

スカイライン法を用いた弧長法について

AN ARC-LENGTH METHOD COUPLED WITH SKYLINE METHOD

山口栄輝*, プンタラ S.G.** , 西野文雄***

By Eiki YAMAGUCHI, Buntara S.G., Fumio NISHINO

The most powerful method for tracing a general equilibrium path appears to be an arc length method. For this method, the distance between two solution points in the load/displacement space is specified as a control parameter. To this end, the constraint equation is provided in addition to the governing equilibrium equations. For solving this set of nonlinear equations, the Newton-Raphson method may be used. However, its direct application would result in the tangent equations that are neither symmetric nor banded. Because of this, an alternative indirect procedure, though not particularly efficient, has been utilized.

The present study proposes an efficient and straightforward way to apply the Newton-Raphson method directly to the arc-length method. The effective use of this procedure is also discussed.

1. はじめに

非線形挙動する構造物を変位成分の自由度が n の系に離散化した場合、支配方程式は n 個の非線形連立方程式で表される。比例载荷を考えると、この方程式は n 個の変位成分に荷重強度を加えた $(n+1)$ 個の変数を有することになる。その解は、 $(n+1)$ 次元空間における曲線で表され、釣合径路と呼ばれる。解法としては、変数の 1 個に値を与え、それに対する残り n 個の変数の値を計算して釣合点を求めるという手法がよく用いられている。例えば、荷重強度を与えて変位成分を計算する手法は荷重増分法、変位成分の 1 つを与え、残りの変位成分および荷重強度を求める手法は変位増分法として知られている¹⁾。

ところで、釣合径路は必ずしも全ての変数が単調に増加あるいは減少する方向に延びるものではない。例えば、snap-through が起こる場合、荷重強度はある値まで増加した後、減少する。また snap-back が起こる場合には、増加していた変位成分がある釣合点を境に減少し始める。このような挙動に荷重増分法や変位増分法を適用した場合、制御変数の値を巧みに制御しない限り、釣合径路の一部が求められないといった不都合を生じることになる。このため、より一般的な釣合径路追跡手法として弧長法が提案され、国内外で広く用いられている²⁾⁻¹⁰⁾。

弧長法では、求めようとする次の釣合点までの距離(弧長)を規定することにより、支配方程式である非線形連立方程式を解き、釣合径路上の点を次々と求めていくことになる。この手法では、各段階において、

* Ph.D. 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

** 工修 東京大学大学院生 工学系研究科土木工学専攻 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

*** Ph.D. 東京大学教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

n 個の支配方程式に弧長を規定する新たな制約式（弧長制御式）を加えた $(n+1)$ 個の非線形連立方程式を $(n+1)$ 個の未知数について解くことになる。

非線形の有限要素解析では、ニュートン・ラプソン法がよく用いられる。しかしながら、後に詳述するように、弧長法にこの数値解法を適用した場合、連立1次方程式の係数行列の対称性やバンド形といった有限要素法の特長が失われ、何らかの対策を講じない限り、計算効率の非常に悪い解法となってしまう。しかし著者らの知る限り、その対策法に関しては Chrisfield の提案^{5), 7)}があるに過ぎず、Ziekiewicz らによる「The Finite Element Method」の最新版¹¹⁾にも、弧長法の項には彼の計算法のみが紹介されている。彼の計算法は係数行列の対称性やバンド形を保持することを目的に、ニュートン・ラプソン法の直接適用を避けた代替手法であり、その計算手順は一般の非線形解法のアルゴリズムとはかなり異なっている。そのため、これをもとに既存の有限要素法プログラムに弧長法を導入しようとする、相当の手間が必要となる。さらに、係数行列を各反復計算ごとに更新したところで、収束速度はニュートン・ラプソン法に比べると劣り、必ずしも最良の手法とは思われない。

ところで、対称性やバンド形の喪失は弧長制御式によるものである。すなわち、 $(n+1)$ 個の方程式のうち、ただ1個の方程式がこの問題を引き起こしている。本研究ではこの点に着目し、連立1次方程式の解法にスカイライン法を用いれば、接線剛性行列の対称性やバンド形といった性質を最大限に利用しつつ、弧長法にニュートン・ラプソン法を直接適用できることを示す。さらに、この計算法を効率よく運用する方法についても、数値解析例により検討を加える。

