

ひずみ選択積分法を用いたシェル構造の有限変位解析

FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS OF SHELL STRUCTURES
USING A REDUCED INTEGRATION TECHNIQUE WITH SELECTED STRAIN COMPONENTS

岩崎英治*・林 正**・重野宏紀***

By Eiji IWASAKI, Masa HAYASHI and Hiroki SHIGENO

An isoparametric shell element is moderately simplicity and generality. However, overstiff solutions are produced due to shear and membrane locking. To correct this behaviour, reduced integration technique is used to evaluate the stiffness matrix. This technique is not always successful, and the stiffness matrix is singularity. To avoid the locking phenomenon and singularity, a reduced selective integration technique is developed in which low order numerical integration is only applied to certain parts of strain components. The shell element used this proposed selective integration technique does not exhibit locking and singularity.

1. まえがき

有限要素法によるシェル構造の解析には、膜要素と板曲げ要素を組み合わせた平面シェル要素を用いる方法、シェル理論による曲面シェル要素を用いる方法、退化シェルまたは、アイソパラメトリック要素を用いる方法などがある¹⁾。平面シェル要素による方法は、定式化が容易であるが幾何形状を正確に表現するためには多くの要素分割を必要とする。また、曲面シェル要素による方法は、基礎式の選択や剛体変位モードに注意を要する。これらに対して、退化シェルまたは、アイソパラメトリックシェル要素を用いる方法は、比較的容易な定式化により任意形状に適用でき、幾何学的非線形解析への拡張も容易である。

しかし、板厚が薄い場合には厚い場合に比べて精度が極端に悪化することが知られている。これは、薄い板の場合には面外せん断に関する剛性を過大に評価するためであり、これをせん断ロッキング (shear locking) と呼んでいる。また、曲面シェル要素を用いた場合と同様に、要素形状が曲面になった場合に、剛体変位モードと一定ひずみモードを正確に表現できなくなり、精度が悪化する。これを、膜ロッキング (membrane locking) と呼んでいる。これらの精度の悪化は、正確な積分値を得るために必要な数値積分点数よりも少ない積分点数で積分を行った次数低減積分法または、剛性の種類ごとに低減する積分点数を変えた選択的次數低減積分法を用いることにより改善できることが知られている²⁾。

この方法は、概念的には、正確に積分すると剛性を過大に評価することにより精度が悪化するので、これを避けるために積分を不正確に行ない剛性を小さめに評価することである。しかし、これは場合によっては、剛性を過少評価し、剛体変位モード以外のエネルギーに寄与しない特異なモード (hourglass mode) が発生

* 工博 長岡技術科学大学 助手 建設系 (〒 940-21 新潟県長岡市上宮岡町 1603-1)

** 工博 長岡技術科学大学 教授 建設系 (〒 940-21 新潟県長岡市上宮岡町 1603-1)

*** 工修 新潟県安塚土木事務所 (〒 942-04 新潟県東頸城郡安塚町大字安塚字門前沖 720-1)

して精度が極端に悪化するか、剛性行列が特異になり、計算を実行することができないこともある³⁾。この特異性を抑制するために、特異モードに抵抗する人工的な剛性を付加する方法が考案されている^{4),5)}。また、混合型変分原理に基礎をおいて、要素内のひずみ関数を仮定することにより、ロッキングと特異性を回避した要素が導かれている^{6)~11)}。このようなひずみ仮定に基づく方法ではひずみ成分ごとに積分点数が異なり、ひずみごとに積分点数を選択した積分法を用いていることになる。これらの人工的な剛性を付加する方法や混合型変分原理に基礎をおいた方法は、定式化が煩雑になる等の短所を有している。この煩雑さは有限変位解析を行う場合には、計算効率に関して重大な問題になる。

そこで、本論文では、低減積分法を用いた場合に問題になる特異モードを回避するために、ひずみ仮定の方法で行われているようなひずみ成分ごとに積分点数を選択した積分法を、通常の変位法により定式化された要素に用いた方法により、シェル構造の解析を行い、既往の選択積分法による結果との比較検討を行う。

本文で用いる積分法は、広義には選択積分法の一つであるが、剛性の種類ごとに分けた積分法と区別するために、本文で用いる積分法をひずみ選択積分法と呼び従来方法を剛性選択積分法と呼ぶことにする。なお、本文の方法を平板の曲げ問題に限定した場合には、Prathap ら¹²⁾や Kanok-Nukulchai ら¹³⁾が、せん断ロッキングと低減積分による特異性を回避するために提案している手法に対応する。

2. 有限変位解析の定式化

有限変位解析の定式化には種々の手法があるが、高次の非線形項を省略でき、定式化が容易な更新ラグランジュの手法を用いることにする。この手法は、初期状態から最終的な変位後の状態までを、幾つかの増分区間に分割し、一つ前の増分段階の物体に固定した座標系を基準にして、未知の増分量を順次決定していく方法であり、増分区間の幅を狭くすることにより、高次の非線形項は高次の微小項になることから、低次の非線形項だけを用いて有限変位解析を行うことができる。また、有限変位解析の定式化において、変位は有限であるがひずみは微小として扱う。

シェル要素を構成する節点 k の一般化変位ベクトルを $\Delta \mathbf{d}_k$ として、 $\Delta \mathbf{d}_k$ の 3 次以上の高次項を省略すると、変位増分 Δu_i と ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_i$ は、一般に次のように表現できる。

$$\Delta u_i = \sum_{k=1}^p \left(\mathbf{a}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^p \mathbf{A}_{ikl} \Delta \mathbf{d}_l \right)^T \Delta \mathbf{d}_k \quad (i = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (1)$$

$$\Delta \varepsilon_i = \sum_{k=1}^p \left(\mathbf{b}_{ik} + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^p \mathbf{B}_{ikl} \Delta \mathbf{d}_l \right)^T \Delta \mathbf{d}_k \quad (i = 1 \sim 5) \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 $\Delta u_1, \Delta u_2$ はシェル面内の 2 方向の変位、 Δu_3 は法線方向変位を表し、 $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2$ はシェル面内の 2 方向の軸ひずみ、 $\Delta \varepsilon_3$ は面内せん断ひずみ、 $\Delta \varepsilon_4, \Delta \varepsilon_5$ は面外せん断ひずみを表すものとする。また、 p は一つのシェル要素を構成する節点の数である。 $\mathbf{a}_{ik}, \mathbf{b}_{ik}$ と $\mathbf{A}_{ikl}, \mathbf{B}_{ikl}$ はそれぞれ座標の関数からなるベクトルと行列であり、内容については、3. で述べる。

応力増分とひずみ増分の関係式は、有限変位微小ひずみ問題を扱うので、次のような関係式を用いる。

$$\Delta \sigma_i = \sum_{j=1}^5 E_{ij} \Delta \varepsilon_j \quad (i = 1 \sim 5) \dots\dots\dots (3)$$

ここに、等方性材料では非零の要素 E_{ij} は次式のようにになる。

$$E_{11} = E_{22} = E', \quad E_{12} = E_{21} = \nu E', \quad E_{33} = G, \quad E_{44} = E_{55} = \kappa G \dots\dots\dots (4)$$

