

円柱に作用する流体力の 3次元 ALE 有限要素流れ解析による評価

EVALUATION OF FLUID FORCES EXERTED ON A CIRCULAR CYLINDER
BY THREE-DIMENSIONAL ALE FINITE ELEMENT FLOW ANALYSIS

野村卓史 * 野澤剛二郎 **

By Takashi NOMURA and Kojiro NOZAWA

The added mass coefficient and the added damping coefficient for the vibrating circular cylinder in confined viscous fluids are evaluated by using 3D numerical flow analysis. The numerical method is developed by employing the finite element method as well as the arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation. The numerical solutions are in good agreement with 2D and 3D theoretical solutions. It is also demonstrated by numerical examples that the present method can evaluate fluid forces even in the cases where no theoretical solutions are available.

1. はじめに

流体中で振動する構造部材の応答におよぼす流体の影響は、構造部材に作用する流体力の寄与を付加質量係数や付加減衰係数として表現することによって扱われることが多い。付加質量係数は流体を非粘性流体と仮定することによって評価できるので、構造部材の形状が簡単な場合には理論的に求めることも可能であり既往の文献も多い(例えば[1])。数値解析による評価もポテンシャル流れと構造との相関問題については有限要素法や境界要素法による多くの解析が報告されており[2]、それらによって付加質量係数を評価することができる。

これに対して、流体の粘性を考慮し、それによる減衰効果まで評価する場合には既往の報告は実験的研究を除くと極めて限られたものになる。数少ない理論的なアプローチとして、Chenら[3]は粘性流体で満たされた円筒領域内で振動する円柱の問題を2次元問題に理想化し、微小な振動振幅を仮定して付加質量係数と付加減衰係数の理論解を求めている。また、Mulcahy[4]は円柱を囲む流体層の厚さが極めて薄い場合を対象として円筒領域の長さが有限の3次元な流れにおいて2つの係数の理論解を求めている。このように、当然のことながら、理論的なアプローチの場合には限定された状況に対してのみ解が誘導されている。一方、数値解析によるアプローチでは対象の形状や振幅に対してより汎用的になる。粘性流体を対象とした報告としては、強制振動する円柱の問題についてはYangとMoran[5]およびHuertaとLiu[6]があり、円柱がバネ支持されて流体と連成振動する問題まで扱ったものには野村と飯島[7]およびNomuraとHughes[8]がある。いずれも有限要素解析で、文献[6]~[8]はArbitrary Lagrangian-Eulerian(ALE)法を採用し、円柱運動に伴って流体解析のメッシュが変形する方法を用いている。どの報告も円筒領域内の円柱振動問題のみを扱っているが、解析メッシュさえ作成すれば任意の断面形状の問題に応用できる。

* 工博 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 文京区本郷 7-3-1)

** 工修 清水建設(株) 大崎研究室 (〒100 千代田区内幸町 2-2-2 富国生命ビル 27階)

しかし以上の有限要素解析はいずれも2次元解析である。2次元問題として理想化できる問題は柱状体とその周囲の流体領域が軸方向に非常に長い場合であるが、実際には領域を有限として取り扱うことが必要な場合もある。本研究はそうように3次元問題として取り扱う必要のある問題を解析すること、もしくは流体の3次元的な運動の影響が及ぼす効果を把握すること、を目的として文献[8]で報告した2次元の流体・構造相関問題の解析法に基づいて3次元問題の解析法を開発したものである。構成した解析法の検証を目的として上記[3]と[4]の2つの理論解との比較を行い良好な一致を見たこと、および構成した解析法が理論的に取り扱うことの難しい問題にも適用できること、を報告する。

なお、本論文は構造工学における数値解析法シンポジウムで発表した内容[9]を再構成して書き改めたものである。

2. 流体および物体の運動方程式

(1) 解析対象領域

図1は本研究で解析の対象とする問題の模式図である。すなわち、粘性流体で満たされた直径 D 、長さ L の円筒領域の中に直径 d の剛体円柱が置かれている。ここで流体の占める領域を $\Omega_F(t)$ とする。領域 $\Omega_F(t)$ は円柱の運動とともに変形する。領域 $\Omega_F(t)$ の境界の内、円筒領域の壁面を Γ_g 、円柱の表面を $\Gamma_I(t)$ と表す。 Γ_g は空間に固定され、 $\Gamma_I(t)$ は円柱の運動とともに移動する。また、円筒領域の底面に相当する円柱軸に直交する境界を $\Gamma_h(t)$ とする。境界 $\Gamma_h(t)$ も円柱運動とともに変形する。このように解析対象領域やその境界が時間とともに移動・変形する問題であるため、本研究では境界移動にともなう解析メッシュが変形するALE法を採用する。

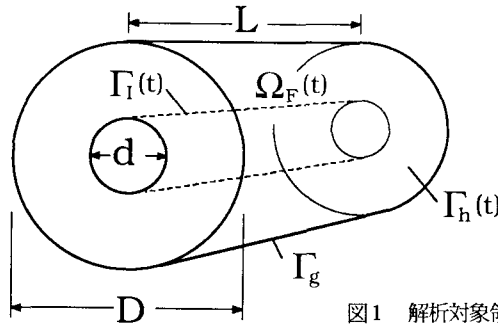


図1 解析対象領域と境界

(2) ALE記述された流体の支配方程式

ALE法によって記述されたナビエ・ストークス方程式と連続条件式は総和規約（添え字範囲 $i, j = 1 \sim 3$ ）を用いると次のように表される。

$$\rho\{u'_i + (u_j - \hat{u}_j)u_{i,j}\} = \tau_{ij,j} + f_i, \quad \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad u_{i,i} = 0 \quad \text{in } \Omega_F(t) \quad (1 \sim 3)$$