2. 弧長法による構造解析

非線形挙動する構造物を有限要素法で離散化した場合、支配方程式は一般に次のように表せる。

$$K(U) = fF \quad (1)$$

ここに、 K は内力ベクトル、 U は節点変位ベクトル、 f は荷重強度、 F は基準荷重ベクトルを表している。変位の自由度が n の系の場合、式(1)は荷重強度および n 個の変位を変数とする n 個の非線形方程式となる。

ある釣合点 p が得られており、次の釣合点 $(p+1)$ を求める場合、弧長法では点 p から点 $(p+1)$ までの弧長 $\Delta S_{(p+1)}$ を規定し、次の弧長制御式を導入する。

$$A^2 = (\Delta S_{(p+1)})^2 \quad (2)$$

ここに、

$$A^2 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 (U_i - U_{i(p)})^2 + (\alpha_f)^2 (f - f_{(p)})^2 \quad (3)$$

式(3)において、 α_i 、 α_f は任意の定係数、 $U_{i(p)}$ 、 $f_{(p)}$ は点 p での変位、荷重強度を示している。

弧長法と称するものの中には、釣合径路の接線上で $\Delta S_{(p+1)}$ だけ離れた点において、この接線と直交する平面を考え、その平面上にある釣合点を次の解として求めるものもある^{4), 6)}。その場合、式(2)の弧長制御式に対応するものは線形式となるが、釣合径路の曲率が大きいところでは不都合な状態が生じ、一般性にかけるきらいがある。そのため、ここでは式(2)をそのまま用い、それによる解法を弧長法と呼ぶ。

弧長法では、式(1)の支配方程式と式(2)の弧長制御式からなる $(n+1)$ 個の非線形連立方程式を、荷重強度 f と n 個の変位 U_i について解き、 $(n+1)$ 次元空間における次の釣合点 $(p+1)$ の位置を求めることになる。

3. ニュートン・ラプソン法による解法

非線形連立方程式である式(1)、(2)を解析的に解くのは困難であり、ここでは、この種の問題の代表的な数値解法であるニュートン・ラプソン法を用いて解くことを考える。ちなみに、ニュートン・ラプソン法は

反復計算による解法であり、唯一2次の収束速度を保障された、最も収束性のよい数値解法である¹¹⁾。

簡単のため、式(1)、(2)をまとめて次のように表記する。

$$L(a) = 0 \quad (4)$$

ここに、

$$L = \begin{Bmatrix} K - fF \\ A^2 - (\Delta S_{(p+1)})^2 \end{Bmatrix}; \quad a = \begin{Bmatrix} U \\ f \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ニュートン・ラプソン法の反復計算では、式(4)を線形化して得られた連立1次方程式を用いる。この場合、連立1次方程式は次のように表される。

$$L_T(a^{(i)}) \delta a^{(i)} = -L(a^{(i)}) \quad (6)$$

ここに、

$$L_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial U} & -F \\ \frac{\partial A^2}{\partial U} & \frac{\partial A^2}{\partial f} \end{bmatrix} \quad (7)$$

上付き添字(i)は、i回目の反復計算における値であることを示す。特に、 $a^{(1)}$ は初期値を意味している。 L_T は連立1次方程式の係数行列であり、式(6)は $\delta a^{(i)}$ について解かれる。 $\delta a^{(i)}$ はi回目の反復計算による修正量ベクトルであり、これを用いて a は次のように更新される。

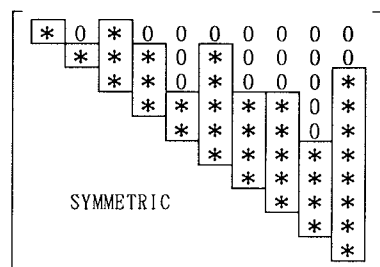
$$a^{(i+1)} = a^{(i)} + \delta a^{(i)} \quad (8)$$