また、 κ はせん断補正係数であり、 $\kappa = 5/6$ の値をとる。 ν はポアソン比であり、 E', G は弾性係数 E から次式で与えられる。

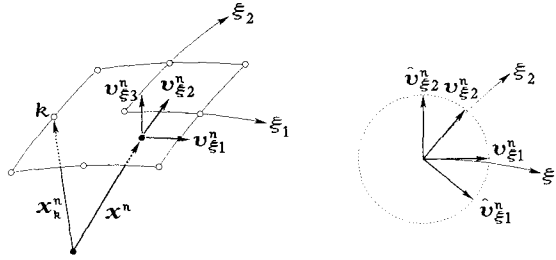


図-1 シェル要素の単位ベクトル

$$E' = \frac{E}{1-\nu^2}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \dots\dots\dots (5)$$

第 \$n\$ 増分段階のシェルに生じている応力を \$\sigma_i^n\$ (\$i=1\sim5\$)、シェル要素内と要素境界に作用している荷重をそれぞれ \$p_i^n, P_i^n\$、その増分を \$\Delta p_i, \Delta P_i\$ (\$i=1\sim5\$) とすると、仮想仕事の原理は次のように表される。

$$\sum_{i=1}^5 \int_V (\sigma_i^n + \Delta \sigma_i) \delta(\Delta \varepsilon_i) dV - \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_V (p_i^n + \Delta p_i) \delta(\Delta u_i) dV + \int_S (P_i^n + \Delta P_i) \delta(\Delta u_i) dS \right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに、\$V\$ はシェル要素の体積、\$S\$ はシェル要素境界の断面積である。

上式に、式 (1),(2),(3) を代入すると、要素の平衡方程式は次のようになる。

$$\sum_{l=1}^p (\mathbf{k}_{kl}^L + \mathbf{k}_{kl}^N - \mathbf{Q}_{kl}) \Delta \mathbf{d}_l = \Delta \mathbf{p}_k + (\mathbf{p}_k - \mathbf{f}_k) \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、\$\mathbf{k}_{kl}^L, \mathbf{k}_{kl}^N\$ はそれぞれ節点 \$k, l\$ に関する線形および幾何剛性行列であり、\$\mathbf{f}_k\$ はこの増分段階において生じている応力に対する節点 \$k\$ の等価節点力である。

$$\mathbf{k}_{kl}^L = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \int_V E_{ij} \mathbf{b}_{ik} \mathbf{b}_{jl}^T dV, \quad \mathbf{k}_{kl}^N = \sum_{i=1}^5 \int_V \sigma_i^n \mathbf{B}_{ikl} dV, \quad \mathbf{f}_k = \sum_{i=1}^5 \int_V \sigma_i^n \mathbf{b}_{ik} dV \quad \dots\dots\dots (8)$$

また、\$(\mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{p}_k)\$ は荷重の等価節点力ベクトル、\$\mathbf{Q}_{kl}\$ は荷重による付加剛性であり、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{p}_k) &= \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_V (p_i^n + \Delta p_i) \mathbf{a}_{ik} dV + \int_S (P_i^n + \Delta P_i) \mathbf{a}_{ik} dS \right\} \\ \mathbf{Q}_{kl} &= \sum_{i=1}^3 \left(\int_V p_i^n \mathbf{A}_{ikl} dV + \int_S P_i^n \mathbf{A}_{ikl} dS \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

3. シェル要素

Mindlin 要素を用いた薄肉シェルの定式化に際して、ひずみ成分に次の仮定を用いる。

- 1) 板厚方向の軸ひずみは微小であるので省略する。
- 2) 面外せん断ひずみの板厚方向変化量は微小として省略する。
- 3) その他のひずみは板厚方向の 1 次変化量まで考慮し、2 次以上の変化量は微小として省略する。

また、シェル構造の有限変位解析を正確に行うには、回転量を正確に表現することが必要なことから、シェル要素の座標系の設定と、変位表現の際には、有限回転を正確に扱う。

(1) シェル要素の幾何

第 \$n\$ 増分段階におけるシェル中央面上の任意点の位置ベクトル \$\mathbf{x}^n\$ を、節点 \$k\$ の位置ベクトル \$\mathbf{x}_k^n\$ と形状関数 \$N_k\$ から、次のように表す。

$$\mathbf{x}^n = \sum_{k=1}^p N_k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{x}_k^n \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 ξ_1, ξ_2 はシェル中央面上で定義された正規座標であり、この座標系は一般に斜交曲線座標系である。
正規座標 ξ_1, ξ_2 方向の単位ベクトルと、中央面の単位法線ベクトルは、次のように表される。

$$\mathbf{v}_{\xi_1}^n = \frac{\mathbf{x}_{,1}^n}{|\mathbf{x}_{,1}^n|}, \quad \mathbf{v}_{\xi_2}^n = \frac{\mathbf{x}_{,2}^n}{|\mathbf{x}_{,2}^n|}, \quad \mathbf{v}_{\xi_3}^n = \frac{\mathbf{x}_{,1}^n \times \mathbf{x}_{,2}^n}{|\mathbf{x}_{,1}^n \times \mathbf{x}_{,2}^n|} = \frac{\mathbf{v}_{\xi_1}^n \times \mathbf{v}_{\xi_2}^n}{|\mathbf{v}_{\xi_1}^n \times \mathbf{v}_{\xi_2}^n|} \dots\dots\dots (11)$$

局所デカルト座標系を定義するために、シェル中央面の接平面上にあり、 $\mathbf{v}_{\xi_1}^n, \mathbf{v}_{\xi_2}^n$ に直交した次のような単位ベクトル $\hat{\mathbf{v}}_{\xi_1}^n, \hat{\mathbf{v}}_{\xi_2}^n$ を用意する。

$$\hat{\mathbf{v}}_{\xi_1}^n = \mathbf{v}_{\xi_2}^n \times \mathbf{v}_{\xi_3}^n, \quad \hat{\mathbf{v}}_{\xi_2}^n = \mathbf{v}_{\xi_3}^n \times \mathbf{v}_{\xi_1}^n \dots\dots\dots (12)$$

なお、 $(\cdot)_{,i}$ は ξ_i に関する微係数を表す。

また、面外せん断変形を表現するために、初期状態ではシェル中央面の法線方向に一致し、シェル内に埋め込まれた単位ベクトル $\mathbf{e}^n$ を導入する。

このベクトル $\mathbf{e}^n$ も式(10)と同様に、節点 k での単位ベクトル $\mathbf{e}_k^n$ から、次のように表す。

$$\mathbf{e}^n = \sum_{k=1}^p N_k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{e}_k^n \dots\dots\dots (13)$$

節点 k での単位ベクトル $\mathbf{e}_k^n$ は、初期状態では前述の定義より節点 k での単位法線ベクトル $\mathbf{v}_{\xi_3 k}^0$ で与えられ、第 n 増分段階での単位ベクトル $\mathbf{e}_k^n$ は、回転を表す行列 $\mathbf{R}_k^n$ により、次のように表す。

$$\mathbf{e}_k^n = \mathbf{R}_k^n \mathbf{e}_k^0; \quad \mathbf{e}_k^0 = \mathbf{v}_{\xi_3 k}^0 \dots\dots\dots (14)$$