ここで、 ρ は密度、 μ は粘性係数、 u_i は流速、 τ_{ij} は応力テンソル、 p は圧力、 f_i は物体力であり、 $\hat{u}_i$ はメッシュ速度（節点の移動速度）、 δ_{ij} はクロネッカのデルタである。 u'_i は流速の参照微分 (referential time derivative) であり、移動するメッシュを基準として流速の変化を記述している。参照微分 u'_i と物質微分 (material time derivative) $\dot{u}_i$ との間には次の関係がある。

$$\dot{u}_i = u'_i + (u_j - \hat{u}_j)u_{i,j} \quad (4)$$

ただし、 $u_{i,j}$ は流速成分 u_i の空間座標 x_j に関する微分である。式(1)がEuler記述による通常のナビエ・ストークス方程式と異なる点は、移流速度が流体粒子の速度とメッシュ速度との相対速度 ($u_i - \hat{u}_i$) になっている点である。

境界条件は、まず円筒領域の内壁 Γ_g 上では、滑り無しの条件と Γ_g が固定境界であることから次の条件が与えられる。

$$u_i = 0, \quad \hat{u}_i = 0 \quad \text{on } \Gamma_g \quad (5)$$

また円柱表面 $\Gamma_I(t)$ 上では滑り無しの条件より、流体粒子の速度と円柱表面のメッシュ速度を等しいものと置く。

$$u_i = \hat{u}_i \quad \text{on } \Gamma_I(t) \quad (6)$$

境界 $\Gamma_h(t)$ 上では面内方向 (x_1, x_2) はトラクション・フリーとし、面外方向 (x_3) は後の解析例に示されるように流出・流入を許す場合と許さない場合とがある。境界条件は次のように表される。

$$\text{流出入がある場合: } t_i \equiv \tau_{ij} n_j = 0 \quad (i = 1 \sim 3), \quad \hat{u}_3 = 0 \quad \text{on } \Gamma_h(t) \quad (7a)$$

$$\text{流出入がない場合: } t_i \equiv \tau_{ij} n_j = 0 \quad (i = 1, 2), \quad u_3 = 0, \quad \hat{u}_3 = 0 \quad \text{on } \Gamma_h(t) \quad (7b)$$

ここで t_i はトラクション, n_i は境界上の外向き単位法線ベクトルである。

(3) 円柱の運動方程式

本研究の解析では、円柱の運動が与えられた変位履歴に従う場合と、バネ支持されて運動方程式に支配される場合と2通りを扱うが、前者は後者の特別な場合であるので、ここでは後者の場合について記述する。

円柱を剛体と仮定し、軸に直交する方向（便宜上 x_1 -方向とする）の並進運動のみを考えているので、その運動方程式は次式で表される。

$$m\alpha + c\nu + k\delta = X \quad (8)$$

ここで δ は重心で定義された x_1 -方向の並進変位成分, $\nu = \dot{\delta}$ は速度, $\alpha = \ddot{\delta}$ は加速度, X は δ に対応する集中力である。また m , c , k は質量, 減衰, 剛性の定数である。

3. 流体の有限要素方程式

(1) 弱形式および有限要素方程式

上記の ALE 記述されたナビエ・ストークス方程式の弱形式は次のように表される。なお、ここでは簡単のために境界条件 (7a) の場合についてのみ記述する。境界条件 (7b) の場合は以下の定式化の特別な場合として含まれる。

$$\int_{\Omega_F(t)} \rho \{ u'_i + (u_j - \hat{u}_j) u_{i,j} \} w_i d\Omega + \int_{\Omega_F(t)} \mu u_{i,j} w_{i,j} d\Omega - \int_{\Omega_F(t)} p w_{i,i} d\Omega = \int_{\Omega_F(t)} f_i w_i d\Omega \quad (9a)$$

$$\int_{\Omega_F(t)} u_{i,i} q d\Omega = 0 \quad (9b)$$

ここで w_i と q は重み関数である。

本研究では、流速 trilinear, 圧力一定の混合補間六面体要素を用いた。このときの有限要素方程式は次式で表される。

$$\mathbf{M}\mathbf{a} + \mathbf{N}(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})\mathbf{v} - \mathbf{G}\mathbf{p} = \mathbf{f}, \quad \mathbf{G}^t \mathbf{v} = 0 \quad (10, 11)$$

ここで $\mathbf{v}$ は節点流速ベクトル, $\hat{\mathbf{v}}$ はメッシュ速度のベクトル, $\mathbf{a}$ は節点加速度ベクトル, $\mathbf{p}$ は要素圧力のベクトル, $\mathbf{f}$ は物体力のベクトルである。また, $\mathbf{M}$ は質量マトリックス, $\mathbf{G}$ は勾配に関するマトリックスであり, $\mathbf{N}(\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})$ は対流項, 粘性項に関するマトリックスを便宜的にまとめて表したもので移流速度 $\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$ の関数である。これらのマトリックス $\mathbf{M}$, $\mathbf{N}$, $\mathbf{G}$ を作成するときに参照する節点座標は円柱の変位にしたがって変化し、時間の関数である。