ニュートン・ラプソン法では式(6)を解き、式(8)を用いて a を更新するという計算過程を収束値が得られるまで反復する。

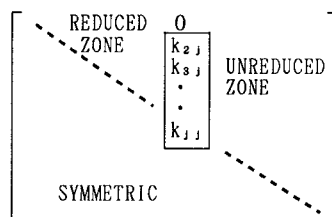
4. スカイライン法の適用

式(7)の係数行列 L_T の一部である $(\partial K / \partial U)$ がいわゆる接線剛性行列である。この行列は $n \times n$ の正方行列で、係数行列 L_T の大部分を占める。また弧長法以外の一般の有限要素解析では、接線剛性行列そのものが係数行列となる。有限要素法の特色として、解析に際して計算機内で必要となる記憶領域の大半を係数行列が占め、また連立1次方程式の解法が総計算時間の多くを占めることが挙げられる。このことは、計算に必要な記憶容量や計算時間を大幅に減少し計算効率を高めるには、接線剛性行列の取り扱いが重要であることを意味している。ところで、接線剛性行列には一般に疎、対称、バンド形といった特性がある。このため、このような特性を利用した接線剛性行列の記憶法、連立1次方程式の解法の研究が従来より活発になされてきた¹⁾。こうした計算手法のうち、最も基本的で、かつよく知られたものにバンド・マトリックス法¹⁾があり、簡単なわりに能率がよいため、小、中規模の問題に関しては最もよく利用されている。しかし、式(7)からわかるように、弧長法の係数行列 L_T には対称、バンド形といった特性がなく、バンド・マトリックス法を式(7)の解法に用いることはできない。このため、Chrisfield は式(4)にニュートン・ラプソン法を直接適用することを避けた代替手法を提案している^{5), 7)}。しかし、その手法はニュートン・ラプソン法に比較すると収束性がかなり劣るため、その点を改善する手法についても提案し検討することが必要となっている。

ところで、係数行列 L_T の対称性、バンド形の喪失は、第 $(n+1)$ 番目の行と列によるものである。係数行列 L_T の残りの部分は接線剛性行列であり、当然のことながら、対称、バンド形といった特性を有している。すなわち、係数行列 L_T の大半を占めるサブマトリックスにおいて対称性、バンド形は保持されており、もしその特性を十分に生かすことのできる解法が存在すれば、ニュートン・ラプソン法を弧長法に直接



(a) アクティブコラム



(b) 三角分解の計算過程

図-1 スカイライン法

適用しても十分に計算効率のよい解析は行えることとなる。

有限要素法における連立1次方程式の解法には多くのものが提案されているが、その中の一つにスカイライン法がある。これもよく知られた解法で、例えば文献12)に紹介されている有限要素解析のプログラムFEAPにも採用されており、詳細な解説も加えられている。

スカイライン法は、三角分解を実行する消去法に基づく連立1次方程式の解法であるが、図-1(a)に示すように、各列の最初の零を除いた部分のみを記憶して計算を行う点に特徴がある。スカイラインとは都市建築物などの空に接する輪郭線のことで、係数行列の記憶される部分の形状がそれに似ていることからこのように命名されている。この解法では、三角分解を行ってもスカイライン構造の外部に非零の項が現れることはない。このため、スカイライン内

に入る部分、すなわちアクティブコラムを順に並べて1次元的に配列でき、しかも求解中もそれ以上の記憶容量を必要とせず、記憶領域の節約が行え、計算時間も少なくなる。さらに、三角分解の計算過程は、第1番目の列から各列ごとに順に行われる。すなわち、第j番目の列を対象に三角分解を行う場合、第1番目から第(j-1)番目までの列についてはすでにこの作業は終了しており、また第(j+1)番目の列以降については元の値を有していることになる(図-1(b))。

スカイライン法により式(6)を解くことを考える。この場合、係数行列 L_r の第(n+1)番目の行と列については対称性が成立しないため、図-2に示す部分を記憶する必要がある。しかしながら、先にも述べたように、この解法では三角分解の際にこれ以外の部分に非零項が現れることはなく、式(6)の求解中にこれ以上の記憶領域を必要とすることはない。また三角分解の作業は第1番目の列から各列ごとに順次行われるため、係数行列 L_r の大部分を占める接線剛性行列の疎、対称、バンド形といった特性を十分に生かすことのできる解法となっている。ただ第(n+1)番目の列については、対称でないために特別の考慮を要する。しかし、非関連流動則に基づく弾塑性解析などでは接線剛性行列自体が非対称になることもあり、そのような特別な場合におけるスカイライン法の計算式も文献12)には与えられており、第(n+1)番目の行および列の取り扱いについても特に困難はない。本研究で用いたプログラムは、対称な接線剛性行列を対象としたスカイライン法のソルバーをもつ有限要素解析プログラムをもとに開発したが、その修正は対称にならない第(n+1)番目の部分を取り扱うための機能の付加が主で、ソルバーのサブルーチンには20行程度の書き足しを行ったに過ぎない。

