

弾性分岐問題における分岐方向の予測について

Branching Predictor in Elastostatic Bifurcation

藤井 文夫*、北川 竜三**

By Fumio FUJII and Tatsumi Kitagawa

A branch-switching strategy in elastostatic bifurcation is presented. At a fixed load level, a fictitious trajectory which passes through all possible equilibrium points is introduced. It suffices to simply trace this trajectory in incremental and iterative steps in order to attain bifurcated and isolated branches. Higher-order terms are not required. Only (total and) incremental equations are necessary. The eigenanalysis of the tangent stiffness matrix might be useful, is, however not always needed. Computed elasticas with bifurcation show that the proposed idea works well even in multi-bifurcation and in complex branching situation.

1. ま え が き

分岐点が絡む特異性の強い構造安定問題は、分岐荷重と分岐経路の傾き（初期不整に対する敏感度）とを同時に最適化する手法との関連からも、最近注目されてきている¹⁻⁷である。しかしこれは同時に、例えば Wriggers/Wagnerらの提案する Extended System^[15, 16]を用いて分岐点を正確に追跡し、その後さらに分岐経路に移行するための分岐方向予測子を評価する必要があるなど、煩雑な手続きが必要とされるきわめて7な問題でもある。解析的に扱い得る簡単な分岐問題は別として、汎用計算コードを用いた実用分岐解析においては、分岐メカニズムの特定に必要とされる非や高次項の77評価は不可能に近く、さらには計算誤差から、机上の理論展開のように「=0」とは決していかないところに、実際の数値分岐解析の難しさがある。

この論文は前報^[7]をさらに発展させたもので、最近の成果^[4, 5, 6]を交えて分岐経路への切りかえ方法に関する新しい計算戦略を提案する。これまで筆者の研究のなかで導入されてきた補助曲線の一般化も試みた。経路の切りかえは必ずしも分岐点の近傍からではなく、全く任意のつり合い点から試みることができ、遊離経路^[6]をも発見できるのが特長である。紙面の都合上、本質的な結果のみを掲載した。数式の詳細な誘導は、関連の参考文献を参照されたい。

2. 固有ベクトルを用いる従来の方法（図1）

これまでの実用的な分岐方向の予測方法は、分岐点から分岐点における特異接線剛性行列の77固有ベクトルを用いて分岐経路を探索するやり方である。荷重増分 $d p$ を規定した際の接線剛性方程式、

* Dr.-Ing. 岐阜大学助教授 工学部 (〒501-11 岐阜市柳戸1-1)

** 本州四国連絡橋公団

$$\mathbf{K} \mathbf{d} \mathbf{u} = d p \mathbf{P} \quad \text{式 (1)}$$

について、増分変位ベクトル $\mathbf{d} \mathbf{u}$ を、接線剛性行列 $\mathbf{K}$ の固有ベクトル ($\lambda_n, \mathbf{e}_n$) を用いて展開すると、

$$\mathbf{d} \mathbf{u} = \sum_{n=1}^N \frac{d p \mathbf{e}_n^T \mathbf{P}}{\lambda_n} \mathbf{e}_n \quad \text{式 (2)}$$

となる。ここで固有値は便宜上

$$0 \leq |\lambda_1| < |\lambda_2| < \dots < |\lambda_N| \quad \text{式 (3)}$$

の順に並べた。いま単純分岐点について考えると、式 (2) の $\mathbf{d} \mathbf{u}$ は、これまでの経路 I、それに目標とする分岐経路 II の両方についてそれぞれ、 $\mathbf{d} \mathbf{u}_I$ および $\mathbf{d} \mathbf{u}_{II}$ が可能である (図 1)。いま分岐点での固有値を例えば

$$\lambda_1 = 0 \quad \text{式 (4)}$$

と仮定し、式 (2) の右辺第 1 項 ($n=1$) について注目すると、 $\mathbf{d} \mathbf{u}_I$ および $\mathbf{d} \mathbf{u}_{II}$ が有限の大きさであることから、分子についても

$$\mathbf{e}_1^T \mathbf{P} = 0 \quad \text{式 (5)}$$

でなければならない。結果として $\mathbf{e}_1$ の係数は、(0/0) のため不定となる。この不定係数を経路 I と経路 II とについて、それぞれ σ_I および σ_{II} とする。 $\mathbf{d} \mathbf{u}_I$ と $\mathbf{d} \mathbf{u}_{II}$ との間の唯一の違いは、固有ベクトルに対するこの不定係数だけであるから、 $C_1 = \sigma_{II} - \sigma_I$ において、 $\mathbf{d} \mathbf{u}_{II}$ を $\mathbf{d} \mathbf{u}_I$ で表すとつぎようになる。

$$\mathbf{d} \mathbf{u}_{II} = C_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{d} \mathbf{u}_I \quad \text{式 (6)}$$

ここで $\mathbf{d} \mathbf{u}_I$ は計算不可能であるが、分岐点 B に十分近い経路 I 上のつり合い点 A において、同じ荷重増分 $d p$ に対する増分変位 $\mathbf{d} \mathbf{u}_A$ で近似できる (図 1)。その結果、非対称分岐については、

$$\mathbf{d} \mathbf{u}_{II} = C_1 \mathbf{e}_1 + \mathbf{d} \mathbf{u}_A \quad \text{式 (7)} \quad \text{および} \quad d p \neq 0 \quad \text{式 (8)}$$