(2) 円柱の自由度と円柱表面の節点変数の関係

先に述べたように対象としている問題の境界は Γ_g , $\Gamma_h(t)$, $\Gamma_I(t)$ の3種類に分けられる。このことから、流体の有限要素方程式の節点変数ベクトルの成分を次のように区別する。

$$\mathbf{a} = \langle \mathbf{a}^\alpha, \bar{\mathbf{a}}^\beta, \mathbf{a}^\gamma \rangle, \quad \mathbf{v} = \langle \mathbf{v}^\alpha, \bar{\mathbf{v}}^\beta, \mathbf{v}^\gamma \rangle, \quad \mathbf{f} = \langle \mathbf{f}^\alpha, \mathbf{f}^\beta, \mathbf{f}^\gamma \rangle, \quad \hat{\mathbf{v}} = \langle \hat{\mathbf{v}}^\alpha, \hat{\mathbf{v}}^\beta, \hat{\mathbf{v}}^\gamma \rangle \quad (12a \sim d)$$

ここで添え字 β , γ はそれぞれ境界 Γ_g , $\Gamma_I(t)$ 上の節点変数を表し、添え字 α はそれ以外の節点変数、すなわち境界 $\Gamma_h(t)$ 上と領域 $\Omega_F(t)$ 内部の節点変数を表している。また記号 $(\cdot)$ は、その成分が既知であることを意味している。

この区別にもとって、有限要素方程式を次のように分離する。

$$\begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha\beta} & M^{\alpha\gamma} \\ M^{\beta\alpha} & M^{\beta\beta} & M^{\beta\gamma} \\ M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\beta} & M^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^\alpha \\ \bar{\mathbf{a}}^\beta \\ \mathbf{a}^\gamma \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N^{\alpha\alpha} & N^{\alpha\beta} & N^{\alpha\gamma} \\ N^{\beta\alpha} & N^{\beta\beta} & N^{\beta\gamma} \\ N^{\gamma\alpha} & N^{\gamma\beta} & N^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^\alpha \\ \bar{\mathbf{v}}^\beta \\ \mathbf{v}^\gamma \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^\alpha \\ \mathbf{G}^\beta \\ \mathbf{G}^\gamma \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^\alpha \\ \mathbf{f}^\beta \\ \mathbf{f}^\gamma \end{Bmatrix} \quad (13)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{G}^{\alpha'} & \mathbf{G}^{\beta'} & \mathbf{G}^{\gamma'} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^\alpha \\ \bar{\mathbf{v}}^\beta \\ \mathbf{v}^\gamma \end{Bmatrix} = 0 \quad (14)$$

また、円柱表面 $\Gamma_I(t)$ 上の節点変数と円柱の重心で定義された諸量との関係は次のように表される。

$$\text{適合条件: } \mathbf{v}^\gamma = \mathbf{T}^t \nu, \quad \mathbf{a}^\gamma = \mathbf{T}^t \alpha, \quad \text{つりあい条件: } \mathbf{X} + \mathbf{T} \mathbf{f}^\gamma = 0 \quad (15a \sim c)$$

$\mathbf{T}$ は円柱の重心と円柱表面の各節点の間の幾何的な関係を表すマトリックスである。ここでは円柱運動が並進1成分のみなので次のような簡単な内容となる。

$$\mathbf{T} = [\dots 1 \ 0 \ 0 \ \dots 1 \ 0 \ 0 \ \dots 1 \ 0 \ 0 \ \dots] \quad (16)$$

ここで要素1は円柱表面節点の x_1 -方向成分に対応する箇所だけに存在し、その他の要素はすべてゼロである。すなわち適合条件(15a, b)は円柱表面上の節点で流速 $\mathbf{v}^\gamma$ と加速度 $\mathbf{a}^\gamma$ の x_1 -方向成分がそれぞれ円柱の速度 ν と加速度 α に一致することを意味し、つりあい条件は円柱表面節点の節点力 $\mathbf{f}^\gamma$ の x_1 -方向成分の合力が $\mathbf{X}$ とつりあうことを意味している。

メッシュ速度 $\hat{\mathbf{v}}$ の具体的な分布は後述するが、少なくとも境界では次の条件を満たすものとする。

$$\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}^\gamma = \mathbf{T}^t \nu \quad \text{on } \Gamma_I(t), \quad \hat{\mathbf{v}} = 0 \quad \text{on } \Gamma_g, \quad \hat{\mathbf{v}}_3 = 0 \quad \text{on } \Gamma_h(t) \quad (17a \sim c)$$

