

有限要素法と境界要素法の重ね合わせに基づく コンクリート構造の数値解析手法

NUMERICAL METHOD BASED ON SUPERPOSITION OF FEM AND BEM FOR ANALYSIS OF CONCRETE STRUCTURES

ペーター・カベレ^{*}, 山口栄輝^{**}, 堀井秀之^{**}

By Petr KABELE, Eiki YAMAGUCHI, Hideyuki HORII

The finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM) are the two powerful tools for structural analysis. However, both methods have disadvantages as well. While FEM is more suitable for the analysis of material-nonlinear problems than BEM, FEM presents difficulties in crack problems and BEM is better suited. Thus neither method is particularly good for analysis of concrete structures, in which both plasticity and cracking are involved. In the present study, we propose a method based on the superposition of FEM and BEM. The method decomposes a problem into two problems: one is associated only with elastic-plastic behavior and the other contains crack. We assign FEM to an elastic-plastic problem and BEM to a crack problem so as to take advantage of the two methods. The validity of this method is demonstrated by solving numerical examples.

1. はじめに

コンクリートは圧縮応力下で延性材料のような非線形挙動を示し、引張応力下ではクラックを生じて脆性材料に近い挙動をする^{1)~3)}。このため、コンクリート構造の解析では、非線形な材料挙動とクラックの両方を考慮に入れなければならない。

既存の代表的な数値解析法として、有限要素法⁴⁾と境界要素法⁵⁾が挙げられる。どちらも優れた解析法であるが、それぞれに一長一短があり⁶⁾、材料非線形とクラック進展の両方が重要な問題の解析を行うには、いずれの手法にも難がある。ところで、有限要素法は材料非線形、境界要素法はクラック進展の解析に適している。したがって、これら2つの数値解析法を組み合わせ、それぞれの長所を生かした解析手法を開発できれば、材料非線形挙動とクラック進展が共存する問題に対して有力な数値解析法になると考えられる。

この考え方に基づき、著者らは先にその基礎的研究として、線形弾性体を対象に重ね合わせ解析法の定式化を示し、その有効性を検証した⁷⁾。本研究では、コンクリートが示す材料非線形、クラック進展といった挙動を取り扱うためにこの重ね合わせ解析法を拡張し、その定式化を示す。また例題を解くことにより、その妥当性を検討する。よく用いられる複合解析法は領域を2つに分け、それぞれを有限要素法と境界要素法で解くものであるが、本研究で提案する手法はこれとは全く異なり、問題を2つの問題の重ね合わせとして

* 工修 東京大学大学院生 工学系研究科土木工学専攻 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

** Ph. D. 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

解く方法である。例えば、非線形な材料挙動をする領域にクラックが進展する場合、複合解析法で有限要素法と境界要素法の特長を十分に生かした解析を行うのは難しいが、本解析法では問題なく行える。

2. 定式化

コンクリートの特色として、圧縮応力下での非線形な材料挙動、引張応力下におけるクラックの発生・進展が挙げられる。いずれについてもかなりの研究が行われており、様々な力学モデルが提案されている^{1)~3)}。本研究では、圧縮応力下の非線形挙動については弾塑性理論で記述する²⁾。また引張応力下で問題となるクラックは、コンクリートの場合、応力を伝達する部分としない部分とに分けられ、前者はフラクチャープロセスゾーン、後者はストレスフリークラックと呼ばれ区別されている。本研究では、破壊力学に基づいてクラックをモデル化し、フラクチャープロセスゾーンの挙動を Dugdale-Barenblatt 型モデルで表す³⁾。

弾塑性理論を用いるため、本研究では増分境界値問題を取り扱うこととなり、すべての支配方程式、境界条件が場の変数の速度について記述される³⁾。以下では、この増分境界値問題を有限要素法と境界要素法の重ね合わせで解くことを考える。