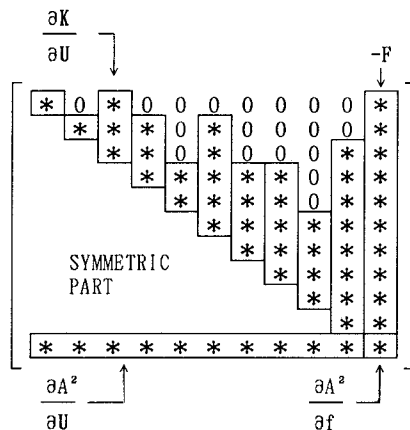


図-2 弧長法でのアクティブコラム

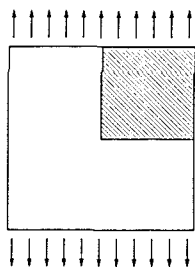
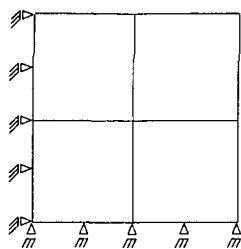
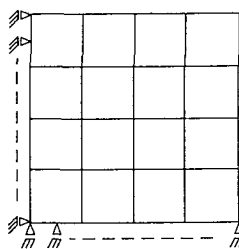


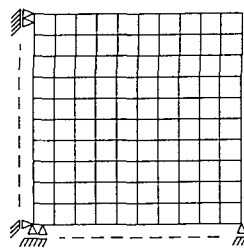
図-3 矩形板



(a) 分割 I



(b) 分割 II



(c) 分割 III

図-4 要素分割図

表-1 記憶する係数の個数

要素分割	自由度 n	スカイ ライン法	弧長法での 追加分	フルマト リックス
I	32	360	65	1024
II	112	2428	225	12544
III	640	33256	1281	409600

このように、スカイライン法を適用すれば、ニュートン・ラプソン法を弧長法に直接適用しても接線剛性行列の疎、対称、バンド形といった特性を十分に利用でき、また弧長法の導入に伴うプログラムの変更もわずかで済む。この計算法では、接線剛性行列より一回り大きな係数行列を取り扱う

必要が生じるが、接線剛性行列が係数行列 L_T の大部分を占めることを考えれば、係数行列の拡大は大きな問題にはならないと思われる。この点を検証するため、図-3 に示す単純引張を受ける弾性矩形板を8節点の四辺形セレンディピティ要素で解析した。対称性により、斜線で示した $1/4$ 領域のみを解析対象とし、3つの異なる要素分割を考えた(図-4)。それぞれの要素分割に対して、接線剛性行列をスカイライン法で取り扱う際に記憶すべき係数の個数を算出し、弧長法を用いたときに追加して記憶する必要のある係数の個数とともに表-1 にまとめている。また参考のため、接線剛性行列の成分数も示している。この表より明らかなように、弧長法を用いたことによる記憶領域の増加率は、系の自由度 n の増加に伴い減少し、 n が 640 となる分割 III においては、わずか 3.9% となる。弧長法では、弧長制御式の導入に伴い 1 個多くの方程式を扱うことになるが、記憶すべき係数の増加率からもわかるように、それによる計算時間の増加は大きな問題ではない。すなわち、1 回の反復計算に要する計算時間に関しても、ここで提案している計算法が Chrisfield の計算法に比べて大きく劣るとは思われない。また表-1 よりスカイライン法の有用性も確認できる。すなわち、対称性等を全く考慮に入れずフルマトリックスとして係数行列 L_T を記憶する場合に比べれば、スカイライン法を用いることにより記憶容量は大幅に節約できる。節約の度合いは n の増加とともに高まり、分割 III の場合には、90% 以上の節約となる。これより、何ら工夫を施さず、係数行列 L_T をフルマトリックスとして取り扱えば、計算効率を著しく低下させることが理解される。スカイライン法による記憶領域節約の程度は個々の問題により異なるが、一般に、係数行列 L_T が対称でないことを理由に、これをフルマトリックスとして扱うことは、計算効率の観点からして容認できるものではない。