4. Predictor-corrector 法に基づく計算過程の誘導

(1) 円柱表面上の自由度の消去

式(15a, b)に表されるように、円柱表面 $\Gamma_I(t)$ 上の節点加速度成分 $\mathbf{a}^\gamma$ と節点流速成分 $\mathbf{v}^\gamma$ は円柱重心で定義された加速度 α , 流速 ν によって拘束されている。この関係を式(13)の第3行に代入し、さらに既知流速成分 $\bar{\mathbf{v}}^\beta$ に関する第2行を除いた結果は次のようである。

$$\begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha\gamma} \\ M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^\alpha \\ \mathbf{T}^t \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N^{\alpha\alpha} & N^{\alpha\gamma} \\ N^{\gamma\alpha} & N^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^\alpha \\ \mathbf{T}^t \nu \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}^\alpha \\ \mathbf{G}^\gamma \end{bmatrix} \mathbf{p} = \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}^\alpha \\ \mathbf{f}^\gamma \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} M^{\alpha\beta} \\ M^{\gamma\beta} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{a}}^\beta - \begin{bmatrix} N^{\alpha\beta} \\ N^{\gamma\beta} \end{bmatrix} \bar{\mathbf{v}}^\beta \quad (18)$$

この式の第2行より節点力 $\mathbf{f}^\gamma$ を表し、関係式(15c)を用いて円柱の運動方程式(8)に第入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} m\alpha + c\nu + k\delta &= -\mathbf{T} \mathbf{f}^\gamma \\ &= -\mathbf{T} \left(\begin{bmatrix} M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\beta} & M^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}^\alpha \\ \bar{\mathbf{a}}^\beta \\ \mathbf{T}^t \alpha \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N^{\gamma\alpha} & N^{\gamma\beta} & N^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{v}^\alpha \\ \bar{\mathbf{v}}^\beta \\ \mathbf{T}^t \nu \end{Bmatrix} - \mathbf{G}^\gamma \mathbf{p} \right) \end{aligned} \quad (19)$$

右辺にある円柱加速度 α に関する項を左辺に移項すると次式が得られる。

$$m^* \alpha + c\nu + k\delta = -T \left(\begin{bmatrix} M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\beta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha^\alpha \\ \bar{a}^\beta \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} N^{\gamma\alpha} & N^{\gamma\beta} & N^{\gamma\gamma} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v^\alpha \\ \bar{v}^\beta \\ v^\gamma \end{Bmatrix} + G^{\gamma p} \right) \quad (20)$$

ここで

$$m^* = m + T M^{\gamma\gamma} T^t \quad (21)$$

式(18)の第1行と式(20)に対して以下のように時間積分法を適用する。

(2) Predictor-corrector 法の適用

以上に示した連成問題のマトリックス方程式の時間微分項に、Hughes らの Predictor-corrector 法[10,11]を適用すると、時刻 t_n から $t_{n+1}(=t_n + \Delta t)$ への1ステップの時間積分が次の3つの段階からなる計算過程を構成できる。

第1段階 (predictor) : $i = 0$

$$\begin{aligned} \text{[流体]} \begin{cases} \alpha_{n+1}^{(i)} = 0 \\ v_{n+1}^{(i)} = v_n + \Delta t(1 - \gamma_v) \alpha_n \\ p_{n+1}^{(i)} = p_n \end{cases} \quad \text{[円柱]} \begin{cases} \alpha_{n+1}^{(i)} = 0 \\ \nu_{n+1}^{(i)} = \nu_n + \Delta t(1 - \gamma) \alpha_n \\ \delta_{n+1}^{(i)} = \delta_n + \Delta t \nu_n + \frac{1}{2} \Delta t^2 (1 - 2\beta) \alpha_n \end{cases} \quad (22a \sim f) \end{aligned}$$

第2段階 (solution) : $0 \leq i \leq I-1$ 加速度増分 $\Delta \alpha^{(i)}$ 、 $\Delta \alpha^{(i)}$ と圧力増分 $\Delta p^{(i)}$ を計算する。次節(3)で詳述する。

第3段階 (corrector) : $0 \leq i \leq I-1$

$$\begin{aligned} \text{[流体]} \begin{cases} \alpha_{n+1}^{\alpha(i+1)} = \alpha_{n+1}^{\alpha(i)} + \Delta \alpha^{\alpha(i)} \\ v_{n+1}^{\alpha(i+1)} = v_{n+1}^{\alpha(i)} + \gamma_v \Delta t \Delta \alpha^{\alpha(i)} \\ p_{n+1}^{(i+1)} = p_{n+1}^{(i)} + \Delta p^{(i)} \end{cases} \quad \text{[円柱]} \begin{cases} \alpha_{n+1}^{(i+1)} = \alpha_{n+1}^{(i)} + \Delta \alpha^{(i)} \\ \nu_{n+1}^{(i+1)} = \nu_{n+1}^{(i)} + \gamma \Delta t \Delta \alpha^{(i)} \\ \delta_{n+1}^{(i+1)} = \delta_{n+1}^{(i)} + \beta \Delta t^2 \Delta \alpha^{(i)} \end{cases} \quad (23a \sim f) \end{aligned}$$

以上の計算で第2段階および第3段階は2回以上繰り返す必要がある ($I \geq 2$)。また $\gamma_v \geq \frac{1}{2}$ 、 $\gamma \geq \frac{1}{2}$ 、 $\beta \geq \frac{1}{4}$ は時間積分の精度と安定性を制御するパラメータで、 γ と β はNewmark 公式のものである。既報[8]のように、 $\gamma_v = \gamma$ として加速度と速度の関係を流体と円柱とで同じにする必要がある。