(1) 基本概念

本研究で取り扱う問題は次のように定義される。

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = 0 \quad : \text{釣合式} \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad : \text{構成則} \quad (2)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i})/2 \quad : \text{ひずみ-変位関係} \quad (3)$$

$$\bar{t}_i = \dot{\sigma}_{ij} n_j \quad : \text{一般境界 } S_t \text{ での応力境界条件} \quad (4)$$

$$\bar{u}_i = \dot{u}_i \quad : \text{一般境界 } S_u \text{ での変位境界条件} \quad (5)$$

$$\bar{t}_i^+ = \bar{t}_i^- = 0 \quad : \text{ストレスフリークラック } \Gamma_c \text{ での境界条件} \quad (6)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{t}_i^+ + \bar{t}_i^- &= 0 \\ \bar{t}_n^+ - \bar{t}_n^- &= -2s(\dot{u}_n^+ - \dot{u}_n^-), \quad \bar{t}_t^+ - \bar{t}_t^- = 0 \end{aligned} \right\} : \text{フラクチャープロセスゾーン } \Gamma_f \text{ での境界条件} \quad (7)$$

ここで、 $\dot{\sigma}_{ij}$ は応力速度、 $\dot{\varepsilon}_{ij}$ はひずみ速度、 $\dot{u}_i$ は変位速度、 D_{ijkl}^{ep} は弾塑性体の接線剛性、 $\bar{t}_i$ は表面力速度、 n_i は外向き単位法線ベクトル、 s は引張軟化曲線の傾きであり、下付き添字 i, j, k, l はテンソル指標、下付き添字 n, t はそれぞれフラクチャープロセスゾーンの不連続面に垂直、平行な方向、上付き添字 $+, -$ はクラックの2つの不連続面を表している。また $(\bar{\quad})$ は境界条件として与えられた量であることを示している。

本研究ではこの問題を2つに分割し、1つを有限要素法、他を境界要素法で解き、結果を重ね合わせることで本来の解を得る。分割の仕方は色々考えられるが、有限要素法と境界要素法の特長を十分に生かせるような分割を行う必要があり、本研究では図-1に示すものを考える。有限要素法で解く問題を問題F、境界要素法で解く問題を問題Bと称し、上付き添字としてFあるいはBをつけることによりいずれの問題にかかわる量であるかを区別する。また図-1において、 Ω は領域を表しているが、下付き添字 e, p はそれぞれ弾性領域、弾塑性領域であることを示している。

問題F、Bは次のように記述される。

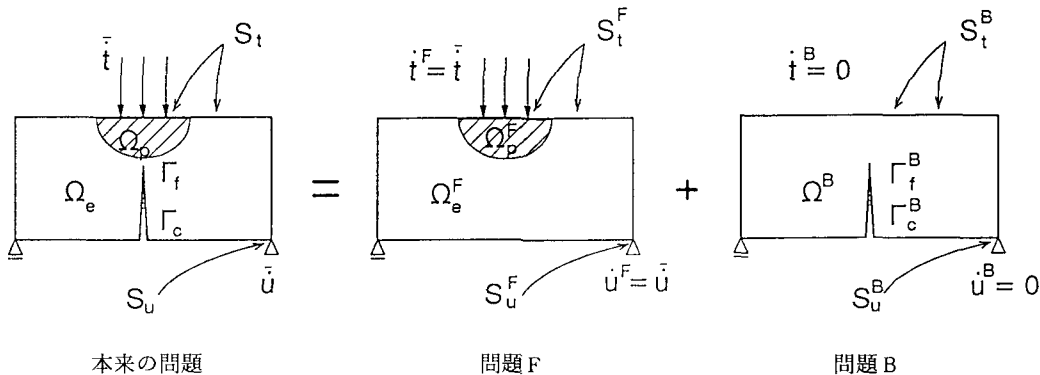


図-1 重ね合わせ解析法の基本概念

問題F

$$\dot{\sigma}_{ij,j}^F = 0 \quad : \text{釣合式} \quad (8)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^F = D_{ijkl}^{ep} \dot{\epsilon}_{kl}^F + D_{ijkl}^p \dot{\epsilon}_{kl}^B \quad : \text{構成則} \quad (9)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^F = (\dot{u}_{i,j}^F + \dot{u}_{j,i}^F)/2 \quad : \text{ひずみ-変位関係}$$

$$\bar{t}_i = \dot{\sigma}_{ij}^F n_j \quad : \text{一般境界 } S_t^F \text{ での応力境界条件} \quad (10)$$

$$\bar{u}_i = \dot{u}_i^F \quad : \text{一般境界 } S_u^F \text{ での変位境界条件} \quad (11)$$