が分岐方向を与える。ここで規定すべきパラメータは ($d p, C_1$) の 2 個で、 $\mathbf{d} \mathbf{u}_A$ は $d p$ を規定すれば必然的に決まる。オイラ座屈のような対称分岐は、

$$\mathbf{d} \mathbf{u}_{II} = C_1 \mathbf{e}_1 \quad \text{式 (9)} \quad \text{および} \quad d p = 0 \quad \text{式 (10)}$$

の特別な場合であり、分岐方向は固有ベクトルに一致する。固有ベクトルを分岐方向予測子のなかに抱き込む ("eigenvector injection") 際の問題点は、重み C_1 の決め方である。特に非対称分岐については、仮定したひとつの C_1 について反復計算を繰り返し、実際に分岐経路 II に収束するまで、ラムダに C_1 を仮定し直す以外に合理的な策はこれまで提案されていない。対称分岐の場合でも、分岐点 B が正確にポイントできず、その近傍にあるつり合い点から経路 II を探査する場合には、状況は非対称分岐の場合と全く同様である。

多重分岐で、例えば固有値が 2 個 (λ_1, λ_2) 出る場合、分岐方向は一般に

$$\mathbf{d} \mathbf{u}_{II} = C_1 \mathbf{e}_1 + C_2 \mathbf{e}_2 + \mathbf{d} \mathbf{u}_A \quad \text{式 (11)} \quad \text{および} \quad d p \neq 0 \quad \text{式 (12)}$$

となり、不定パラメータは (C_1, C_2) の 2 個となる。これらの組み合わせについてラムダアクセスで分岐経路 II を探査するのは、一層困難となり反復計算の量は激増する。多重分岐においては、実際に存在する分岐経路 II の本数 (S) と固有値の個数 (R) とは必ずしも一致しない。例えば $R=2$ に対して、S の最大値 $S_{\max}$ は 4 となる^{[17] (*)}。実際に何本あるかわからない分岐経路 II のすべてを効率良く見つけ出すのが多重分岐では至難の技である。

3. 高次項を用いる従来の方法 (図 2)

つり合い方程式の 2 次導関数を用いれば、分岐方向を決めることができる。あとはこの接線ベクトルの長さを、適当にスケリングするだけで良い。詳細な誘導は^[9, 13]に譲るとして、概要はつぎの通りである。

(*) ただし条件によってかなり異なる。この $S_{\max} = \frac{1}{2}(3^R - 1) = 4$ の他に、 $S_{\max} = 2^R - 1 = 3$ の場合もある。より高次の項が支配的となると、 $S_{\max} = 3, 5, 8, \dots, \infty$ 。詳細は参考文献^[16, 17, 18, 23]を参照のこと。

荷重 p と構造系の応答 $\mathbf{u}$ との間のつり合い曲線を $\xi(p)$ として、その支配方程式を

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}, p) = 0 \quad \text{式 (13)}$$

とする。 $\xi(p)$ の (p) は荷重形態を示すためのもので、関数と言う意味ではない。

式(13)を $\xi(p)$ の弧長 ds で2回微分して(テイラー展開ではない)得られる増分2次項方程式に、左から $\mathbf{e}_1^T$ をかけ、その結果に単位長さの接線ベクトル $\{\mathbf{u}_{,s}, p_{,s}\}$ について、

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_{,s}] &= \frac{p_{,s}}{p_{,s}} \mathbf{u}_{,pA} + \rho \mathbf{e}_1 & \text{式 (14)} \\ p_{,s} &= \frac{p_{,s}}{p_{,s}} & \text{式 (15)} \end{aligned}$$

を代入する(図2)。ただしここで $(,s)$ および $(,p)$ は、それぞれ弧長 s , 荷重パラメータ p に対する導関数を表し、 $\mathbf{u}_{,pA}$ は、分岐点付近でのつり合い点 A における単位荷重増分 ($dp=1$) に対する変位増分である。代入の後、式を整理すると、 $p_{,s}$ と ρ との比に関するつぎのような2次方程式を得る。

$$a + 2b(p_{,s}/\rho) + c(p_{,s}/\rho)^2 = 0 \quad \text{式 (16)}$$

あるいは

$$a(\rho/p_{,s})^2 + 2b(\rho/p_{,s}) + c = 0 \quad \text{式 (17)}$$

ただし、各係数 a, b, c はつぎのように計算される。

$$a = \mathbf{e}_1^T \{ [\mathbf{F}_{,uu} \mathbf{e}_1] \mathbf{e}_1 \} \quad \text{式 (18)}$$

$$b = \mathbf{e}_1^T \{ [\mathbf{F}_{,uu} \mathbf{u}_{,pA} + \mathbf{F}_{,up}] \mathbf{e}_1 \} \quad \text{式 (19)}$$

$$c = \mathbf{e}_1^T \{ [\mathbf{F}_{,uu} \mathbf{u}_{,pA}] \mathbf{u}_{,pA} \} + 2 \{ \mathbf{F}_{,up} \mathbf{u}_{,pA} \} + \mathbf{F}_{,pp} \} \quad \text{式 (20)}$$