式(10),(13)より、シェル内の任意な点の位置ベクトル $\mathbf{X}^n$ を、次のように表す。

$$\mathbf{X}^n = \mathbf{x}^n + z \mathbf{e}^n \dots\dots\dots (15)$$

ここに、 z は単位ベクトル $\mathbf{e}_k^n$ の方向の座標を表し、この方向の正規座標 ξ_3 と板厚 t から、 $\frac{t}{2}\xi_3$ で表される。

以上により、シェル要素形状が表現されたことになるが、最後に、後の便宜上、局所的なデカルト座標系 (x_1^n, x_2^n, x_3^n) を導入する。この座標系の要素中央での単位基底ベクトルを次式のようにおく。

$$\bar{\mathbf{v}}_1^n = \frac{\mathbf{v}_{\xi_1}^n + \hat{\mathbf{v}}_{\xi_1}^n}{|\mathbf{v}_{\xi_1}^n + \hat{\mathbf{v}}_{\xi_1}^n|}, \quad \bar{\mathbf{v}}_2^n = \frac{\mathbf{v}_{\xi_2}^n + \hat{\mathbf{v}}_{\xi_2}^n}{|\mathbf{v}_{\xi_2}^n + \hat{\mathbf{v}}_{\xi_2}^n|}, \quad \bar{\mathbf{v}}_3^n = \mathbf{v}_{\xi_3}^n \dots\dots\dots (16)$$

シェル中央面上の任意な点では、その点の法線ベクトル $\mathbf{v}_{\xi_3}^n$ に $\bar{\mathbf{v}}_3^n$ を一致させるような回転により $\bar{\mathbf{v}}_1^n, \bar{\mathbf{v}}_2^n$ が回転移動したベクトル $\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n$ と $\mathbf{v}_3^n (= \mathbf{v}_{\xi_3}^n)$ により、局所的な座標系を設定できる。

これより、ベクトル $\mathbf{v}_1^n, \mathbf{v}_2^n$ は次のようになる。

$$\mathbf{v}_1^n = \bar{\mathbf{v}}_1^n - \frac{\bar{\mathbf{v}}_1^n \cdot \mathbf{v}_3^n}{1 + \bar{\mathbf{v}}_3^n \cdot \mathbf{v}_3^n} (\bar{\mathbf{v}}_3^n + \mathbf{v}_3^n), \quad \mathbf{v}_2^n = \bar{\mathbf{v}}_2^n - \frac{\bar{\mathbf{v}}_2^n \cdot \mathbf{v}_3^n}{1 + \bar{\mathbf{v}}_3^n \cdot \mathbf{v}_3^n} (\bar{\mathbf{v}}_3^n + \mathbf{v}_3^n) \dots\dots\dots (17)$$

(2) 座標系の微分関係

正規座標系 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) と局所デカルト座標系 (x_1^n, x_2^n, x_3^n) のシェル中央面上での微分関係を求める。

位置ベクトル $\mathbf{X}^n$ のこれらの座標による微分には、次のような関係がある。

$$\left. \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial \xi_i} \right|_{z=0} = \frac{\partial x_j^n}{\partial \xi_i} \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial x_j^n} \right|_{z=0} = \frac{\partial x_j^n}{\partial \xi_i} \mathbf{v}_j^n \dots\dots\dots (18)$$

上式とベクトル $\mathbf{v}_j^n$ とのスカラー積をとると、次式が得られる。

$$\frac{\partial x_j^n}{\partial \xi_i} = \mathbf{v}_j^n \cdot \left. \frac{\partial \mathbf{X}^n}{\partial \xi_i} \right|_{z=0} \dots\dots\dots (19)$$

したがって、二つの座標系の微分関係とヤコビアンは次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \partial/\partial\xi_1 \\ \partial/\partial\xi_2 \\ \partial/\partial\xi_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^n \cdot \mathbf{x}_{,1}^n & \mathbf{v}_2^n \cdot \mathbf{x}_{,1}^n & 0 \\ \mathbf{v}_1^n \cdot \mathbf{x}_{,2}^n & \mathbf{v}_2^n \cdot \mathbf{x}_{,2}^n & 0 \\ \frac{t}{2}\mathbf{v}_1^n \cdot \mathbf{e}^n & \frac{t}{2}\mathbf{v}_2^n \cdot \mathbf{e}^n & \frac{t}{2}\mathbf{v}_3^n \cdot \mathbf{e}^n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial/\partial x_1^n \\ \partial/\partial x_2^n \\ \partial/\partial x_3^n \end{Bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

$$|\mathbf{J}^n| = \frac{\partial(x_1^n, x_2^n, x_3^n)}{\partial(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} = \frac{t}{2}(\mathbf{v}_3^n \cdot \mathbf{e}^n)|\mathbf{x}_{,1}^n \times \mathbf{x}_{,2}^n| \dots\dots\dots (21)$$

(3) 変位

シェル中央面上の任意点の変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{u}$ を、節点 k の変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{u}_k$ から次のように表す。

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{k=1}^p N_k(\xi_1, \xi_2) \Delta \mathbf{u}_k \dots\dots\dots (22)$$

また、第 $(n+1)$ 増分段階の単位ベクトル $\mathbf{e}_k^{n+1}$ は、第 n 増分段階の単位ベクトル $\mathbf{e}_k^n$ と、これらの増分間の回転 $\Delta \mathbf{R}_k$ により、次のように表される。

$$\mathbf{e}_k^{n+1} = \Delta \mathbf{R}_k \mathbf{e}_k^n \dots\dots\dots (23)$$

回転 $\Delta \mathbf{R}_k$ は、増分量の3次以上の高次項を省略すると、第 n 増分段階から第 $(n+1)$ 増分段階までの回転ベクトル $\Delta \boldsymbol{\theta}_k$ によって次のように表される¹⁴⁾。

$$\Delta \mathbf{R}_k = \mathbf{I} + \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2}\Delta \boldsymbol{\theta}_k\right)\Delta \boldsymbol{\theta}_k \dots\dots\dots (24)$$

なお、 $\Delta \boldsymbol{\theta}_k = \Delta \boldsymbol{\theta}_k \times \mathbf{I}$ である。

単位ベクトル $\mathbf{e}^{n+1}$ は、節点でのベクトル式(23)から式(13)と同様に表すと、次のようになる。

$$\mathbf{e}^{n+1} = \sum_{k=1}^p N_k(\xi_1, \xi_2) \mathbf{e}_k^{n+1} = \mathbf{e}^n + \sum_{k=1}^p N_k(\Delta \mathbf{R}_k - \mathbf{I}) \mathbf{e}_k^n \dots\dots\dots (25)$$

これより、変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{U}$ は、

$$\Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{u} + z(\mathbf{e}^{n+1} - \mathbf{e}^n) = \sum_{k=1}^p N_k \{ \Delta \mathbf{u}_k + z(\Delta \mathbf{R}_k - \mathbf{I}) \mathbf{e}_k^n \} \dots\dots\dots (26)$$