以上の議論より明らかなように、スカイライン法を用いれば、ニュートン・ラプソン法を弧長法に直接適用しても係数行列の記憶や連立 1 次方程式の解法において、計算効率や経済性を損ねることはない。ニュートン・ラプソン法の収束性のよさやアルゴリズムの明快さを考慮に入れたとき、本計算法は Chrisfield の提案する計算法より明らかに優れていると思われる。ところで、式(5)においては、弧長制御式を第 $(n+1)$ 番目の方程式としている。特に断りはしなかったが、実はこれはここで提案している計算法における重要ポイントであり、他の位置に弧長制御式を配置すると、計算効率に関するここでの議論は無効になるので注意を要する。

5. 初期値設定法

ニュートン・ラフソン法では、反復計算を始める際の初期値がその収束性に大きな影響を及ぼす。よく用いられる初期値は前段階での解である。本計算法で言えば、これは釣合点 p での値に相当する。

式(6)の係数行列 L_T の第 $(n+1)$ 番目の行を陽な形で書き表すと次のようになる。

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial A^2}{\partial U} & \frac{\partial A^2}{\partial f} \end{bmatrix} = [2(\alpha_1)^2(U_1 - U_{1(p)}) \dots 2(\alpha_n)^2(U_n - U_{n(p)}) \ 2(\alpha_r)^2(f - f_{(p)})] \quad (9)$$

釣合点 p での値を初期値として用いると、上式のすべての成分が零になる。これは、式(6)の連立1次方程式において第 $(n+1)$ 番目の式のすべての係数が零になることを意味しており、この連立1次方程式の解は存在しなくなる。したがって、本計算法では釣合点 p での値を初期値として用いることはできず、初期値を設定するための手法を準備する必要がある。

有限要素解析における初期値設定法についてはいくつかの提案がなされている。これらのうち、ここでは計算量の比較的少ないものを取り上げ、数値計算を行うことにより検討を加える。以下では、本研究で考慮する初期値設定法について簡単に説明する。

弧長法における初期値設定法としてよく用いられる方法に、釣合径路の接線上で弧長制御式を満足する点を初期値とする方法がある^{8), 10), 13)}。この方法では、まず次式により基準変位ベクトル U_b を求める。

$$U_b = \left[\frac{\partial K}{\partial U} \right]^{-1} F \quad (10)$$

このベクトルを用いれば、初期値は次のように表される。

$$U_{(p+1)}^{(1)} = U_{(p)} + (f_{(p+1)}^{(1)} - f_{(p)})U_b \quad (11)$$

この式における荷重強度の初期値 $f_{(p+1)}^{(1)}$ は、弧長制御式を満足するという条件より次のように決定される。

$$f_{(p+1)}^{(1)} = f_{(p)} \pm \frac{\Delta S_{(p+1)}}{\left\{ \sum_{i=1}^n (\alpha_i)^2 U_{b,i}^2 + (\alpha_r)^2 \right\}^{1/2}} \quad (12)$$

上式の右辺第2項の符号は、釣合径路を後戻りしないように決める必要がある。

すでに求めた釣合点を外挿することにより次の釣合点を推測し、その点を初期値として設定することも可能である。最も簡単な方法は1次式による外挿であり、この場合には釣合点 $(p-1)$ および釣合点 p を用いて次式により初期値を定めることとなる。

$$\begin{Bmatrix} U_{(p+1)}^{(1)} \\ f_{(p+1)}^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} U_{(p)} \\ f_{(p)} \end{Bmatrix} + \frac{\Delta S_{(p+1)}}{\Delta S_{(p)}} \begin{Bmatrix} U_{(p)} - U_{(p-1)} \\ f_{(p)} - f_{(p-1)} \end{Bmatrix} \quad (13)$$

高次の多項式を用いた外挿により初期値を決定することも考えられる。しかし、その場合、よりよい初期値が期待できるものの計算時間も増加し、あまり高次の多項式を用いるとかえって不経済になる。そこで、本研究では3次の多項式を用いた外挿を試みることにした。