問題B

$$\dot{\sigma}_{ij,j}^B = 0 \quad : \text{釣合式} \quad (12)$$

$$\dot{\sigma}_{ij}^B = D_{ijkl}^e \dot{\epsilon}_{kl}^B \quad : \text{構成則} \quad (13)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij}^B = (\dot{u}_{i,j}^B + \dot{u}_{j,i}^B)/2 \quad : \text{ひずみ-変位関係}$$

$$0 = \dot{\sigma}_{ij}^B n_j \quad : \text{一般境界 } S_t^B \text{ での応力境界条件} \quad (14)$$

$$0 = \dot{u}_i^B \quad : \text{一般境界 } S_u^B \text{ での変位境界条件} \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{t}_i^{+B} + \dot{t}_i^{-B} &= 0 \\ \dot{t}_i^{+B} - \dot{t}_i^{-B} + 2\dot{t}_i^{+F} &= 0 \end{aligned} \right\} : \text{ストレスフリークラック } \Gamma_c^B \text{ での境界条件} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{t}_i^{+B} + \dot{t}_i^{-B} &= 0 \\ \dot{t}_n^{+B} - \dot{t}_n^{-B} + 2\dot{t}_n^{+F} &= -2s(\dot{u}_n^{+B} - \dot{u}_n^{-B}), \quad \dot{t}_i^{+B} - \dot{t}_i^{-B} + 2\dot{t}_i^{+F} = 0 \end{aligned} \right\} : \text{フラクチャープロセスゾーン } \Gamma_t^B \text{ での境界条件} \quad (17)$$

弾塑性体の接線剛性 D_{ijkl}^{ep} は弾性挙動に関するものと塑性挙動に関するものと和で表される²⁾。前者が式(13)における D_{ijkl}^e 、後者が式(9)における D_{ijkl}^p であり、 $D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^e + D_{ijkl}^p$ が成り立つ。弾性領域においては、 $D_{ijkl}^p = 0$ となる。

上式より明らかなように、2つの境界値問題F、Bの解を足し合わせて得られる場の変数は、本来の問題の支配方程式、境界条件をすべて満足し、その解となる。また、材料非線形は問題F、クラックは問題Bで扱われるため、有限要素法および境界要素法の長所を生かした解析が可能となっている。

以下では、問題F、Bをそれぞれ有限要素法、境界要素法で解析するための定式化を示す。ただし、これらの定式化自体は特別なものでないため、その詳細については割愛し、簡潔な記述にとどめる。式(9)、(16)、(17)から理解されるように、この2つの問題F、Bは独立でなく、連立して解く必要がある。その解法につ

いては、最後に記述する。

(2) 問題 F

後に示すように、問題 B におけるひずみ速度 $\dot{\epsilon}^B$ は境界要素の節点量 $\dot{U}^{*B}$ と線形関係にある。境界値問題 F に有限要素法を適用し、このことを利用すれば、次の線形方程式が得られる。

$$K \dot{U}^F + Q \dot{U}^{*B} = \dot{F}^F \quad (18)$$

ここに K は剛性マトリックス、 $\dot{U}^F$ は節点変位速度、 $\dot{F}^F$ は等価節点力速度であり、 $Q \dot{U}^{*B}$ は問題 B との連成項になっている。境界要素法により得られる問題 B の方程式と合成する際の便宜上、式 (18) を次のように書き改める。

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{U}_u \\ \dot{U}_t \\ \dot{U}_r \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \dot{U}^{*B} = \begin{Bmatrix} \dot{F}_u \\ \dot{F}_t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