$(,u)$ は $\mathbf{F}$ の変位に関する微分を意味する。式(17)の根を、それぞれ経路 I、II について

$$(\rho/p_{,s}) = (\rho/p_{,s})_I \quad \text{および} \quad (\rho/p_{,s})_{II} \quad \text{式 (21)}$$

とすると、分岐経路 I については明らかに

$$(\rho/p_{,s})_I = 0 \quad \text{式 (22)}$$

であるから、根と係数との関係から式(17)のなかで常に

$$c = 0 \quad \text{式 (23)}$$

でなければならない(これは実際には高次項計算の精度のチェックに使う)。したがって分岐経路 II について

$$(\rho/p_{,s})_{II} = -(2b/a) \quad \text{式 (24)}$$

となり、非対称分岐方向は

$$\begin{aligned} [\mathbf{u}_{,sII}] &= \{ \mathbf{u}_{,pA} + (\rho/p_{,s})_{II} \mathbf{e}_1 \} p_{,sII} & \text{式 (25)} \\ p_{,sII} &= \frac{p_{,sII}}{p_{,sII}} & \text{式 (26)} \end{aligned}$$

となる。 $p_{,sII}$ が分岐経路 II の接線ベクトルの長さを決める。対称分岐の特別な場合は、

$$(p_{,s}/\rho)_{II} = 0 \quad \text{式 (27)} \quad \text{および} \quad a = 0 \quad \text{式 (28)}$$

となる(対称分岐方向はすでに式(9,10)で与えられるので高次項を使うまでもない)。非対称分岐のときは

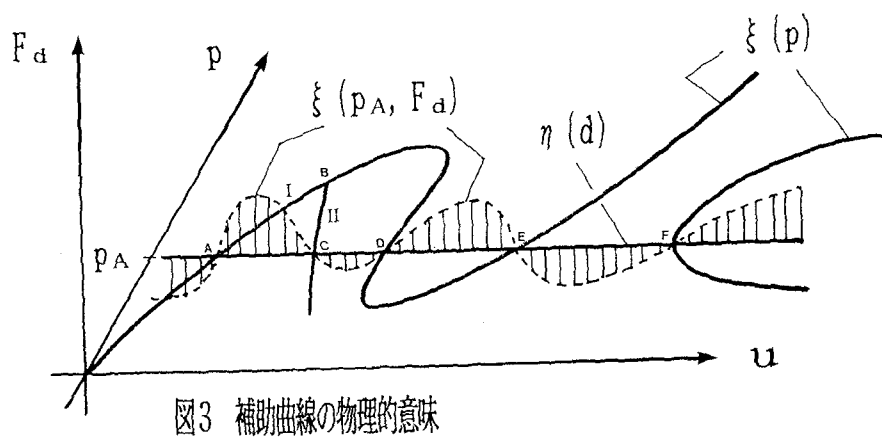
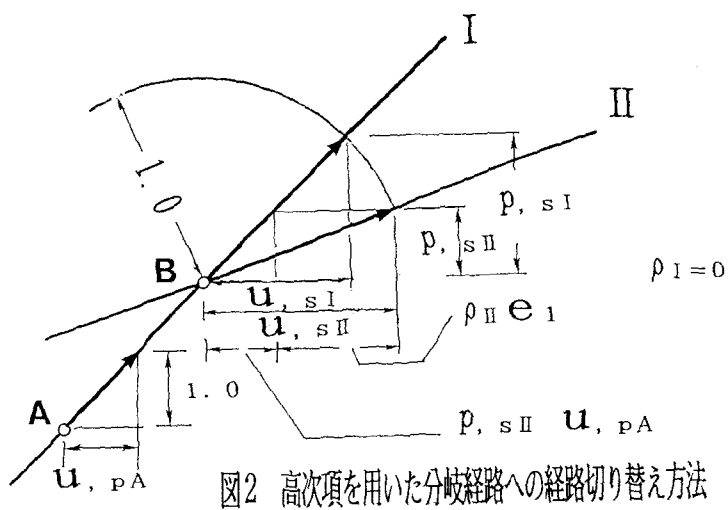
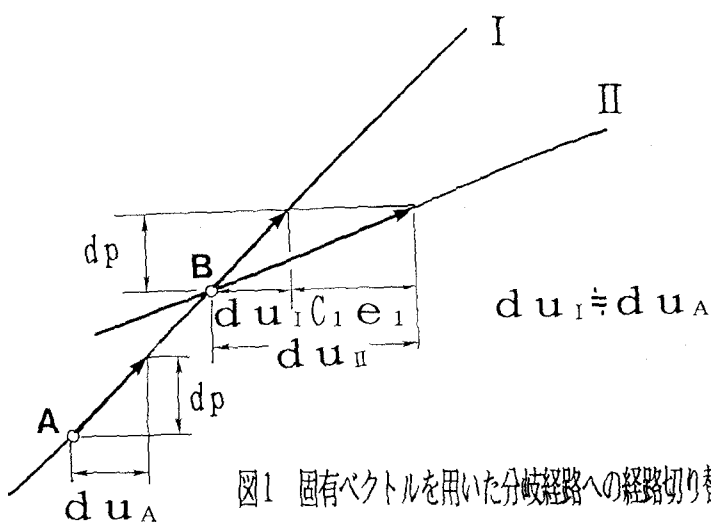
$$a \neq 0 \quad \text{式 (29)}$$