以下では簡単のために、これらの手法を次のように設定法(a)～(c)と称することにする。

設定法(a)：基準変位ベクトル U_b を用いる方法

設定法(b)：1次関数を用いた外挿による方法

設定法(c)：3次関数を用いた外挿による方法

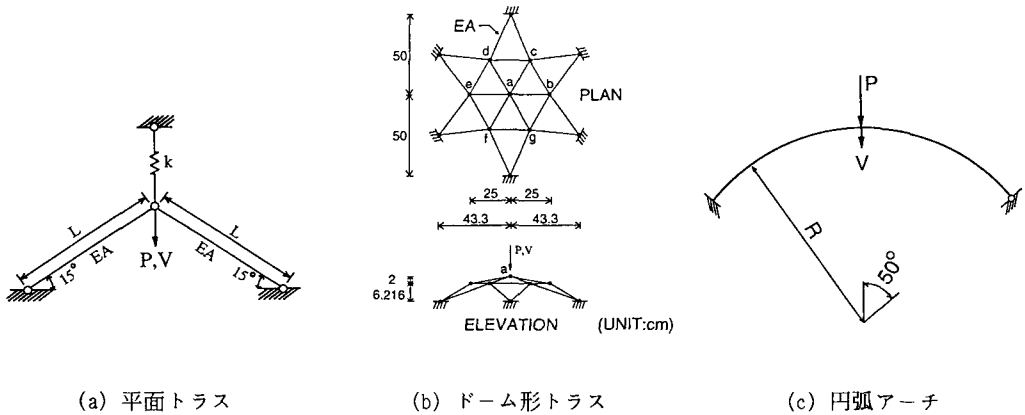


図-5 解析対象構造物

6. 初期値設定法の比較

設定法(a)～(c)を比較するために、弾性棒材の有限変位解析を行った。定式化は文献14)の更新ラグランジェ手法によっており、その詳細についてはここでは割愛する。すべての解析において、2節点のトラス要素ないし梁要素を用いており、主釣合径路のみを求めた。

式(2)の弧長制御式の係数は、変位と荷重強度の両方の影響を反映するように定める必要がある。ここでは、変位にかかるすべての係数 α_i を単位の値とした上で、初期状態での線形解析結果をもとに、 $\alpha_i |f| = \max |U_i|$ となるように α_i を定めた。また簡単のため、弧長は各解析において一定値をとるものとし、反復計算においては、次式を収束判定条件とした。

$$\frac{|\delta a^{(i)}|}{|a^{(i+1)}|} \leq 10^{-6} \quad (14)$$

なお、使用した計算機はエンジニアリング・ワークステーションの NEWS NWS-3860 である。

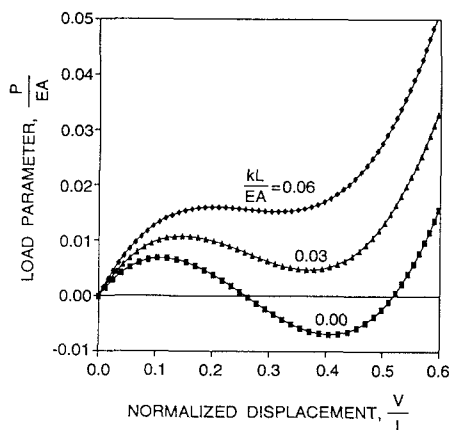
(1) 数値解析例

図-5に示す3つの構造物を取り上げた。これらはいずれも幾何学的非線形問題の代表的なものであり、厳密解あるいは他の研究者による数値解析結果が存在している。

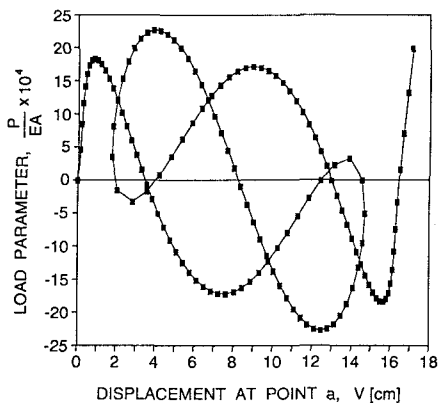
図-5(a)は、2本のトラス部材と1本の線形バネからなる平面トラスであり、バネ定数には3つの値($kL/EA=0.0, 0.03, 0.06$)を想定して計算を行った。対称性を考慮し、 $kL/EA=0.0$ の場合には1つのトラス要素、それ以外の場合には2つのトラス要素でモデル化した。解析結果として、荷重と載荷点での鉛直変位の関係を図-6(a)に示しているが、バネ定数がこの構造物の変形挙動に大きな影響を及ぼしていることがわかる。すなわち、バネ定数の値が大きくなるにつれ、荷重の極大値と極小値の差が小さくなり、程度の異なる非線形挙動となっている。いずれの場合においても、釣合径路追跡に困難は全くなかった。