ここに、下付き添字 u は変位が与えられた境界上の節点、 t は荷重が与えられた境界上の節点、 r はその他の節点に関する量であることを示す。

式 (16), (17) からわかるように、問題 B のクラック位置における表面力速度 $\dot{t}^{+F}$ を求める必要があり、そのためにはこの位置での応力速度 $\dot{\sigma}^F$ を計算しなければならない。通常の解析では、着目点が位置する要素の節点変位速度からひずみ速度を求め、それから応力速度を算出するが、このような方法で求めたひずみ速度や応力速度の精度は要素内で一定とはならない⁹⁾。例えば、4 節点四角形要素の場合、図心位置での精度が最も良く、他の点での精度はこれに劣る。本解析法ではこの応力速度の精度が解析精度に大きな影響を及ぼすため、精度よい応力速度の評価が必要となるが、高精度の点と応力速度を求める点とを常に一致させることには無理がある。そこで本研究では、まず各要素内の高精度の点でひずみ速度を算出し、これをもとにプロジェクション法⁴⁾で応力速度を計算することとした。この場合、任意点の応力速度 $\dot{\sigma}^F$ は全節点変位速度から求められることになり、表面力速度 $\dot{t}^{+F}$ は次の線形式で表される。

$$\dot{t}^{+F} = P \dot{U}^F \quad (20)$$

問題 F では、ガウス積分により要素剛性マトリックスを求める。そのため、各積分点で応力を算出する必要があり、その際にも上述のプロジェクション法を用いた手法で計算を行う。

(3) 問題 B

基本的には、問題 B はクラックを有する弾性体の解析である。境界要素法でこの問題を解析する場合、Horii¹⁰⁾ が定義した境界量を用いて定式化すれば、次のような線形方程式が得られる。

$$H \dot{U}^{*B} = G \dot{T}^{*B} \quad (21)$$

ここに

$$\dot{U}^{*B} = \begin{Bmatrix} \dot{T}_u^B \\ \dot{U}_t^B \\ (\dot{U}^{+B} - \dot{U}^{-B})_c \\ (\dot{U}^{+B} + \dot{U}^{-B})_c \\ (\dot{U}^{+B} - \dot{U}^{-B})_t \\ (\dot{U}^{+B} + \dot{U}^{-B})_{tn} \\ (\dot{U}^{+B} + \dot{U}^{-B})_{tt} \end{Bmatrix}, \quad \dot{T}^{*B} = \begin{Bmatrix} \dot{U}_u^B \\ \dot{T}_t^B \\ (\dot{T}^{+B} + \dot{T}^{-B})_c \\ (\dot{T}^{+B} - \dot{T}^{-B})_c \\ (\dot{T}^{+B} + \dot{T}^{-B})_t \\ (\dot{T}^{+B} - \dot{T}^{-B})_{tn} \\ (\dot{T}^{+B} - \dot{T}^{-B})_{tt} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

$()_c, ()_t, ()_{tn}, ()_{tt}$ は、それぞれストレスフリークラック、フラクチャープロセスゾーン、フラクチャープロセスゾーンでの n, t 方向に関する量であることを意味しており、 $\dot{U}, \dot{T}$ はそれぞれ節点変位速度、節点表面力速度を表している。

領域内の任意点（内点）でのひずみ速度と境界値は積分表示式で関係づけられ¹⁰⁾，境界要素法では次のような線形式で節点量と結びつけられる。

$$\dot{\epsilon}^B = R \dot{T}^{*B} - E \dot{U}^{*B} \quad (23)$$

上式と式(21)を用いれば，式(18)の誘導に必要な次式が得られる。

$$\dot{\epsilon}^B = (R G^{-1} H - E) \dot{U}^{*B} \quad (24)$$

ところで， $\dot{T}^{*B}$ には境界条件に関連したもののみを集めており，式(14)～(17)を用いれば，次のように書き直せる。

$$\dot{T}^{*B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2\dot{T}_c^{+F} \\ 0 \\ -2\dot{T}_{tn}^{+F} - 2s(\dot{U}^{+B} - \dot{U}^{-B})_{tn} \\ -2\dot{T}_{tt}^{+F} \end{Bmatrix} \quad (25)$$