で判別がつく。以上の高次項を用いた分岐方向の決定方法は、分岐点の位置と分岐点での高次項を高精度に評価する必要があることから、必ずしも実用的でない(**)。数値微分による導関数の計算は当然可能であるが、特に対称・非対称分岐の判別に重要な係数 a が数値計算の誤差に敏感であることが知られている。

4. 提案理論 (図3)

著者が提案する一連の経路切りかえ方法「4, 5, 6, 7」に共通したアイデアは、現在のつり合い経路の分枝と

(**) 高次項になるほどより多くの情報が得られるのは当然であるが、支配方程式が比較的簡単で、しかも解析的に得られる場合(例えば 2D3Dトラス)は別として、実際にはつり合い方程式の2次導関数(すなわち経路の3階微分)をとって (a, b, c) を計算するのでさえかなり苦しい。



目標とするつり合い曲線の分枝とを直接結ぶある補助曲線を導入することである。

▼補助曲線の定義： 荷重レベル p を、経路 I の上にある既知のつり合い点 A の荷重レベル p_A に固定して

$$F(\mathbf{u}, p_A) = 0 \quad \text{式 (30)}$$

を考える。 $p = p_A$ の荷重レベルにある全てのつり合い点の変位 $\mathbf{u}$ がこの式を満足する。 N 本の支配方程式 (30) のなかから、どれかある一本の式、

$$F_d(\mathbf{u}, p_A) = 0 \quad \text{式 (31)}$$

("d" は "delete" を表す) を除外して、残りの $(N-1)$ 本の支配方程式

$$F_j(\mathbf{u}, p_A) = 0 \quad j=1, 2, \dots, d-1, d+1, \dots, N \quad \text{式 (32)}$$

の解曲線を $\eta(d)$ と定義する。 (d) はこの補助曲線が添え字 d の選び方に依存するので付けた。この補助曲線 $\eta(d)$ は、設定した $p = p_A$ の平面内で定義され、さらにこの荷重一定平面は、 $\xi(p)$ との間でいくつかの交点 (図3の点A, C, D, E, F) を持つ。さらに最も重要な点は、これらのつり合い点がすべて $\eta(d)$ の上にあることである。

分岐点 B の近くに点 A を設定する場合には、 $\eta(d)$ の点 A での接線方向にリッチの停留点を直線探索するか^[4, 7]、あるいは式 (18-20) の右辺の高次項とは異なる別の高次項を用いて分岐方向を予測する方法^[9, 10]などが考えられる。今回は補助曲線をトレースするストラテジーを提案する。

▼補助曲線の追跡： $\eta(d)$ は式 (32) を支配方程式とし、荷重一定平面 (変位空間 R^N) の上で定義される曲線である。点 A を出発点として、式 (31) の左辺を常にモニターしながら予測子修正子法でこの曲線を追跡する。点 A 以外にも式 (31) が満足される点が、目標のつり合い点である。予測子修正子法のアルゴリズムは次のようである。

予測子の計算ステップで解くべき方程式は、

$$(\mathbf{K} + \mathbf{i}_d \mathbf{r}) \mathbf{d}\mathbf{u} = \overline{\mathbf{d}\mathbf{u}_s} \mathbf{i}_d \quad \text{式 (33)}$$

である。ここに

$$\mathbf{r} = -\mathbf{i}_d^T \mathbf{K} + \mathbf{i}_s^T \quad \text{式 (34)} \quad \text{および} \quad \mathbf{i}_m = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T \quad \text{式 (35)}$$

で ($m=d$ or s)、追跡方向を反転させないためにも式 (33) では第 d 番目の方程式として、一番新しい接線ベクトルの中の最大絶対値成分 s を規定した^[2, 3, 8]。このため接線剛性行列の第 d 行を修正する必要があるが、実際にはつぎのようなBodewig 公式^[14]を応用すればこの修正は回避できる。

$$(\mathbf{K} + \mathbf{i}_d \mathbf{r})^{-1} = \mathbf{K}^{-1} - \omega \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_d \mathbf{r} \mathbf{K}^{-1} \quad \text{式 (36)}$$

ここに

$$\omega = 1 / (1 + \mathbf{r} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_d) \quad \text{式 (37)}$$

である。式 (33) に式 (36, 37) を応用すると、多少長い計算のあと最終的には

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \frac{\overline{\mathbf{d}\mathbf{u}_s}}{\mathbf{i}_s^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_d} \mathbf{K}^{-1} \mathbf{i}_d \quad \text{式 (38)}$$

となる。したがって予測子計算ではまず

$$\mathbf{K} \mathbf{d}\mathbf{u}_d = + \mathbf{i}_d \quad \text{式 (39)}$$

を $\mathbf{d}\mathbf{u}_d$ について解き、

$$\mathbf{d}\mathbf{u} = \frac{\Delta \eta}{|\mathbf{d}\mathbf{u}_d|} \mathbf{d}\mathbf{u}_d \quad \text{式 (40)}$$