図-5(b)に示すドーム形トラス¹⁵⁾を次に解析した。節点b～gには大きさの等しい鉛直荷重が作用し、中央の節点aには半分の鉛直荷重が作用する場合の解析を、24のトラス要素で行った。解析結果として、節点aの鉛直変位と荷重の関係を図-6(b)に示している。この図からわかるようにこのトラスの釣合径路は比較的複雑な曲線となるが、弧長法を用いることにより何ら問題なく追跡できた。

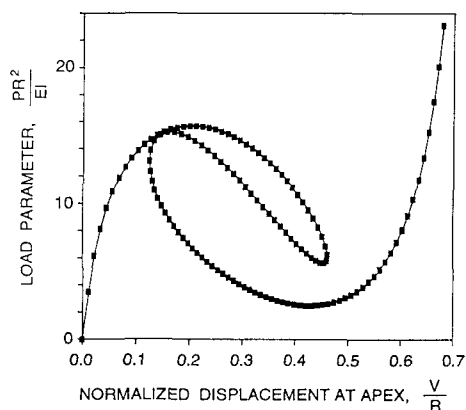
図-5(c)は一端固定、他端ヒンジの円弧アーチ¹⁶⁾であり、8つの梁要素を用いて解析を行った。載荷点



(a) 平面トラス



(b) ドーム形トラス



(c) 円弧アーチ

図-6 荷重-変位曲線

での荷重と鉛直変位の関係を図-6(c)に示しているが、かなり曲率の大きな部分を有する曲線となっている。しかしながら、この問題においても釣合経路追跡は容易であった。

本研究では解析精度自体を問題とはしないため、精度の検討結果は示していない。しかし、図-6の解析結果は、いずれも厳密解や既存の計算結果に十分よく一致する値となっている。

(2) 考察

設定した初期値の違いは収束解自体には全く違いをもたらさないが、収束過程には大きな影響を及ぼし、収束判定条件を満足させるのに必要な反復計算の回数は初期値設定法に依存する。上述の解析例において、各初期値設定法が必要とした反復計算回数の平均値を表-2にまとめている。ちなみに、反復計算のたびに式(6)の連立1次方程式の解法が必要であり、それが計算時間の多くを占めるため、反復回数は計算コストを考える上で一つの重要な目安となる。

表-2によれば、すべての解析において設定法(c)の反復計算回数が最も少なくなっており、ついで設定法(a)、(b)の順になっている。この表に示す結果以外にも、弧長の大きさを2倍にした場合や荷重の最初の

表-2 反復計算回数

設定法	平面トラス*			ドーム形トラス	円弧アーチ
	(i)	(ii)	(iii)		
(a)	2.64	2.54	2.30	2.40	3.83
(b)	2.81	2.76	2.63	2.82	4.26
(c)	2.10	2.06	2.05	2.30	2.77

*: (i) $kL/EA=0.0$; (ii) $kL/EA=0.03$; (iii) $kL/EA=0.06$

表-3 CPU 時間

設定法	ドーム形トラス	円弧アーチ
(a)	6.90 sec	7.29 sec
(b)	6.93	7.81
(c)	5.78	5.21

極大点までのみを考慮した場合においても比較したが、いずれの場合にも、反復回数から見れば設定法(c)が最良であった。

ところで、当然のことながら、初期値設定のための計算量も各設定法により異なる。設定法(a)では式(10)を計算する必要があるが、これは n 個の連立方程式を解くもので、1回の反復計算にはほぼ匹敵する計算時間を要する。設定法(b)では、計算量は少ないが、2段階前までの解、すなわち釣合点 p および釣合点 $(p-1)$ の荷重強度、変位を記憶しておく必要がある。設定法(c)は設定法(b)の補間関数を高次にしたもので、計算量、記憶量とも設定法(b)に比べて増加する。このため、反復回数のみをもとに計算効率に関する結論を導くには無理がある。そこで、解析に要したCPU時間も調べ、表-3にまとめている。但し、平面トラス(図-5)の場合には計算時間が非常に短いため、ここでの考察からは除外している。この表を見れば、計算効率が最もよいのは設定法(c)、次いで設定法(a)、(b)であることがわかる。これは反復計算回数で見たときの順序と同じであるが、CPU時間で見た場合の設定法(a)と(b)の差は、反復回数の場合に比べかなり小さくなっている。