変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{U}$ の座標系 (x_1^n, x_2^n, x_3^n) での成分 Δu_{il} は、 $\Delta \mathbf{U}$ と $\mathbf{v}_i^n$ とのスカラー積により求められ、この式の $\Delta \mathbf{R}_k$ に式(24)を代入して、一般化変位 $\Delta \mathbf{d}_k$ でまとめると、式(1)の $\mathbf{a}_{ik}, \mathbf{A}_{ikl}$ が決定される。 z についてまとめて表すと次のようになる。

$$\mathbf{a}_{ik} = \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_{ik}^u \\ z \mathbf{a}_{ik}^\theta \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{ikl} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & z \mathbf{A}_{ikl}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (27)$$

ここに、 $\mathbf{a}_{ik}^u, \mathbf{a}_{ik}^\theta, \mathbf{A}_{ikl}^{\theta\theta}$ はシェル中央面上の座標の関数である。なお、一般化変位増分ベクトル $\Delta \mathbf{d}_k$ は、節点 k の変位と回転ベクトル $\Delta \mathbf{u}_k, \Delta \boldsymbol{\theta}_k$ から次のように与えられる。

$$\Delta \mathbf{d}_k = \{ \Delta \mathbf{u}_k^T, \Delta \boldsymbol{\theta}_k^T \}^T \dots\dots\dots (28)$$

(4) ひずみ

変位ベクトル(26)をデカルト座標 (x_1^n, x_2^n, x_3^n) で微分すると、

$$\frac{\partial \Delta \mathbf{U}}{\partial x_i^n} = \sum_{k=1}^p B_{ik} \{ \Delta \mathbf{u}_k + z(\Delta \mathbf{R}_k - \mathbf{I}) \mathbf{e}_k^n \} + \frac{\delta_{3i}}{\mathbf{v}_3^n \cdot \mathbf{e}^n} \sum_{k=1}^p N_k(\Delta \mathbf{R}_k - \mathbf{I}) \mathbf{e}_k^n \dots\dots\dots (29)$$

ここに、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり、 B_{ik} は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} B_{1k} &= \frac{\partial N_k}{\partial x_1^n} = \frac{|\mathbf{x}_2^n|}{|\mathbf{x}_1^n \times \mathbf{x}_2^n|} (\mathbf{v}_{\xi_2}^n \cdot \mathbf{v}_2^n) \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} - \frac{|\mathbf{x}_1^n|}{|\mathbf{x}_1^n \times \mathbf{x}_2^n|} (\mathbf{v}_{\xi_1}^n \cdot \mathbf{v}_2^n) \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ B_{2k} &= \frac{\partial N_k}{\partial x_2^n} = -\frac{|\mathbf{x}_2^n|}{|\mathbf{x}_1^n \times \mathbf{x}_2^n|} (\mathbf{v}_{\xi_2}^n \cdot \mathbf{v}_1^n) \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + \frac{|\mathbf{x}_1^n|}{|\mathbf{x}_1^n \times \mathbf{x}_2^n|} (\mathbf{v}_{\xi_1}^n \cdot \mathbf{v}_1^n) \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ B_{3k} &= \frac{\partial N_k}{\partial x_3^n} = -\frac{|\mathbf{x}_2^n|}{|\mathbf{x}_1^n \times \mathbf{x}_2^n|} (\mathbf{v}_{\xi_1}^n \cdot \mathbf{e}^n) \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} - \frac{|\mathbf{x}_1^n|}{|\mathbf{x}_1^n \times \mathbf{x}_2^n|} (\mathbf{v}_{\xi_2}^n \cdot \mathbf{e}^n) \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (30)$$

座標系 (x_1^n, x_2^n, x_3^n) でのグリーンのひずみは、次のように定義される。

$$\Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{v}_i^n \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{U}}{\partial x_j^n} + \mathbf{v}_j^n \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{U}}{\partial x_i^n} + \frac{\partial \Delta \mathbf{U}}{\partial x_i^n} \cdot \frac{\partial \Delta \mathbf{U}}{\partial x_j^n} \right) \dots\dots\dots (31)$$

上式に式 (29) を代入して、 $\Delta \mathbf{u}_k, \Delta \boldsymbol{\theta}_k$ の 3 次以上の項を省略すると、

$$\left. \begin{aligned} \Delta \varepsilon_{11} &= \sum_{k=1}^p B_{1k} (\mathbf{w}_1^n \cdot \Delta \mathbf{u}_k + z \bar{\mathbf{w}}_1^n \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}_k \mathbf{e}_k^n) \\ \Delta \varepsilon_{22} &= \sum_{k=1}^p B_{2k} (\mathbf{w}_2^n \cdot \Delta \mathbf{u}_k + z \bar{\mathbf{w}}_2^n \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}_k \mathbf{e}_k^n) \\ 2\Delta \varepsilon_{12} &= \sum_{k=1}^p B_{2k} (\mathbf{w}_1^n \cdot \Delta \mathbf{u}_k + z \bar{\mathbf{w}}_1^n \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}_k \mathbf{e}_k^n) + \sum_{k=1}^p B_{1k} (\mathbf{w}_2^n \cdot \Delta \mathbf{u}_k + z \bar{\mathbf{w}}_2^n \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}_k \mathbf{e}_k^n) \\ 2\Delta \varepsilon_{13} &= \sum_{k=1}^p \left\{ (B_{1k} \mathbf{w}_3^n + B_{3k} \mathbf{w}_1^n)^T \Delta \mathbf{u}_k + \frac{N_k}{\mathbf{v}_3^n \cdot \mathbf{e}^n} \bar{\mathbf{w}}_1^n \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}_k \mathbf{e}_k^n \right\} \\ 2\Delta \varepsilon_{23} &= \sum_{k=1}^p \left\{ (B_{2k} \mathbf{w}_3^n + B_{3k} \mathbf{w}_2^n)^T \Delta \mathbf{u}_k + \frac{N_k}{\mathbf{v}_3^n \cdot \mathbf{e}^n} \bar{\mathbf{w}}_2^n \cdot \Delta \boldsymbol{\theta}_k \mathbf{e}_k^n \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (32)$$

ここに、シェル面内のひずみ $\Delta \varepsilon_{11}, \Delta \varepsilon_{22}, \Delta \varepsilon_{12}$ は、 z に関する線形項まで考慮し、面外せん断ひずみ $\Delta \varepsilon_{13}, \Delta \varepsilon_{23}$ は、 z に関する定数項だけを考慮している。また、 $\mathbf{w}_i^n, \bar{\mathbf{w}}_i^n$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{w}_i^n = \mathbf{v}_i^n + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^p B_{il} \Delta \mathbf{u}_l, \quad \bar{\mathbf{w}}_i^n = \mathbf{v}_i^n + \sum_{l=1}^p B_{il} \Delta \mathbf{u}_l - \frac{1}{2} \Delta \boldsymbol{\theta}_k \mathbf{v}_i^n \dots\dots\dots (33)$$

