近似し、陽な形で表される S を用いて解析を進めていくことにする。具体的には、等方材料に対する S が母材の Poisson 比にしか依存しないことを考慮し、近似 Poisson 比を定義することにより、等方弾性体中の球形介在物に対する結果を用いる。つまり、

$$S = \alpha \frac{L}{3} + \beta \left(I - \frac{L}{3} \right); \quad \alpha = \frac{1 + \bar{\nu}^M}{3(1 - \bar{\nu}^M)}, \quad \beta = \frac{2(4 - 5\bar{\nu}^M)}{15(1 - \bar{\nu}^M)} \dots\dots\dots (14)$$

と与えられる。 $\bar{\nu}^M$ が母材とみなした材料の近似 Poisson 比である。 I, L は等方テンソルで、Kronecker のデルタを用いて、

$$I_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}), \quad L_{ijkl} \equiv \delta_{ij} \delta_{kl} \dots\dots\dots (15)$$

と定義した。具体的には、この近似 Poisson 比をそれぞれの載荷状態に対し、最も変化する係数と Mises の条

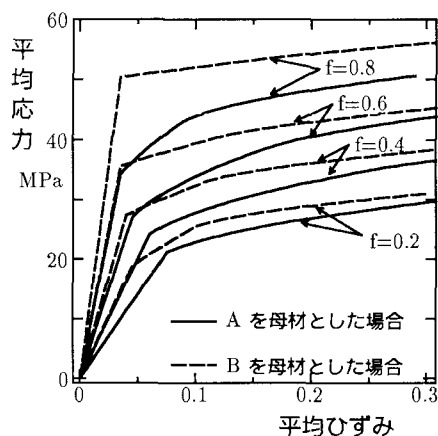


図-3-a 純せん断状態

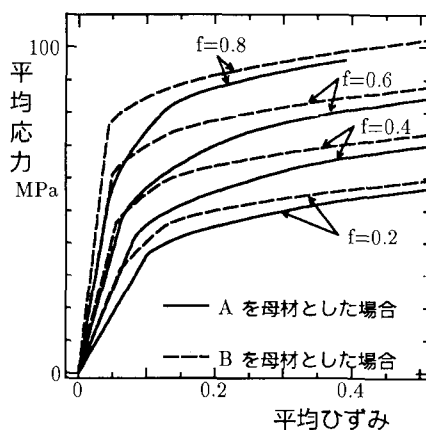


図-3-b 単純引っ張り状態

図-2 平均弾塑性挙動の例

件では塑性の影響を受けないとしている体積膨張係数とで、

$$\bar{\nu}^M = \begin{cases} \frac{3\kappa^M - C_{1111}^M}{3\kappa^M + C_{1111}^M} & x_1\text{-方向への単純引っ張り状態} \\ \frac{3\kappa^M - 2C_{1212}^M}{6\kappa^M + 2C_{1212}^M} & x_1\text{-}x_2\text{ 面内での純せん断状態} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (16)$$

で定義した。これも非常に荒っぽい概算である。

(3) 具体例

特徴が明確になるように極端に柔らかい材料を用いることにし、その材料定数を表-1に示した。この例は、弾性状態および硬化状態共に材料 A の接線係数の方が材料 B のそれよりも低くなるように選択したものである。また降伏応力は、前節に述べた「等価介在物

表-1 例のための材料定数

材料	μ (MPa)	ν	σ_Y (MPa)	h (MPa)	n
A	100	0.3	30	20	0.5
B	1000	0.2	90	30	0.5

法」による平均化計算において、母材に選んだ材料の方が先に降伏するように設定されたものである。すなわち、弾塑性状態にあっても、できるだけ上下界が得られるようにした選択である。この材料を純せん断状態にした場合と単純引っ張り状態にした場合について図-2に平均応力-ひずみ関係を示した。