この式からわかるように， $\dot{T}^{*B}$ は $\dot{U}^{*B}$ の成分の一部を含んでいる。この点に留意して式(21)を整理し，さらに式(20)を用いれば，次式が得られる。

$$\tilde{H} \dot{U}^{*B} = \tilde{G} P \dot{U}^F = \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_u \\ \dot{U}_t^F \\ \dot{U}_r^F \end{Bmatrix} \quad (26)$$

(4) 解法

式(19)，(26)は $\dot{U}_t^F$ ， $\dot{U}_r^F$ ， $\dot{U}^{*B}$ を未知量とする方程式であり，連立して解く必要がある。ここでは，両式から $\dot{U}_t^F$ ， $\dot{U}_r^F$ を消去し， $\dot{U}^{*B}$ のみに関する連立1次方程式を導く。そのために，まず式(19)より次式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \dot{U}_t^F \\ \dot{U}_r^F \end{Bmatrix} = \bar{B} - \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \dot{U}^{*B} \quad (27)$$

ここに

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{Bmatrix} \bar{F}_t \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{31} \end{bmatrix} \bar{U}_u \right\} \quad (28)$$

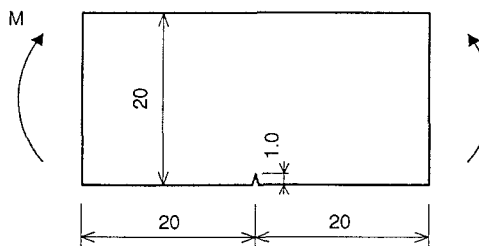
これを式(26)に代入すれば，次に示す $\dot{U}^{*B}$ に関する連立1次方程式を得る。

$$A \dot{U}^{*B} = \begin{bmatrix} L_{11} \\ L_{21} \\ L_{31} \end{bmatrix} \bar{U}_u + \begin{bmatrix} L_{12} & L_{13} \\ L_{22} & L_{23} \\ L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \bar{B} \quad (29)$$

ここに

$$A = \tilde{H} + \begin{bmatrix} L_{12} & L_{13} \\ L_{22} & L_{23} \\ L_{32} & L_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix} \quad (30)$$

本研究では式(29)を解いて $\dot{U}^{*B}$ を求め，続いて式(27)より $\dot{U}_t^F$ ， $\dot{U}_r^F$ を計算する。式(20)，(24)等を用いれば，応力速度，ひずみ速度等はすべて算出できる。



THICKNESS = 1 (DIMENSIONS: cm)

図-2 曲げモーメントを受ける矩形板

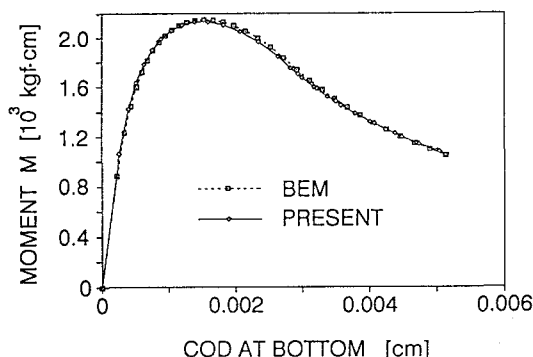


図-3 荷重-開口変位曲線

3. 数値解析例

本解析法の妥当性、有効性を検証するために、数値解析を行った。ここでは、問題Fに4節点四角形要素、問題Bには一定要素を用いた。

(1) 曲げモーメントを受ける矩形板

片側にノッチを有する矩形板に曲げモーメントが作用する場合の解析を行った(図-2)。材料定数として、ヤング率 $3.0 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 0.2、引張強度 31.1 kgf/cm^2 を仮定した。引張軟化曲線は直線とし、開口変位が 0.0025 cm に達したときストレスフリークラックが進展するものとした。この解析では、圧縮応力下での弾塑性挙動は考慮に入れず、弾性体として扱った。このため、式(9)に見られる問題F、Bの連成はこの場合には存在せず、式(16)、(17)でのみ関連している。