とスケリングする ($\Delta \eta$ はステップサイズ)。

修正子の計算ステップで解くべき方程式は、

$$(\mathbf{K} + \mathbf{i}_d \mathbf{r}) \delta \mathbf{u} = -\mathbf{F} + \mathbf{F}_d \mathbf{i}_d \quad \text{式 (41)}$$

である。ただしここで

$$\mathbf{r} = -\mathbf{i}_a^T \mathbf{K} + \mathbf{d} \mathbf{u}^T \quad \text{式(42)}$$

である。式(41)では第d番目の方程式として、修正子 $\delta \mathbf{u}$ を予測子 $\mathbf{d} \mathbf{u}$ に直交させた。Bodewig 公式(36,37)を再び式(41)に適用して、多少冗長な式の変形の結果

$$\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_r - \frac{\mathbf{d} \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r}{\mathbf{d} \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_a} \delta \mathbf{u}_a \quad \text{式(43)}$$

を得る。ここで、 $\delta \mathbf{u}_r$ および $\delta \mathbf{u}_a$ は、それぞれ

$$\mathbf{K} \delta \mathbf{u}_r = -\mathbf{F} \quad \text{式(44)} \quad \text{および} \quad \mathbf{K} \delta \mathbf{u}_a = +\mathbf{i}_a \quad \text{式(45)}$$

の解ベクトルである。式(13)のような全体形式のつり合い方程式の定式化が困難な場合には、式(44)の右辺に、線形化増分つり合い方程式(1)の残差をもってきてもよい^[20]。したがってこのスキームは、式(13)が得られない最悪の場合でも、増分方程式だけでも十分機能する。

▼ $\mathbf{F}_a$ のモニターと反復計算： 以上の予測子修正子法を用いて $\eta(d)$ を追跡し、 $\mathbf{F}_a$ の符号反転が確認されたら、 $\eta(d)$ のトレースを一旦停止する。反復計算を実行し、現在の変形状態の近くにあり、式(30)を満たすつり合い点に収束させる。複数のつり合い点が存在する場合は、ひとつのつり合い点を検出した後も、トレースを再開する必要がある。

▼補助曲線の物理的意味： $\eta(d)$ に沿って式(31)以外の全てのつり合い条件は満足されている。このため $\eta(d)$ に沿っては $\mathbf{p} = \mathbf{p}_A$ の他にも、つり合い力 $\mathbf{F}_a (\neq 0)$ が同時に作用していることになる。 $\mathbf{F}_a$ は、 $\eta(d)$ に沿って変化し、 $\xi(p)$ との交点に出会う度に0となる(図3)。 $\mathbf{p}_A$ と $\mathbf{F}_a$ が同時に作用する構造系の応答つり合い曲線を、仮に $\xi(\mathbf{p}_A, \mathbf{F}_a)$ とすると、 $\xi(\mathbf{p}_A, \mathbf{F}_a)$ の変位空間 $\mathbf{R}^N$ への投影が $\eta(d)$ である。したがって本研究では、つり合い曲線 $\xi(p)$ のある分枝から、 $\xi(\mathbf{p}_A, \mathbf{F}_a)$ をたどって—実際にはその投影 $\eta(d)$ をたどって— $\xi(p)$ の別の分枝にアクセスしていることになる。

▼除外するつり合い式の選択： 以上の考察から適切な $\mathbf{F}_a = 0$ を選択するには、つぎのようにすれば良い。まず簡単な構造系については、分岐後の変形モードはある程度予測できるので、これを発生させるのに必要な節点荷重は容易にわかる。予測が困難な場合には、最小固有値の固有ベクトルをサブスペース法などで求めて、分岐経路上の変形モードを予測する参考にする(注：固有ベクトルは一般には Π の変形モードそのものではなく、 I から Π への単なる増分ベクトルである)。 $\eta(d)$ の点Aにおける接線ベクトル($\eta=0$ における式(40))と最小固有ベクトルをグラフィックスで比較して、すでに選択した $\mathbf{F}_a = 0$ が適当だったかどうかチェックしてもよい。酷似していなければ別の方程式を選び直す。

▼補助曲線の一般化： より一般的な荷重不整を $\mathbf{q} \in \mathcal{G}$ で与え、その時の系の応答つりあい曲線を $\xi(\mathbf{p}_A, \mathbf{q})$ で表示し、その変位空間 $\mathbf{R}^N$ への投影を $\eta(q)$ とする。ここに $\mathbf{q}$ は不整荷重パラメータで、荷重ベクトル $\mathcal{G}$ は一定ベクトル、または $\mathbf{u}$ に依存したベクトルであってもよい。 $\xi(\mathbf{p}_A, \mathbf{q})$ の支配方程式を、

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, \mathbf{q}) = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_A) + \mathbf{q} \mathcal{G} = 0 \quad \text{式(46)}$$

と書くことができる。

$$\mathbf{G}(\mathbf{u}, 0) = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{p}_A) = 0 \quad \text{式(47)}$$

であるから、 $\mathbf{q} = 0$ で式(30)の解 $\mathbf{u}$ に出会う。式(46)と“ホトビ”との類似性には注目すべきである。

本論文で採用した $\xi(\mathbf{p}_A, \mathbf{F}_a)$ の支配方程式は、

$$\mathbf{q} = \mathbf{F}_a \quad \text{式(48)} \quad \text{および} \quad \mathcal{G} = \mathbf{i}_a \quad \text{式(49)}$$