このひずみも、変位の場合と同様に式 (2) のように表現でき、式 (2) の $\mathbf{b}_{ik}, \mathbf{B}_{ikl}$ が決定される。式 (2) の $\mathbf{b}_{ik}, \mathbf{B}_{ikl}$ を z に関して陽な形で表すと次のようになる。

$$\mathbf{b}_{ik} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_{ik}^u \\ z \mathbf{c}_{ik}^{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ikl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ikl}^{uu} & z \mathbf{C}_{ikl}^{u\theta} \\ z \mathbf{C}_{ikl}^{\theta u} & z \mathbf{C}_{ikl}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, 3) \dots\dots\dots (34)$$

$$\mathbf{b}_{ik} = \begin{Bmatrix} \mathbf{b}_{ik}^u \\ \mathbf{b}_{ik}^{\theta} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{ikl} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{ikl}^{uu} & \mathbf{B}_{ikl}^{u\theta} \\ \mathbf{B}_{ikl}^{\theta u} & \mathbf{B}_{ikl}^{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad (i = 4, 5) \dots\dots\dots (35)$$

なお、式 (32) の $\Delta \varepsilon_{11}, \Delta \varepsilon_{22}, 2\Delta \varepsilon_{12}, 2\Delta \varepsilon_{13}, 2\Delta \varepsilon_{23}$ と式 (2) の $\Delta \varepsilon_i$ ($i = 1 \sim 5$) がそれぞれ対応している。

4. 選択積分法

式 (8) に、式 (34), (35) を代入して数値積分を行うと、剛性行列と応力による等価節点力ベクトルが得られる。ここでは、膜剛性、面外せん断剛性と面外曲げ剛性ごとに積分点の数を変えた剛性選択積分法²⁾と、各ひずみ成分の積に対応した剛性ごとに積分点の数を変えたひずみ選択積分法について示す。

(1) 剛性選択積分法

剛性行列 $\mathbf{k}_{kl}^L, \mathbf{k}_{kl}^N$ と応力による等価節点力ベクトル $\mathbf{f}_k$ を、膜剛性、面外曲げ剛性と面外せん断剛性に分けることができる。

$$\mathbf{k}_{kl}^L = \mathbf{k}_{kl}^{Lm} + \mathbf{k}_{kl}^{Lb} + \mathbf{k}_{kl}^{Ls}, \quad \mathbf{k}_{kl}^N = \mathbf{k}_{kl}^{Nm} + \mathbf{k}_{kl}^{Nb} + \mathbf{k}_{kl}^{Ns}, \quad \mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k^m + \mathbf{f}_k^b + \mathbf{f}_k^s \dots\dots\dots (36)$$

- 4節点要素の積分点
- 9節点要素の積分点

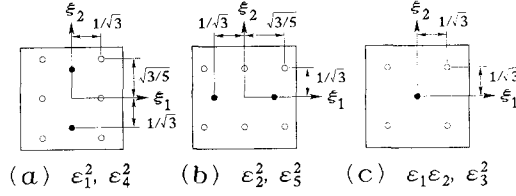


図-2 ひずみ選択積分法の積分点

ここに、右肩添え字 m, b, s のついた諸量は、それぞれ膜剛性、面外曲げ剛性と面外せん断剛性に関する諸量を表している。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{kl}^{Lm} &= t \int_A \begin{bmatrix} E'(\mathbf{b}_{1k}^u \mathbf{b}_{1l}^{uT} + \mathbf{b}_{2k}^u \mathbf{b}_{2l}^{uT}) + \nu E'(\mathbf{b}_{1k}^u \mathbf{b}_{2l}^{uT} + \mathbf{b}_{2k}^u \mathbf{b}_{1l}^{uT}) + G \mathbf{b}_{3k}^u \mathbf{b}_{3l}^{uT} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{Lb} &= \frac{t^3}{12} \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & E'(c_{1k}^\theta c_{1l}^{\theta T} + c_{2k}^\theta c_{2l}^{\theta T}) + \nu E'(c_{1k}^\theta c_{2l}^{\theta T} + c_{2k}^\theta c_{1l}^{\theta T}) + G c_{3k}^\theta c_{3l}^{\theta T} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{Ls} &= t \kappa G \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{4k}^u \mathbf{b}_{4l}^{uT} + \mathbf{b}_{5k}^u \mathbf{b}_{5l}^{uT} & \mathbf{b}_{4k}^u \mathbf{b}_{4l}^{\theta T} + \mathbf{b}_{5k}^u \mathbf{b}_{5l}^{\theta T} \\ \mathbf{b}_{4k}^\theta \mathbf{b}_{4l}^{uT} + \mathbf{b}_{5k}^\theta \mathbf{b}_{5l}^{uT} & \mathbf{b}_{4k}^\theta \mathbf{b}_{4l}^{\theta T} + \mathbf{b}_{5k}^\theta \mathbf{b}_{5l}^{\theta T} \end{bmatrix} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (37)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{kl}^{Nm} &= \int_A \begin{bmatrix} N_1^n \mathbf{B}_{1kl}^{uu} + N_2^n \mathbf{B}_{2kl}^{uu} + N_3^n \mathbf{B}_{3kl}^{uu} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{Nb} &= \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{O} & M_1^n \mathbf{C}_{1kl}^{u\theta} + M_2^n \mathbf{C}_{2kl}^{u\theta} + M_3^n \mathbf{C}_{3kl}^{u\theta} \\ M_1^n \mathbf{C}_{1kl}^{\theta u} + M_2^n \mathbf{C}_{2kl}^{\theta u} + M_3^n \mathbf{C}_{3kl}^{\theta u} & M_1^n \mathbf{C}_{1kl}^{\theta\theta} + M_2^n \mathbf{C}_{2kl}^{\theta\theta} + M_3^n \mathbf{C}_{3kl}^{\theta\theta} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{Ns} &= \int_A \begin{bmatrix} N_4^n \mathbf{B}_{4kl}^{uu} + N_5^n \mathbf{B}_{5kl}^{uu} & N_4^n \mathbf{B}_{4kl}^{u\theta} + N_5^n \mathbf{B}_{5kl}^{u\theta} \\ N_4^n \mathbf{B}_{4kl}^{\theta u} + N_5^n \mathbf{B}_{5kl}^{\theta u} & N_4^n \mathbf{B}_{4kl}^{\theta\theta} + N_5^n \mathbf{B}_{5kl}^{\theta\theta} \end{bmatrix} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_k^m &= \int_A \begin{bmatrix} N_1^n \mathbf{b}_{1k}^u + N_2^n \mathbf{b}_{2k}^u + N_3^n \mathbf{b}_{3k}^u \\ \mathbf{O} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{f}_k^b &= \int_A \begin{bmatrix} \mathbf{O} \\ M_1^n \mathbf{c}_{1k}^\theta + M_2^n \mathbf{c}_{2k}^\theta + M_3^n \mathbf{c}_{3k}^\theta \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{f}_k^s &= \int_A \begin{bmatrix} N_4^n \mathbf{b}_{4k}^u + N_5^n \mathbf{b}_{5k}^u \\ N_4^n \mathbf{b}_{4k}^\theta + N_5^n \mathbf{b}_{5k}^\theta \end{bmatrix} dA \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (39)$$

なお、 N_i^n, M_i^n はそれぞれ次式で与えられる。

$$N_i^n = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^n dz, \quad M_i^n = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_i^n z dz \dots\dots\dots (40)$$

また、微小面積 dA は、正規座標 ξ_1, ξ_2 から次のように表される。

$$dA = (\mathbf{v}_3^n \cdot \mathbf{e}^n) |\mathbf{x}_{,1}^n \times \mathbf{x}_{,2}^n| d\xi_1 d\xi_2 \dots\dots\dots (41)$$