問題Fには 110 要素、問題Bには 126 要素を用いて計算し、同時に解析精度を検討するため、187 要素を用いた境界要素法による解析も行った。なお、問題Bおよび境界要素法解析の要素数は初期状態におけるもので、クラックの進展に伴いその数は増加する。計算結果として曲げモーメントMとノッチ端での開口変位(COD)の関係を図-3に示している。この図から明らかなように、両者の結果はよく一致しており、コンクリートのクラック問題における本解析法の妥当性が理解される。また、ここでの解析結果によれば、最大荷重に達する前の非線形挙動はフラクチャープロセスゾーンの進展によっており、ストレスフリークラックの進展は最大荷重到達後によく見られるに過ぎなかった。

有限要素法を用いたコンクリートのクラック進展解析に関しては非常に多くの研究がなされている。その際によく用いられる手法を大別すれば、discrete-cracking model と smeared-cracking model になる¹⁾。前者は要素を切り離すことによりクラックを表現する手法であるが、クラックの進展方向が要素分割により制約を受けるという欠点があり、十分な精度の解を得るにはクラックの進展に伴い要素の再分割を行う必要がある¹⁾。後者は、構成式の中にクラックの挙動を取り込むもので、非常に簡便な方法ではあるが、クラック面でも変位の連続性を仮定しているため、stress-locking の問題を生じることが指摘されている²⁾。図-4には問題Fで用いた要素分割を示している。本解析では、クラック長にかかわらずこの要素分割を用いることができ、またクラックは問題Bの境界要素法で取り扱っているため、stress-locking の問題も生じない。

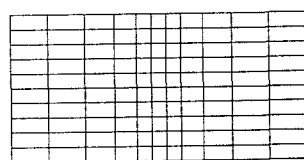
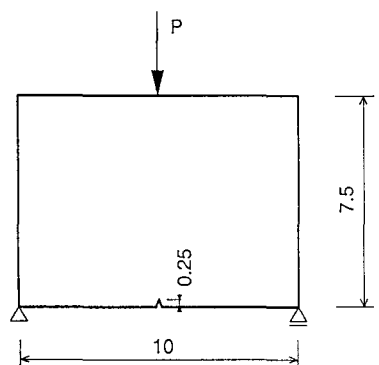


図-4 要素分割(問題F)

(2) 集中荷重を受ける矩形板

下縁に小さなノッチを有する矩形板に集中荷重が作用する場合の解析を次に行った(図-5)。先の例題と同じ材料定数を用いたが、限界開口変位は 0.5 cm とした。またここでは、圧縮応力下での弾塑性挙動も



THICKNESS = 1 (DIMENSIONS: cm)