の特別な場合である。現在のところ(本論文をまとめ始めた時点で)最も有望視されているのは、分岐点近傍での絶対値最小の固有値 λ_1 を持つ第1固有ベクトル $\mathbf{e}_1$ を $\mathcal{G}$ として採用することである。

$$\mathcal{G} = \mathbf{e}_1 \quad (\lambda_1 \neq 0) \quad \text{式(50)}$$

式(50)を採用した際の、式(7-8)で表現される従来の固有ベクトル予測子に対する利点は、不定係数 C_1 が介在して来なくなること、したがって試行錯誤的な探査を必要としなくなること、そして分岐経路を $\mathbf{q} = 0$ の明確な停止条件で探査できることである。

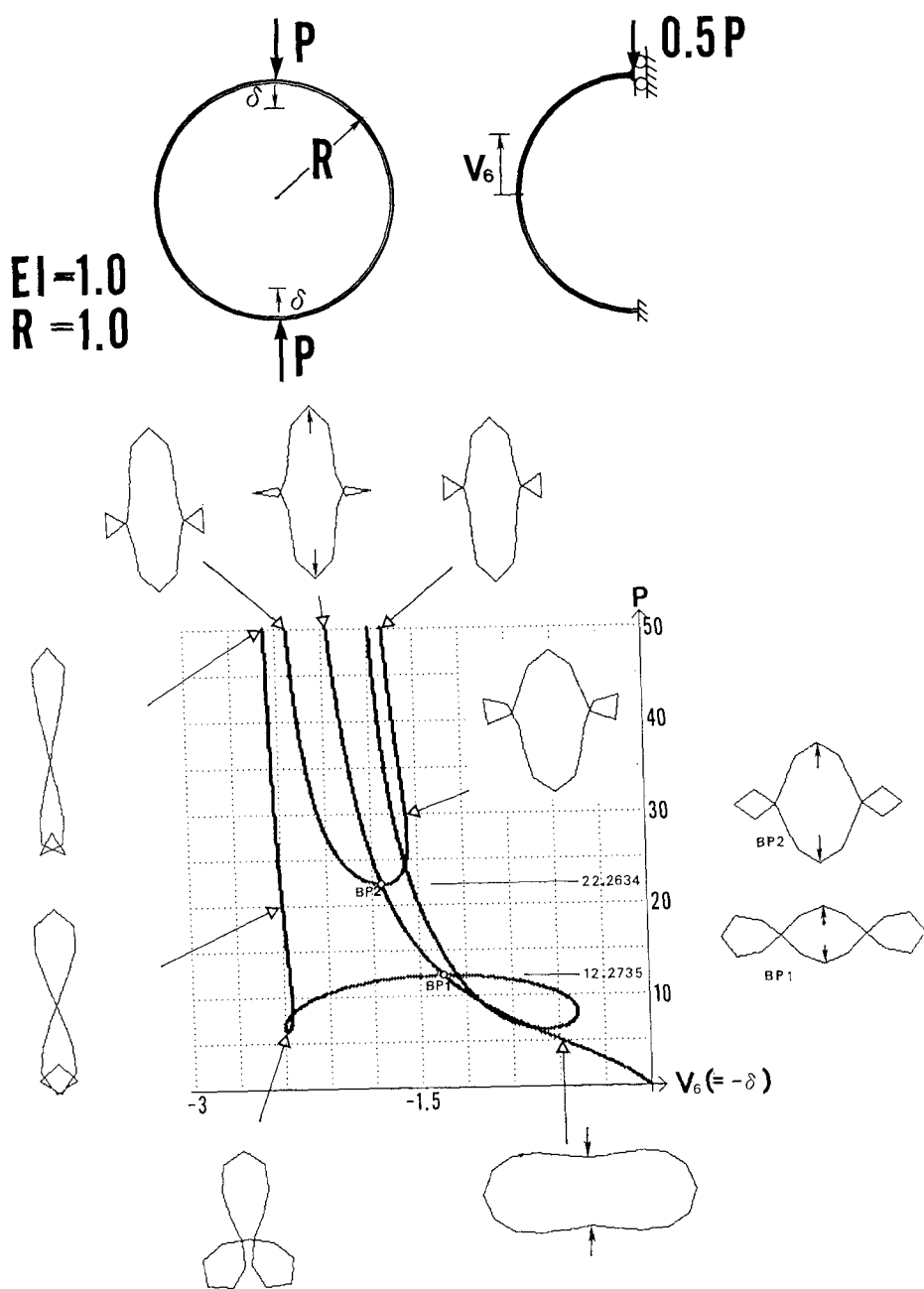


図5 円形フレームの単純分岐

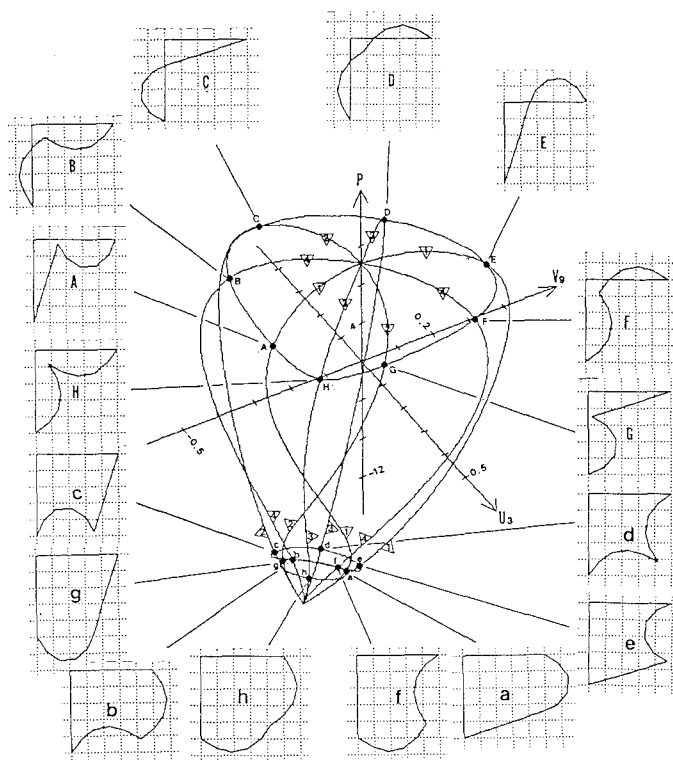
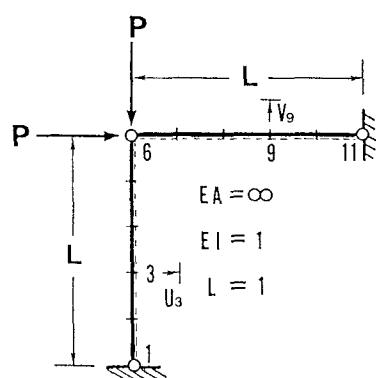


図4 3個のピン結合をもつL形フレームの多重分岐

5. 計算例 (図4 および 図5)

1.5.1 分岐問題を2例計算した。特殊な混合法による支配方程式の誘導については文献^[1, 2]に、解曲線の追跡方法については^[2, 3, 8]に詳しいので省略する。

最初の分岐問題は、図4に示すようにお互いに結合された2本のはり部材で、多重分岐が発生するよう考案されたバチマークである。それぞれの部材を同じ長さの5本の要素で離散化し、系全体では10個の要素剛体回転角(有限部材回転角)と、右上支持端(節点11)の水平・鉛直支点反力の計12個の自由度となる。座屈前の主経路は荷重軸と一致し、 $P_{cr} = 10.198$ で(オイラー荷重の理論値は9.8696)、2個の拘固有値のため多重分岐が発生する。枝別れの3次元プロットが示すように、2本の部材の座屈がそれぞれ別個独立に発生し得るため、分岐点より4本の対称分岐経路が出ている。これらの分岐経路は再び環状の経路と8個の分岐点(A-H)で交差している。その後全ての経路は最終的には、 $P = -10.198$ で合流し、その時の形状は初期形状のちょうど逆転となっている。合流する直前に環状の経路との間で8個の分岐点(a-h)が検出されたが、これも(A-H)に相似している。経路切りかえは、あるひとつの分岐経路に至る度に、別のつり合い方程式を除外して、すなわち別の静的乱れを与えて、つぎの分岐経路を探索していった。静的乱れとはこの場合、要素全体の有限の剛体回転角に対応するモーメントのことである。