表-1 ひずみの座標に関する次数 (ξ_1, ξ_2)

ひずみ	9 節点要素	4 節点要素
ε_1	(1,2)	(0,1)
ε_2	(2,1)	(1,0)
ε_3	$(2,1)+(1,2) \rightarrow (1,1)$	$(1,0)+(0,1) \rightarrow (0,0)$
ε_4	$(2,2)+(1,2) \rightarrow (1,2)$	$(1,1)+(0,1) \rightarrow (0,1)$
ε_5	$(2,2)+(2,1) \rightarrow (2,1)$	$(1,1)+(1,0) \rightarrow (1,0)$

(ξ_1, ξ_2) の数字：座標 ξ_1, ξ_2 に関する次数

(2) ひずみ選択積分法

線形剛性行列 $\mathbf{k}_{kl}^L$ の式 (8) に式 (4) を代入すると次式が得られる。

$$\mathbf{k}_{kl}^L = \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \int_V \left\{ E' [\mathbf{b}_{1k} \mathbf{b}_{1l}^T] + E' [\mathbf{b}_{2k} \mathbf{b}_{2l}^T] + \nu E' [\mathbf{b}_{1k} \mathbf{b}_{2l}^T + \mathbf{b}_{2k} \mathbf{b}_{1l}^T] \right. \\ \left. + G [\mathbf{b}_{3k} \mathbf{b}_{3l}^T] + \kappa G [\mathbf{b}_{4k} \mathbf{b}_{4l}^T] + \kappa G [\mathbf{b}_{5k} \mathbf{b}_{5l}^T] \right\} dV \dots\dots\dots (42)$$

上式より、被積分関数は、 $(\Delta\varepsilon_1)^2, (\Delta\varepsilon_2)^2, \Delta\varepsilon_1\Delta\varepsilon_2, (\Delta\varepsilon_3)^2, (\Delta\varepsilon_4)^2, (\Delta\varepsilon_5)^2$ の 6 種類のひずみの積の項から成っていることが分かる。接線剛性行列 $\mathbf{k}_{kl}^L$ 、等価節点力ベクトル $\mathbf{f}_k$ についても、応力 σ_i^n を初期状態からのひずみ ε_i^n で表すと、上述と同様な 6 種類の項で表される。

いま、変位関数 $N_k(\xi_1, \xi_2)$ に、双 2 次ラグランジュ補間関数を用いた 9 節点長方形シェル要素の線形剛性行列の被積分関数の次数を考える。この場合には、表-1 のように、ひずみ $\Delta\varepsilon_1$ は ξ_1 方向に 1 次、 ξ_2 方向に 2 次、 $\Delta\varepsilon_2$ はそれぞれ 2 次と 1 次の多項式で表される。したがって、ひずみの積 $(\Delta\varepsilon_1)^2, (\Delta\varepsilon_2)^2, \Delta\varepsilon_1\Delta\varepsilon_2$ を正確に数値積分するためには、それぞれ図-2.(a),(b),(c) に示しているような積分点数が必要である。

せん断ひずみ $\Delta\varepsilon_3$ は、 x_1 と x_2 の方向の変位の微係数の和で表され、それぞれ微分する座標が異なり、 x_1 方向の変位の ξ_2 による微分値は ξ_1 に関して 2 次、 ξ_2 に関して 1 次、 x_2 方向の変位の ξ_1 による微分値は ξ_1 に関して 1 次、 ξ_2 に関して 2 次となっていることから、次数が揃っていない。残りのせん断ひずみ $\Delta\varepsilon_4, \Delta\varepsilon_5$ についても同様である。次数が揃っている最高次の次数まで正確に数値積分することになると、 $(\Delta\varepsilon_3)^2, (\Delta\varepsilon_4)^2, (\Delta\varepsilon_5)^2$ を正確に数値積分するためには、それぞれ図-2.(c),(a),(b) に示しているような積分点数が必要である。

幾何剛性行列 $\mathbf{k}_{kl}^N$ や等価節点力ベクトル $\mathbf{f}_k$ は、非線形項が含まれるために、より高次の多項式になる。また、要素形状が複雑な場合にはヤコビアンに高次の多項式が含まれることになり、より多くの積分点数が必要であるが、これらの場合にも図-2 に示しているような積分点数を用いる。

ところで、 $(\Delta\varepsilon_1)^2, (\Delta\varepsilon_2)^2$ の積分を求めるときにひずみ $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2$ を評価する点と、 $\Delta\varepsilon_1\Delta\varepsilon_2$ の積分を求めるときにひずみ $\Delta\varepsilon_1, \Delta\varepsilon_2$ を評価する点が異なっているが、それぞれの場合でその積分点のひずみを、式 (32) から求めると計算精度が良くない。そこで、 $\Delta\varepsilon_1\Delta\varepsilon_2$ の積分を求めるときの積分点の値を、 $(\Delta\varepsilon_1)^2, (\Delta\varepsilon_2)^2$ の積分を求めるときに用いる積分点の値から補間することにする。このとき用いる補間関数は、ひずみ $\Delta\varepsilon_1$ では図-2.(a) の積分点の位置から決定されるラグランジュ補間関数を用い、ひずみ $\Delta\varepsilon_2$ では図-2.(b) の積分点の位置から決定されるラグランジュ補間関数を用いる。

以上のことを考慮して、剛性行列 $\mathbf{k}_{kl}^L, \mathbf{k}_{kl}^N$ と等価節点力ベクトル $\mathbf{f}_k$ を、次のように 3 つに分割する。

$$\mathbf{k}_{kl}^L = \mathbf{k}_{kl}^{L1} + \mathbf{k}_{kl}^{L2} + \mathbf{k}_{kl}^{L3}, \quad \mathbf{k}_{kl}^N = \mathbf{k}_{kl}^{N1} + \mathbf{k}_{kl}^{N2} + \mathbf{k}_{kl}^{N3}, \quad \mathbf{f}_k = \mathbf{f}_k^1 + \mathbf{f}_k^2 + \mathbf{f}_k^3 \dots\dots\dots (43)$$