(3) 第2段階の計算

第2段階 (solution) は以下の4つの手順からなる。

a) 運動方程式の残差の計算

第 i 回目の繰り返し計算の近似値によって運動方程式の残差を求める：

$$R_{n+1}^{\alpha(i)} = \bar{f}_{n+1}^\alpha - \begin{bmatrix} M^{\alpha\alpha} & M^{\alpha\beta} & M^{\alpha\gamma} \end{bmatrix}_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} \alpha^\alpha \\ \bar{a}^\beta \\ T^t \alpha \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} - \begin{bmatrix} N^{\alpha\alpha} & N^{\alpha\beta} & N^{\alpha\gamma} \end{bmatrix}_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} v^\alpha \\ \bar{v}^\beta \\ T^t \nu \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} + G_{n+1}^{\alpha(i)} p_{n+1}^{(i)} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} r_{n+1}^{(i)} = & -m_{n+1}^{*(i)} \alpha_{n+1}^{(i)} - c \nu_{n+1}^{(i)} - k \delta_{n+1}^{(i)} \\ & - T_{n+1}^{(i)} \left(\begin{bmatrix} M^{\gamma\alpha} & M^{\gamma\beta} \end{bmatrix}_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} \alpha^\alpha \\ \bar{a}^\beta \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} + \begin{bmatrix} N^{\gamma\alpha} & N^{\gamma\beta} & N^{\gamma\gamma} \end{bmatrix}_{n+1}^{(i)} \begin{Bmatrix} v^\alpha \\ \bar{v}^\beta \\ T^t \nu \end{Bmatrix}_{n+1}^{(i)} - G_{n+1}^{\gamma(i)} p_{n+1}^{(i)} \right) \quad (25) \end{aligned}$$

ここでマトリックスの添え字 (i) は i 回目の繰り返し時の節点座標に基づくマトリックスであることを意味する。

b) 仮の加速度増分の計算

次式を解いて、非圧縮条件を満足していない、仮の加速度増分を求める：

$$\bar{M}_{n+1}^{\alpha(i)} \Delta a^{\alpha*(i)} = R_{n+1}^{\alpha(i)}, \quad \bar{m}_{n+1}^{*(i)} \Delta \alpha^{*(i)} = r_{n+1}^{(i)} \quad (26a, b)$$

ただし

$$\Delta a^{\alpha*(i)} = \Delta a^{\alpha(i)} - \bar{M}_{n+1}^{\alpha(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} \Delta p^{(i)}, \quad \Delta \alpha^{*(i)} = \Delta \alpha^{(i)} - \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^{\gamma(i)} \Delta p^{(i)} \quad (27a, b)$$

ここで $\bar{M}$ は M の lumped mass を表し、 $\bar{M}^\alpha$ はその内、加速度成分 α^α に対応する部分マトリックスを意味している。また、 $\bar{m}^*$ は Newmark 公式を適用したことにより得られる次のような係数である。

$$\bar{m}^* \equiv m^* + \Delta t \gamma c + \Delta t^2 \beta k \quad (28)$$

lumped mass を導入したのは、後述する圧力に関する方程式の係数マトリックスのスパース性を確保するためである。式 (24), (25) に示したように、lumped mass による精度低下を抑えるために、これらの式の右辺の残差ベクトルの計算には元の consistent mass マトリックスを用いている。

c) 圧力増分の計算

通常の混合法による非圧縮性流れの解析アルゴリズムと同様に、流速場に連続条件を課すことによって圧力増分に関する方程式を得る。すなわち各繰り返し計算後の流速 $v_{n+1}^{(i+1)}$ に関する連続条件は式 (11) と (15a) より次のように表される。

$$G_{n+1}^{\alpha(i+1)t} v_{n+1}^{\alpha(i+1)} + G_{n+1}^{\gamma(i+1)t} T_{n+1}^{(i+1)t} \nu_{n+1}^{(i+1)} = -G_{n+1}^{\beta(i+1)t} \bar{v}_{n+1}^\beta \quad (29)$$

これに式 (23b), (23e) を代入すると次式が得られる。

$$G_{n+1}^{\alpha(i)t} \left[v_{n+1}^{\alpha(i)} + \gamma_v \Delta t \left(\Delta a^{\alpha*(i)} + \bar{M}_{n+1}^{\alpha(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} \Delta p^{(i)} \right) \right] + G_{n+1}^{\gamma(i)t} T_{n+1}^{(i)t} \left[\nu_{n+1}^{(i)} + \gamma \Delta t \left(\Delta \alpha^{*(i)} + \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^{\gamma(i)} \Delta p^{(i)} \right) \right] = -G_{n+1}^{\beta(i)t} \bar{v}_{n+1}^\beta \quad (30)$$

ただし、一回の繰り返し計算に伴う有限要素の変形は無視できるものと仮定し、マトリックス $G^{(i+1)}$ を $G^{(i)}$ で置き換えている。これより次の方程式を得る。

$$K_{n+1}^{(i)} \Delta p^{(i)} = -[G^{\alpha t} G^{\beta t} G^{\gamma t}]_{n+1}^{(i)} \left\{ \begin{array}{c} v_{n+1}^{\alpha(i)} + \gamma_v \Delta t \Delta a^{\alpha*(i)} \\ \bar{v}_{n+1}^\beta \\ T_{n+1}^{(i)t} (\nu_{n+1}^{(i)} + \gamma \Delta t \Delta \alpha^{*(i)}) \end{array} \right\} \quad (31)$$