もうひとつの例題は円形リングの分岐問題(図5)で、対称性より系の半分を10本の等分要素で離散化した。まず原点を含む主経路上に、BP1($P=12.2735$)とBP2($P=22.2634$)の2個の分岐点を検出した。分岐経路への移行には $\eta(6)$ をトレース。変形形状が示すように、BP1からは左右の環が変形形状の下端、または上端に寄り添って来る分岐経路が派生している。BP2からは左右の環が寄り添うことなく左右に別れたままで、その位置が分岐後わずかに上下にずれる分岐経路が伸びている。横軸には V_0 をプロットしたが、 $V_0 = -\delta$ が成立するのは上下対称の変形が保たれる主経路についてだけである。この円形リングはバチマークとして比較的良く計算されて来たにもかかわらず、一度に2個の分岐点を発見した報告は著者の知る限り見当たらない。

その他の多重分岐の例は^[4, 5, 6]に詳しい。シェルの非対称分岐の例題は^[9]を参照されたい。

6. まとめ

弾性分岐問題で補助曲線 $\eta(d)$ を導入して、この曲線をトレースすることによって、分岐経路に移行するステップを提案した。このアイデアが成功する鍵は、 $p = p_A$ の荷重レベルにある全てのつりあい点、補助曲線上にあることである。提案理論の特長としてつぎの点が挙げられる。必要なら線形化増分方程式のみでも機能すること。 $\eta(d)$ をトレースするアルゴリズムは、従来の弧長法等による曲線追跡法をわずかに修正するだけで良い。接線剛性行列の固有値解析は必要としない。点Aは必ずしも分岐点の近くに設定する必要がなく、全く任意のつり合い点から経路の切りかえを開始できる。この際目標点までの弧長 η は長くなり、ステップ数は急増することになるが、その見返りとしてアタラシの難しい遊離経路を発見できる利点がある。また多重分岐問題では、すべての分岐経路をくまなく探索するのが要点である。このためにも到達した経路が、すでに検出した分岐経路と同一のものであるかどうか判別できる『経路識別子』^[4]が不可欠となる。今後克服しなければならない大きな課題は多重分岐問題と非保存系の分岐問題である。