図中実線は材料 A を母材として取り扱った場合の予測であり、破線は材料 B を母材とした場合の結果である。ここでは前記のように、材料 A の方が柔らかい材料であるため、実線の方が通常は柔らかめの応答を予測している。ただし材料 B を母材にした算定において、材料 B が先に降伏するため、その材料 B の接線弾塑性係数は材料 A の弾性係数よりも低くなるため、最終的に得られる平均接線係数の上下界が得られているとは考え難い。本来の目的である平均的な応答は、図示したような曲線にフィットする現象論的構成モデルを選択すれば、ある程度は内部の微視構造を考慮した材料定数を決定できそうである。

(4) 実測値との比較

土木材料ではないが、他のアプローチによる同様の算定に関する既発表論文⁷⁾の実測値との比較を行なったのが、図-3である。材料はシリカ粒・エポキシ高分子化合物複合材料である。シリカの材料定数が一部不明であるため、エポキシを母材とする算定しかできていない。材料定数は参考文献に詳しいが、ヤング率だけを示す

と、シリカが 73.1GPa であるのに対し、エポキシが 3.16GPa であり、弾性に関しては下界を与える方の方法を用いたことになる。Weng の方法は割線係数を用いたものであるが、この場合に限定すれば本方法との差は顕著ではなく、いずれの方法によっても、かなりよい精度で実測値を予測できることが明らかとなった。

5. おわりに

このような微視的なアプローチを用いて平均挙動を予測するよりも、現実材料の標準試験によって得られる現象論的構成モデルを用いた方が、設計や強度照査は楽かもしれない。しかしながら、実際の平均挙動はもちろん微視構造の重ね合わせで起こっていることや、設計における終局状態の予測等を考慮すると、任意の組み合わせの複合材料に対して、任意の载荷状態での挙動が予測できるという点で、本方法のような平均化手法は今後必要になる。設計等の応用の場では、材料をある現象論的構成モデルで記述する必要があるが、その場合に、限られた種類の標準試験から材料定数を決定するより、比較的純粋な材料としてモデル化しやすい微視構造の材料定数等から得られる平均挙動に基づいた方が、汎用性のある材料モデルが決定できる可能性は高い。また平均化したために、亀裂進展による破壊が局所化した結果の最終強度の予測をするのは困難だが、ある相内における平均的な亀裂発生と安定的進展による材料の軟化程度までは追跡できるのではないかと考えている。

参考文献

- 1) Eshelby, J. D. : The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A214, pp.376-396, 1957.
- 2) Hill, R. : A self-consistent mechanics of composite materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.213-222, 1965.
- 3) Hashin, Z. and Shtrikman, S. : A variational approach to the elastic behavior of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-240, 1963.
- 4) Hashin, Z. : Analysis of composite materials — A survey, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol.50, pp.481-505, 1983.
- 5) Willis, J. R. : The overall elastic response of composite materials, *J. Appl. Mech.*, ASME, Vol.50, pp.1202-1209, 1983.
- 6) Christensen, R. M. : A critical evaluation for a class of micromechanics models, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.38, pp.379-414, 1990.
- 7) Weng, G. J. : The overall elastoplastic stress-strain relations of dual-phase metals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.38, pp.419-441, 1990.
- 8) Lin, S. C., Yang, C. C., Mura, T. and Iwakuma, T. : Average elastic-plastic behavior of composite materials, *Int. J. Solids Structures*, Vol.29, pp.1859-1872, 1992.

(1992 年 9 月 21 日 受付)

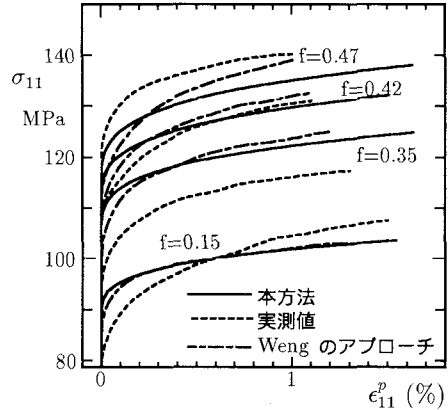


図-3 実測値との比較例