図-5 集中荷重を受ける矩形板

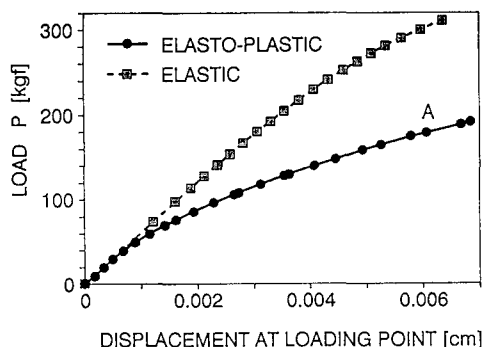


図-6 荷重-変位曲線

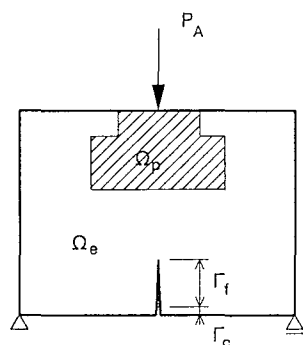


図-7 変形状態Aでの塑性領域

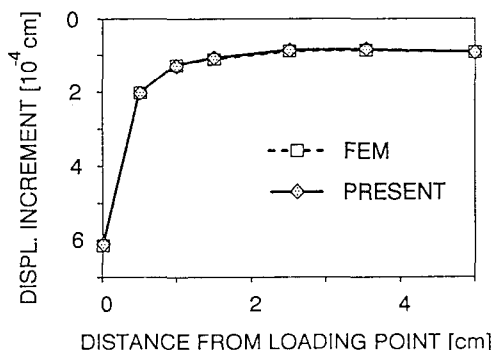


図-8 変形状態Aからの変位増分

考慮に入れた。簡単のため、降伏関数には von Mises モデルを用い、一軸圧縮応力下での初期降伏応力を 40 kgf/cm^2 、圧縮強度 130 kgf/cm^2 、それに対応する圧縮ひずみ 0.006 を仮定した。一軸圧縮応力下での応力-ひずみ関係は、初期降伏から圧縮強度に達するまでは2次関数で表され、その後は完全塑性体の挙動をするものとした。この数値解析例の目的は、クラックを有する弾塑性体問題への適用性の検証にある。このため、実際のコンクリートより弾塑性挙動が起こりやすい材料定数を設定している。

問題Fには 192 要素、問題Bには 95 要素を用いて解析し、計算結果として載荷点における荷重Pと鉛直変位の関係を図-6に示している。参考のため、この図には弾性解析の結果も示しているが、これより、大きな塑性変形のあることが理解される。実際、図-7に示す変形状態A(図-6参照)での塑性領域はかなり大きなものとなっている。

本解析法の妥当性を検討するため、変形状態Aにおいて荷重を 10 kgf 増加させたときに生じる変位増分を有限要素法で計算した。その際には、問題Fと同じ要素分割を用い、フラクチャプロセスゾーンには伝達されるべき表面力増分を外力として与えた。その計算結果を本解析法による結果とともに、図-8に示している。これは上縁に沿った鉛直変位増分分布であるが、2つの解析結果は互いによく一致しており、弾塑性挙動を生じた場合についても本解析法は有効であることが理解される。

4. おわりに

有限要素法と境界要素法の重ね合わせによる線形弾性体の解析法⁷⁾を發展させ、コンクリート構造の解析にも適用できる数値解析法を開発した。弾塑性挙動とクラックの扱いがここでのポイントであり、本論文では定式化を示すとともに例題を解き、その有効性を検証した。

本解析法では、弾塑性挙動は有限要素法、クラックは境界要素法と役割分担を明確にした上で重ね合わせを行い、本来の問題の解を求める。この分担は、これら2つの数値解析法の長所を生かし、短所を補うものとなっている。本解析法は、材料非線形とクラック進展の両方が重要な問題に対して有効であり、非常に有力なコンクリート構造の数値解析法である。

参考文献

- 1) ASCE Committee on Concrete and Masonry Structures: A state-of-the-art report on finite element analysis of reinforced concrete, Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures, ASCE Spec. Publ., 1981.
- 2) Chen, W.F.: Plasticity in Reinforced Concrete, McGraw-Hill, 1982.
- 3) 土木学会構造工学委員会構造力学小委員会破壊力学分科会: 土木工学における破壊力学の適用性, 土木学会論文集, 第380号/1-7, pp.13-26, 1987年.
- 4) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method, 4th ed., Vol.1, McGraw-Hill, 1989.
- 5) ブレビア, C.A. (神谷紀生 他 共訳): 境界要素法, 培風館, 1980年.
- 6) 小林昭一: 有限要素法, 境界要素法, 個別要素法の用途, 土と基礎, Vol.40, No.2, pp.66-67, 1992年.
- 7) 板屋英治・山口栄輝・堀井秀之: 有限要素法と境界要素法の重ね合わせに基づく数値解析手法, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.38A, pp.325-332, 1992年.
- 8) 北川浩: 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1979年.
- 9) Barlow, J.: Optimal stress locations in finite element models, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol.10, pp.243-251, 1976.
- 10) Horii, H.: BIEM for crack problems and application to fracture process zone in concrete, ceramics and rock, Proceedings of First Joint Japan/U.S. Symposium on BEM, Tokyo, 1988.
- 11) Ingraffea, A.R. and Saouma, V.: Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete, Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation, G.C. Sih and A. DiTomasso, eds., Martinus Nijhoff, Dordrecht, pp. 171-225, 1985.
- 12) Rots, J.G. and Blaauwendraad, J.: Crack models for concrete: Discrete or smeared? Fixed, multi-directional or rotating? Heron, Vol.34, No.1, 1989.

(1992年9月21日受付)