謝辞

著者は Alexander-von-Humboldt-Stiftung の研究員として、1991年9月から1992年8月までの一年間、ドイツ連邦共和国 Stuttgart 大学 Institut für Baustatik (Prof. Ramm) に滞在した。本論文はその際の研究活動の一部をまとめたものである。ドイツ財団をはじめとして、ドイツ計算力学の原動力である Ramm教授、Wriggers教授、Seydel教授らとの有意義な交流に感謝する。式(46, 50)の発想は Stuttgart 大学での一連の講義^[10]のなかで、同じ分岐問題に携わる Dipl.-Ing. Reitinger との議論のなかから生まれたアイデアである。今後このアイデアを試して行きたい。

参考文献

- [1]Fujii, F. and Gong, S.X. " Field Transfer Matrix for Nonlinear Curved Beams",
ST, ASCE, Vol.114, No.3, 675-692, 1988
- [2]Fujii, F. "Scheme for Elasticas with Snap-back and Looping",
EM, ASCE, Vol. 115, No.10, 2166-2181, 1989
- [3]Fujii, F. and Usuda, Y., "Stiffness Formulation of Planar Kinematics",
EM, ASCE, Vol. 117, No. 3, 694-699, 1991
- [4]Fujii, F. and Choong, K.K. "Branch-Switching in Bifurcation of Structures",
EM, ASCE, Vol.118, No.8, 1578-1596, 1992
- [5]Fujii, F., Choong, K.K. and T. Kitagawa, "Branch-switching in multi-bifurcation of
structures", Compu. Methods in Appl. Scie. and Engng., Nova Science Publishers Inco.,
New York, 457-466, 1992
- [6]Choong, K.K., Fujii, F. and Kitagawa, T., "Access to bifurcated and isolated equilibrium
branches of structures", in 『Computational Mechanics 』, Balkema, Rotterdam, 463-468, 1991
- [7]藤井文夫、Choong, K.K. "構造系の対称、非対称分岐経路の探索方法について",
構造工学論文集、Vol. 37A, (1991 年 3 月)、343-352
- [8]Fujii, F., Choong, K.K. and Gong, S.X., "Variable displacement control to overcome
turning points of nonlinear elastic frames", Computers & Structures, Vol. 44, No. 1/2,
133-136, 1992
- [9]Fujii, F. and Ramm, E. , "Branch-Switching in elastic shell bifurcation",
(to be submitted to Computational Mechanics, Springer), 1993
- [10]Fujii, F. "Seminarvortrag: Pfadwechselprozeduren im Verzweigungsproblem",
Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, WS 1991 und SS1992.
- [11]Pignataro, M., Pizzi, N. and Luongo, A., "Stability, Bifurcation and Postcritical
Behaviour of Structures", Elsevier, 1991
- [12]Banzant, Z.P. and Cedolin, L., "Stability of Structures", Oxford University Press, 1991
- [13]Seydel, R., "From equilibrium to Chaos - Practical Bifurcation and Stability analysis",
Elsevier, 367 pages, 1988, New York
- [14]Bodewig, E., "Matrix Calculus", North-Holland, 1959
- [15]Wriggers, P and Wagner, W. and Miehe, C., "A quadratically convergent procedure for the
calculation of stability points", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,
70, 329-347, 1988
- [16]Wagner, W., "Zur Behandlung von Stabilitätsproblemen der Elastostatik mit der Methode
der finiten Elemente", vom Fachbereich Bauingenieur- und Vermessungswesen der Universität
Hannover genehmigte Habilitationsschrift, 1990

(査読後追加された文献、特にゼロ固有値の多重度と分岐経路の本数との関係に関する文献など)

- [17]Johns, K.C. and Chilver, A.H., "Multiple path generation at coincident branching points",
Int. J. Mech. Sci., Pergamon press, 1971, Vol.13, pp.899-910
- [18]Huseyin, K., "Non-linear theory of elastic stability", Noordhoff, Leyden, 1974
- [19]Riks, E., "Some computational aspects of the stability analysis",
Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 47, 219-259, 1984
- [20]藤井文夫, " 非線形増分方程式の解法のための篠原法について",
構造工学論文集、Vol. 35A, 1989年 3 月、195-202
- [21]野口裕久、久田俊明, " Scaled Corrector を用いた有限要素分岐解析手法の開発",
日本機械学会論文集 (A編)、58巻、555 号、1992-11、181-188
- [22]野口裕久、久田俊明, " 座屈後挙動における感度解析手法の開発",
日本機械学会論文集 (A編)、58巻、556 号、1992-12、(掲載予定)
- [23]Nishino, F., Hartono, W., Fujiwara, O. and Karasudhi, P., "A study of the stability and
behavior at the critical point by the Taylor expansion", Structural Eng./Earthquake Eng.,
JSCE, Vol.4, No.1, 1-9, April 1987 (Proc. of JSCE, No.380/I-7)

(1992年09月21日受付)