ここに、右肩添え字 1 の付いた諸量は、ひずみの積 $(\varepsilon_1^n)^2, (\varepsilon_4^n)^2$ 、添え字 2 の付いた諸量は $(\varepsilon_2^n)^2, (\varepsilon_5^n)^2$ 、また添え字 3 の付いた諸量は、残りの積 $(\varepsilon_3^n)^2, \varepsilon_1^n\varepsilon_2^n$ に関するものである。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{kl}^{L1} &= \int_A \begin{bmatrix} tE' \mathbf{b}_{1k}^u \mathbf{b}_{1l}^{uT} + t\kappa G \mathbf{b}_{4k}^u \mathbf{b}_{4l}^{uT} & t\kappa G \mathbf{b}_{4k}^u \mathbf{b}_{4l}^{\theta T} \\ t\kappa G \mathbf{b}_{4k}^{\theta} \mathbf{b}_{4l}^{uT} & \frac{t^3}{12} E' \mathbf{c}_{1k}^{\theta} \mathbf{c}_{1l}^{\theta T} + t\kappa G \mathbf{b}_{4k}^{\theta} \mathbf{b}_{4l}^{\theta T} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{L2} &= \int_A \begin{bmatrix} tE' \mathbf{b}_{2k}^u \mathbf{b}_{2l}^{uT} + t\kappa G \mathbf{b}_{5k}^u \mathbf{b}_{5l}^{uT} & t\kappa G \mathbf{b}_{5k}^u \mathbf{b}_{5l}^{\theta T} \\ t\kappa G \mathbf{b}_{5k}^{\theta} \mathbf{b}_{5l}^{uT} & \frac{t^3}{12} E' \mathbf{c}_{2k}^{\theta} \mathbf{c}_{2l}^{\theta T} + t\kappa G \mathbf{b}_{5k}^{\theta} \mathbf{b}_{5l}^{\theta T} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{L3} &= \int_A \begin{bmatrix} t\{\nu E'(\hat{\mathbf{b}}_{1k}^u \hat{\mathbf{b}}_{2l}^{uT} + \hat{\mathbf{b}}_{2k}^u \hat{\mathbf{b}}_{1l}^{uT}) + G \mathbf{b}_{3k}^u \mathbf{b}_{3l}^{uT}\} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \frac{t^3}{12} \{\nu E'(\hat{\mathbf{c}}_{1k}^u \hat{\mathbf{c}}_{2l}^{uT} + \hat{\mathbf{c}}_{2k}^u \hat{\mathbf{c}}_{1l}^{uT}) + G \mathbf{c}_{3k}^u \mathbf{c}_{3l}^{uT}\} \end{bmatrix} dA \end{aligned} \right\} \dots (44)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{k}_{kl}^{N1} &= \int_A \begin{bmatrix} tE' \varepsilon_{10}^n \mathbf{B}_{1kl}^{uu} + t\kappa G \varepsilon_{40}^n \mathbf{B}_{4kl}^{uu} & \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{11}^n \mathbf{C}_{1kl}^{u\theta} + t\kappa G \varepsilon_{40}^n \mathbf{B}_{4kl}^{u\theta} \\ \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{11}^n \mathbf{C}_{1kl}^{\theta u} + t\kappa G \varepsilon_{40}^n \mathbf{B}_{4kl}^{\theta u} & \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{11}^n \mathbf{C}_{1kl}^{\theta\theta} + t\kappa G \varepsilon_{40}^n \mathbf{B}_{4kl}^{\theta\theta} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{N2} &= \int_A \begin{bmatrix} tE' \varepsilon_{20}^n \mathbf{B}_{2kl}^{uu} + t\kappa G \varepsilon_{50}^n \mathbf{B}_{5kl}^{uu} & \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{21}^n \mathbf{C}_{2kl}^{u\theta} + t\kappa G \varepsilon_{50}^n \mathbf{B}_{5kl}^{u\theta} \\ \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{21}^n \mathbf{C}_{2kl}^{\theta u} + t\kappa G \varepsilon_{50}^n \mathbf{B}_{5kl}^{\theta u} & \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{21}^n \mathbf{C}_{2kl}^{\theta\theta} + t\kappa G \varepsilon_{50}^n \mathbf{B}_{5kl}^{\theta\theta} \end{bmatrix} dA \\ \mathbf{k}_{kl}^{N3} &= \int_A \left[\begin{aligned} & t\{\nu E'(\hat{\varepsilon}_{20}^n \hat{\mathbf{B}}_{1kl}^{uu} + \hat{\varepsilon}_{10}^n \hat{\mathbf{B}}_{2kl}^{uu}) + G \varepsilon_{30}^n \mathbf{B}_{3kl}^{uu}\} & \frac{t^3}{12} \{\nu E'(\hat{\varepsilon}_{21}^n \hat{\mathbf{C}}_{1kl}^{u\theta} + \hat{\varepsilon}_{11}^n \hat{\mathbf{C}}_{2kl}^{u\theta}) + G \varepsilon_{31}^n \mathbf{C}_{3kl}^{u\theta}\} \\ & \frac{t^3}{12} \{\nu E'(\hat{\varepsilon}_{21}^n \hat{\mathbf{C}}_{1kl}^{\theta u} + \hat{\varepsilon}_{11}^n \hat{\mathbf{C}}_{2kl}^{\theta u}) + G \varepsilon_{31}^n \mathbf{C}_{3kl}^{\theta u}\} & \frac{t^3}{12} \{\nu E'(\hat{\varepsilon}_{21}^n \hat{\mathbf{C}}_{1kl}^{\theta\theta} + \hat{\varepsilon}_{11}^n \hat{\mathbf{C}}_{2kl}^{\theta\theta}) + G \varepsilon_{31}^n \mathbf{C}_{3kl}^{\theta\theta}\} \end{aligned} \right] dA \end{aligned} \right\} (45)$$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_k^1 &= \int_A \left\{ \begin{aligned} & tE' \varepsilon_{10}^n \mathbf{b}_{1k}^u + t\kappa G \varepsilon_{40}^n \mathbf{b}_{4k}^u \\ & \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{11}^n \mathbf{c}_{1k}^{\theta} + t\kappa G \varepsilon_{40}^n \mathbf{b}_{4k}^{\theta} \end{aligned} \right\} dA \\ \mathbf{f}_k^2 &= \int_A \left\{ \begin{aligned} & tE' \varepsilon_{20}^n \mathbf{b}_{2k}^u + t\kappa G \varepsilon_{50}^n \mathbf{b}_{5k}^u \\ & \frac{t^3}{12} E' \varepsilon_{21}^n \mathbf{c}_{2k}^{\theta} + t\kappa G \varepsilon_{50}^n \mathbf{b}_{5k}^{\theta} \end{aligned} \right\} dA \\ \mathbf{f}_k^3 &= \int_A \left\{ \begin{aligned} & t\{\nu E'(\hat{\varepsilon}_{10}^n \hat{\mathbf{b}}_{2k}^u + \hat{\varepsilon}_{20}^n \hat{\mathbf{b}}_{1k}^u) + G \varepsilon_{30}^n \mathbf{b}_{3k}^u\} \\ & \frac{t^3}{12} \{\nu E'(\hat{\varepsilon}_{11}^n \hat{\mathbf{c}}_{2k}^{\theta} + \hat{\varepsilon}_{21}^n \hat{\mathbf{c}}_{1k}^{\theta}) + G \varepsilon_{31}^n \mathbf{c}_{3k}^{\theta}\} \end{aligned} \right\} dA \end{aligned} \right\} \dots (46)$$