ここで、

$$K_{n+1}^{(i)} = \gamma_v \Delta t G_{n+1}^{\alpha(i)-1} \bar{M}_{n+1}^{\alpha(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} + \gamma \Delta t G_{n+1}^{\gamma(i)t} T_{n+1}^{(i)t} \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^{\gamma(i)} \quad (32)$$

式 (31) を解いて圧力増分 $\Delta p^{(i)}$ を求める。

d) 加速度増分の計算

次式によって加速度増分を補正し、第 3 段階 (corrector) に進む。

$$\Delta a^{\alpha(i)} = \Delta a^{\alpha*(i)} + \bar{M}_{n+1}^{\alpha(i)-1} G_{n+1}^{\alpha(i)} \Delta p^{(i)}, \quad \Delta \alpha^{(i)} = \Delta \alpha^{*(i)} + \bar{m}_{n+1}^{*(i)-1} T_{n+1}^{(i)} G_{n+1}^{\gamma(i)} \Delta p^{(i)} \quad (33a, b)$$

(4) メッシュ速度

以上の計算過程において、解析領域内の節点のメッシュ速度 $\bar{v}$ は円柱速度 ν に比例するものとして与え、その値は対流項に関するマトリックス (N の一部) に用いられる。また節点座標は初期メッシュの節点座標に円柱変位に比例する節

点変位を加えることによって与える。上記の計算過程の係数マトリックスはいずれもそのようにして更新された節点座標値に基づいて作成する。

(5) 強制振動の場合のアルゴリズム

円柱振動の時刻歴があらかじめ与えられている場合には、上述の計算過程の内、円柱の運動方程式に関係する計算過程を省略して計算が進められる。すなわち、式(22d～f)、(23d～f)、(25)、(26b)、(27b)、(33b)の計算をする必要がない。また、それ以外の計算過程についても円柱の速度 v 、加速度 a などに関する項を作成する過程が省かれる。言い換えれば有限要素方程式で表される流れの問題を円柱変位にともなって変形する有限要素メッシュ上で解くことになる。

5. 円柱を強制振動した場合の流体力の評価

構成した解析法を用いて、円柱変位の時刻歴を周期的に変化させる方法による3ケースの解析を行った。はじめの2ケースは理論解と比較して解析法を検証する目的で行った。3ケース目は理論解の存在しない条件下のものである。

(1) Case 1: 2次元理論解との比較

報告されている理論解の一つはChenら[3]による2次元問題のものであり、円柱径 d に比べて軸方向の長さ L が十分に長い場合に適用される。もちろん単に2次元問題に理想化したときの流体力を評価したいときには2次元解析を行えばよく、事実著者らは2次元解析結果の報告を行っている[7,8]。本研究では解析法を検証する目的のために3次元解析法であえて2次元問題を解析した。

表1 Case 1とCase 2の解析の諸元

	Case 1	Case 2
液体	silicon oil	water
ρ (液体の密度)	$0.956g/cm^2$	$1.00g/cm^2$
μ (粘性係数)	$1.45g/cm \cdot s$	$0.0133g/cm \cdot s$
d (円柱の直径)	$1.27cm$	$2.54cm$
D (円筒領域の直径)	$5.00d$	$2.59cm$
h (間隙と円柱の直径の比)	4.00	0.00984
a (片振幅)	$0.05d$	$0.01h$
L (円筒領域の長さ)	$2.00cm$	$1.95cm$

表1にCase 1の解析の諸元を示す。円筒と円柱の直径比は5とした。図2は解析に用いた有限要素メッシュである。対称性より円柱の振動方向を対称軸とする半分の領域のみを分割している。要素分割数は周方向に24、半径方向に10、軸方向に4とした。境界条件は円筒内壁と円柱表面で滑り無し条件、対称面で対称条件(面内スリップ条件)としたほか、図3に示すように領域の両端面で、面内スリップの条件とした。この最後の条件により解析領域からの流体の流出・流入が妨げられ、円柱の運動方向に平行な流速成分のみをもつ2次元流れが得られる。円柱振動は片振幅 $0.05d$ の正弦振動とし、その角振動数 ω を無次元振動数 $R_k \equiv \omega d^2/4\nu$ (the kinetic Reynolds number)で22、52、521の3ケースに設定して計算を行った。時間積分間隔 Δt は振動周期の1/800とし、円柱が変位ゼロで静止している状態を初期条件とした。解析領域内の節点は円柱の運動方向にのみ変位するものとし、その変位、速度はいずれも円柱の変位と速度に比例するものとした。その比例定数は図4に示すように放射方向に線形分布するように与えた。

各積分ステップごとに円柱に作用する抗力を式(15c)もしくは(19)の関係によって算出し、その時刻歴と円柱変位、円柱速度の時刻歴との位相差から付加質量係数 C_M 、付加減衰係数 C_V を評価した。これらをChenらの理論解と比較したのが図5である。いずれも解析結果は理論値よりやや大きめであるが良好な一致が得られているといえよう。