以上のことから、初期値設定法としては設定法(c)が最良であると結論づけられる。但し、この手法では、初期値設定に際して4段階前までの解を記憶しておく必要がある。このため、記憶容量が大きな問題となる大規模な構造解析では、設定法(a)が望ましくなる場合も考えられる。

7. おわりに

弧長法における非線形方程式をニュートン・ラプソン法で解く場合、線形化することが必要となるが、得られた連立1次方程式の係数行列は対称、バンド形といった特性を有していない。このため、Chrisfieldはニュートン・ラプソン法を直接適用しない代替法を提案し、一般に用いられている。しかしながら、本研究では、構造系の支配方程式の後に弧長制御式を配置して得られる連立1次方程式の解法としてスカイライン法を用いれば、その係数行列の大部分を占める接線剛性行列の疎、対称、バンド形といった特性を容易に生かすことができ、ニュートン・ラプソン法を適用しても十分に計算効率よく係数行列を扱えることを明確に示した。ニュートン・ラプソン法の収束性のよさやアルゴリズムの明快さを考慮に入れたとき、本計算法はChrisfieldの提案する計算法より明らかに優れていると思われる。また、代表的な幾何学的非線形問題を解き、弧長法の有用性を検証するとともに反復計算における初期値設定法の検討を行い、本計算法を効果的に運用するには、一般に3次関数を用いた外挿による初期値設定法が最良であるとの結論を得た。

参考文献

- 1) 鷲津久一郎他：有限要素法ハンドブックⅡ 応用編，培風館，1983年。
- 2) Wempner, G.A.: Discrete approximations related to nonlinear theories of solids, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.7, 1581-1599, 1971.
- 3) 細野透：弧長法による弾性座屈問題の解析，日本建築学会論文報告集，第242号，pp.41-48，1976年。
- 4) Riks, E.: An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.15, pp.529-551, 1979.
- 5) Chrisfield, M.A.: A fast incremental/iterative solution that handles 'snap-through', *Comp. Struct.*, Vol.23, pp.55-62, 1981.
- 6) Ramm, E.: The Riks/Wempner approach-an extension of the displacement control method in nonlinear analysis, *Recent Advances in Nonlinear Comp. Mech.*, Pineridge Press, 1982.
- 7) Chrisfield, M.A.: An arc-length method including line search and accelerations, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.19, pp.1269-1289, 1983.

- 8) 伊藤文人・野上邦栄：不完全系釣合径路追跡計算上の問題点とその対策，構造工学論文集，土木学会，Vol.32A，pp.165-176，1986年.
- 9) Chaisomphob, T., Kanok-Nukulchai, W. and Nishino, F.: An automatic arc length control algorithm for tracing equilibrium paths of nonlinear structures, Proc. Japan Soc. Civ. Engrs., No.392/I-9, pp.227-230, 1988.
- 10) 末武義崇・工藤浩司・平島政治・依田照彦：弧長増分法に基づく板殻構造物の耐荷力解析，構造工学論文集，土木学会，Vol.34A，pp.51-59，1988年.
- 11) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method, 4th ed., Vol.2, McGraw-Hill, 1991.
- 12) Zienkiewicz, O.C.: The Finite Element Method, 3rd ed., McGraw-Hill, 1977.
- 13) 西野文雄：連続体の力学 II 構造，土木工学体系6，彰国社，1984年.
- 14) Bathe, K.J.: Finite Element Procedures in Engineering Analysis, Prentice Hall, 1982.
- 15) Nishino, F., Ikeda, K., Sakurai, T. and Hasegawa, A.: A total Lagrangian nonlinear analysis of elastic trusses, Proc. Japan Soc. Civ. Engrs., No.344/I-1, pp.39-53, 1984.
- 16) DaDeppo, D.A. and Schmidt, R.: Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load, J. Appl. Mech., ASME, Vol.42, pp.894-896, 1975.

(1992年9月21日受付)