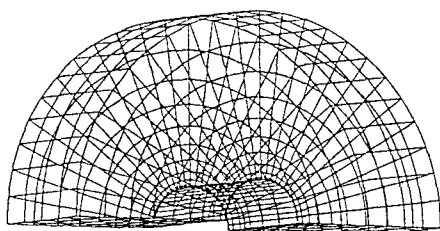


図2 Case 1, 3, 4 の解析に用いた有限要素メッシュ

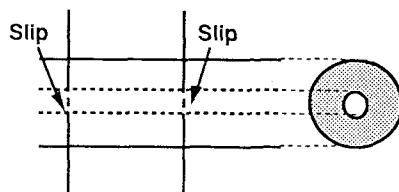


図3 両端部面内スリップの境界条件

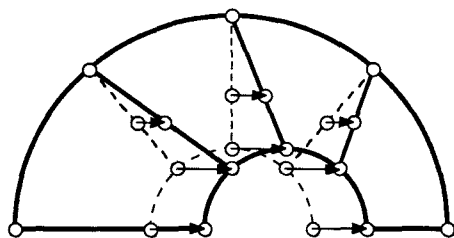


図4 円柱運動にともなう節点の動かし方

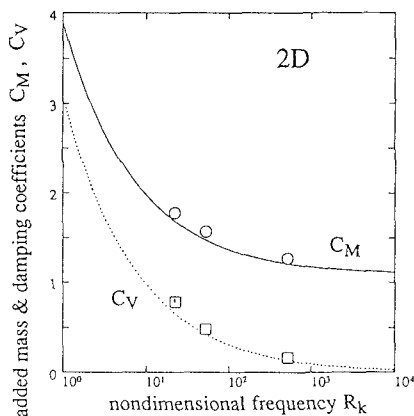


図5 解析から評価された付加質量係数 C_M , 付加減衰係数 C_V の2次元理論解[3]との比較

(2) Case 2: 3次元理論解との比較

Mulcahy による3次元理論解[4]は、円筒領域の長さ L を有限とするかわりに、円筒内壁と円柱表面との間の領域がきわめて狭いという条件のもとに誘導されている。この理論解との比較を目的とした解析を表1に示した諸元を設定して行った。流れの3次元性が顕著になるように、円柱の直径 d と長さ L の比が1のオーダーになるようにしている。図6に解析に用いた有限要素メッシュを示す。要素分割数はCase1の場合と同じである。円筒両端の境界条件は、図7に示すように一方を対称条件(面内スリップ条件)、もう一方をトラクション・フリーの条件とした。円柱振動の片振幅は円筒と円柱の静止時の間隔の1%とし、無次元振動数 R_k が 9.8×10^4 , 4.0×10^5 , 9.5×10^5 の3ケースの計算を行った。時間積分間隔 Δt はやはり振動周期の $1/800$ とした。解析結果から評価された付加質量係数と付加減衰係数を理論解と比較したのが図8であるが、この場合も良好な結果が得られているといえる。

(3) Case 3: 短い円柱まわりの3次元流れ

以上に示してきたように、本研究で対象とする問題の理論解は円柱が非常に長い、ないしは流体の占める領域が極めて狭い、という極端な条件に対してのみ報告されている。より一般的な条件の問題に対しても流体力を評価できるようにすることが数値解析法を開発することの目的であり、そのような意味で理論解を求めることが難しい条件の問題に本解析法を適用した例を次に示す。

解析の諸元、要素分割はCase1と同じ(図2)とし、端部の境界条件を変えてCase2と同じく一端をトラクション・フリーとした(図7)。この条件で2ケースの計算を行い、評価された付加質量係数 C_M と付加減衰係数 C_V をCase1の結果と比較したのが表2である。いずれもCase1の結果よりも小さくなっており、円柱に作用する流体力がより小さ

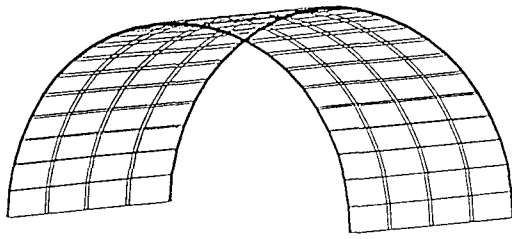


図6 Case 2 の解析に用いた有限要素メッシュ

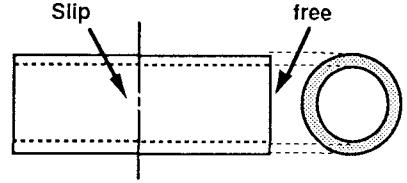


図7 両端部の境界条件

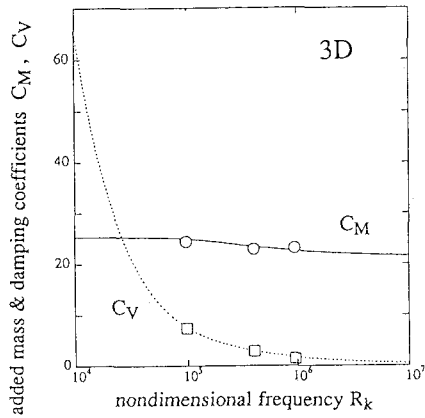


図8 解析から評価された付加質量係数 C_M 、付加減衰係数 C_V の3次元理論解[4]との比較

いことを示している。図9に Case 1 と Case 3 の流速ベクトルを比較して示しているが、Case 3 ではトラクション・フリーの境界に近づくにつれて流速が円柱軸方向を向き、円柱の進行方向の境界面から流体が流出し、反対側から流入する3次元的な流れになっている。このように Case 1 の流れと比較すると円柱運動の方向に運動する流体が少ないことが、円柱に作用する流体力を低下させていることが分かる。

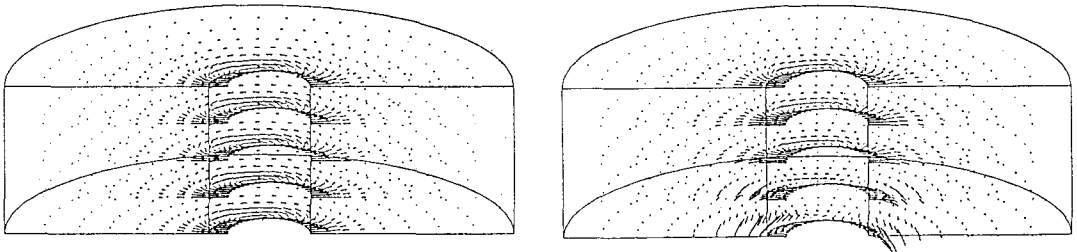


図9 Case 1 (左) と Case 3 (右) の流速ベクトル図 (円柱は右向きに運動している)

表2 Case 3 の解析結果 (カッコ内は Case 1 の結果)

R_k	C_M	C_V
52.20	1.067(1.570)	0.351(0.484)
22.21	1.241(1.780)	0.569(0.786)

表3 円柱の自由振動の解析結果

	C_M	C_V
自由振動	1.253	0.583
強制振動	1.241	0.569

6. 円柱が自由振動する場合の解析例

構成した解析法の汎用性を示すために、先の Case 3 と同じ諸元、境界条件を用いて弾性支持された円柱の自由振動問題の解析を行った。円柱の質量は $m = 6.815g$ 、バネ定数は $k = 6.992 \times 10^5 g/s^2$ とした。構造減衰はないものとした ($c = 0$) が、流体の粘性の効果で振動は減衰する。この条件で円柱に初期変位 $0.01d$ を与えて自由振動の計算を行った。この場合の時間積分間隔 Δt は周期の $1/1200$ とした。解析結果から評価された付加質量係数と付加減衰係数を Case 3 の結果と比較して表 3 に示すが、両者はほぼ一致しており、構造・流体相関問題の解析法として定式化された本解析法が妥当なものであることの一つの証左といえる。

7. おわりに

粘性流体で満たされた円筒領域内で振動する円柱に作用する流体力を評価する問題を、A L E 法と有限要素法に基づいて構成した 3 次元の構造・流体相関問題解析法によって解析した。その結果、構成した解析法が、振動円柱の付加質量係数と付加減衰係数を 2 次元、3 次元の理論解とよく一致する評価をできること、および理論解を求め難い問題や自由振動問題のシミュレーションも行えることを明らかにした。

本研究では解析法の検証のために解析対象を円筒領域内の振動円柱に限定したが、構成した解析法は有限要素法に基づいているため、要素分割を適当に行えば円柱以外の断面形状の柱状体や円筒以外の領域形状の問題にも応用することができる。また、柱状体の運動を並進 1 自由度のみでなく回転運動を含んだ多自由度の運動に本解析法を拡張することも容易である。本研究で取り扱った問題では流体の運動は構造振動によって励起されるものであったが、流体自身が流れている問題へも本解析法は原理的には適用可能である。今後、解析法の適用範囲を拡大していきたいと考えている。

参考文献

- 1) Patton, K.T.: Tables of hydrodynamic mass factors for translational motion, ASME paper No.65-WA/UNT-2.
- 2) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method, 4th edn., vol.2, McGraw-Hill, London, 1991.
- 3) Chen, S.S., Wambsganss, M.W. and Jendrzejczyk, J.A.: Added mass and damping of a vibrating rod in confined viscous fluids, J. Appl. Mech., pp.325-329, 1976.
- 4) Malcahy, T.M.: Fluid forces on rods vibrating in finite length annular regions, J. Appl. Mech., vol.47, pp.234-240, 1980.
- 5) Yang, C.-I. and Moran, T.J.: Finite-element solution of added mass and damping of oscillation rods in viscous fluids, J. Appl. Mech., vol.46, pp.519-523, 1979.
- 6) Huerta, A. and Liu, W.K.: Viscous flow structure interaction, J. Press. Vess. Tech., vol.110, pp.15-21, 1988.
- 7) 野村卓史・飯島政義: A L E 法に基づく粘性流体と構造との相関問題の有限要素解析手法, 土木学会論文集, No. 416/I-13, pp.285-294, 1990.
- 8) Nomura, T. and Hughes, T.J.R.: An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., vol.95, pp.115-138, 1992.
- 9) 野沢剛二郎・野村卓史: 粘性流体中を振動する円柱まわりの流れの 3 次元 A L E 有限要素解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第 16 巻, pp.451-456, 1992.
- 10) Hughes, T.J.R., The Finite Element Method, Prentice-Hall, New Jersey, 1987.
- 11) Brooks, A.N. and Hughes, T.J.R.: Streamline upwind/Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg., vol.32, pp.199-259, 1982.

(1992年9月21日受付)