なお、ひずみ ε_{i0}^n ($i = 1 \sim 5$)、 ε_{i1}^n ($i = 1, 2, 3$) は、それぞれひずみ ε_i^n のシェル中央面上の量と、その板厚方向の変化量を表している。また、前述のように $\mathbf{k}_{kl}^{L3}$ 、 $\mathbf{k}_{kl}^{N3}$ 、 $\mathbf{f}_k^3$ に含まれるひずみ ε_1 に関する諸量 $\hat{\varepsilon}_{10}^n$ 、 $\hat{\varepsilon}_{11}^n$ 、 $\hat{\mathbf{b}}_{1k}^u$ 、 $\hat{\mathbf{c}}_{1k}^{\theta}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}_{1kl}^{uu}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}_{1kl}^{u\theta}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}_{1kl}^{\theta u}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}_{1kl}^{\theta\theta}$ は、 $\mathbf{k}_{kl}^{L1}$ 、 $\mathbf{k}_{kl}^{N1}$ 、 $\mathbf{f}_k^1$ を求める際に用いた積分点での値から補間した値を用い、ひずみ ε_2 に関する諸量 $\hat{\varepsilon}_{20}^n$ 、 $\hat{\varepsilon}_{21}^n$ 、 $\hat{\mathbf{b}}_{2k}^u$ 、 $\hat{\mathbf{c}}_{2k}^{\theta}$ 、 $\hat{\mathbf{B}}_{2kl}^{uu}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}_{2kl}^{u\theta}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}_{2kl}^{\theta u}$ 、 $\hat{\mathbf{C}}_{2kl}^{\theta\theta}$ についても同様に $\mathbf{k}_{kl}^{L2}$ 、 $\mathbf{k}_{kl}^{N2}$ 、 $\mathbf{f}_k^2$ を求める際に用いた積分点での値から補間した値を用いている。

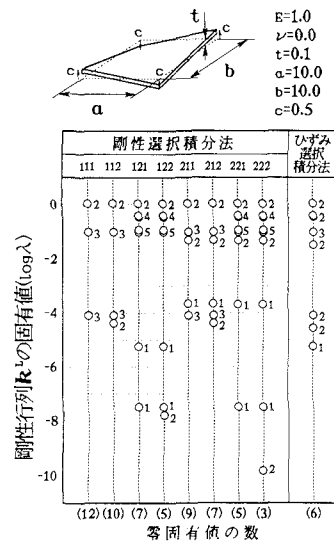
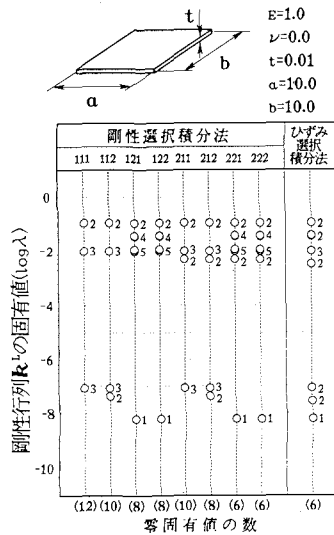
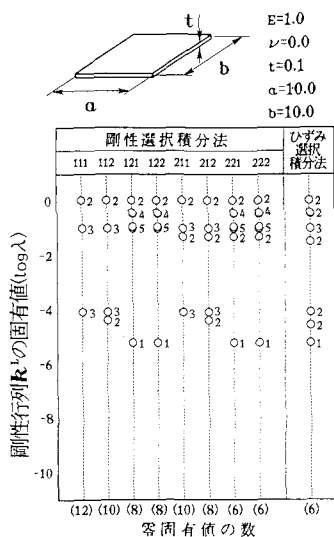
Prathap ら¹²⁾や Kanok-Nukulchai ら¹³⁾は、曲げによるせん断剛性を対象にして積分方法を工夫しているが、曲げ剛性や膜ロッキングが問題になる面内剛性の積分を行う際の上述のようなひずみの補間は行われていない。

5. 数値計算例

(1) 剛性行列の固有値

4 節ラグランジュ要素について、ひずみ選択積分法により求めた一要素の線形剛性行列の固有値を、従来の剛性に関する選択積分法により求めた剛性行列の固有値と比較することにより、ロッキングや特異性について考察する。

図-3,4,5は、それぞれ板厚が辺の長さの1/100, 1/1000の平面正方形シェルと板厚が辺の長さの1/100の双1次曲面シェルについて、ひずみ選択積分法による剛性行列の固有値と、剛性選択積分法による剛性行列の固有値を示している。ただし、剛性ごとに積分点数を変えた方法は、膜剛性、面外せん断剛性と面外曲げ剛性について正確な積分が行える2点積分と積分点数を減らした1点積分による組合せのすべてについて示している。また、図上の三桁の数字は一桁目からそれぞれ面外曲げ、面外せん断と膜剛性に関する積分点数を表している。これらの図中の数字は近接あるいは重複した固有値 λ の数を表しており、図下の括弧内の数字



は 20 個 (20 自由度) の固有値の中の零固有値の数を表している。なお、 10^{-15} 程度の固有値を零固有値として扱っている。

一般に要素の剛性行列は、剛体変位の自由度数に相当する零固有値をもち、それより零固有値の数が少なければ剛体変位によって要素内に応力が発生することになり、零固有値の数が多ければ構造全体の剛性行列が特異になる。図-3,4では、ひずみ選択積分法と、膜剛性と面外せん断剛性に関して正確に積分を行った方法では、零固有値の数が空間での剛体変位の自由度数に一致しているが、これら以外の積分点数の場合には零固有値の数が剛体変位の自由度数よりも多くなっていることから、構造物の支持条件によっては解析が行えない場合がある。図-5では、ひずみ選択積分法は、零固有値の数が空間での剛体変位の自由度数に一致しているが、膜剛性と面外せん断剛性に関して正確に積分を行った場合には、零固有値の数が空間での剛体変位の自由度数よりも少なく、これら以外の積分点数の場合には零固有値の数が剛体変位の自由度数よりも多くなっている。

以上のことから、膜剛性と面外せん断剛性を正確に積分した方法ではシェル面が曲面状になった場合に剛体変位によりひずみエネルギーが発生し、ロッキングを起す。また、これら以外の積分点数の組合せの場合には零固有値の数が剛体変位の自由度数よりも多くなり剛性行列が特異になる等の問題点がある。ひずみ選択積分法ではこれらの問題が生じないことが分かる。

(2) 線形解析

本文に示したアイソパラメトリックシェル要素の線形剛性行列には、各節点の面内回転に関する剛性が含まれていないため、同一節点に集まるすべてのシェル要素の中央面の法線方向が一致している場合には、行列が特異になり数値計算が困難になる。そこで、文献 1) に示されているように、仮想回転剛性を、法線が一致する節点に付加し、文献 5) に示された 3 つの計算例を、本論文でも用いてひずみ選択積分の有効性を示す。これらの計算例は、選択積分における特異性を回避する Belytschko らの手法⁵⁾の有効性を確認するために用いられたものである。

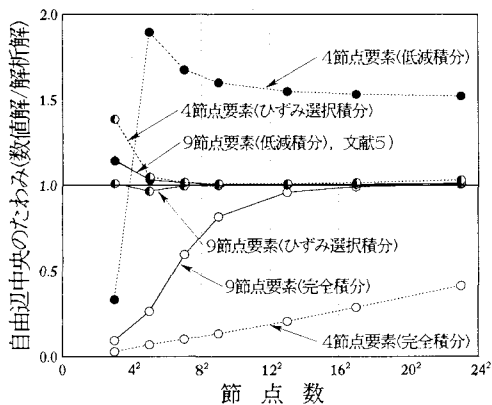
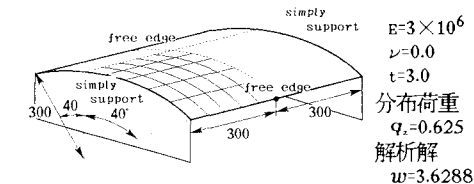


図-6 円筒シェル屋根

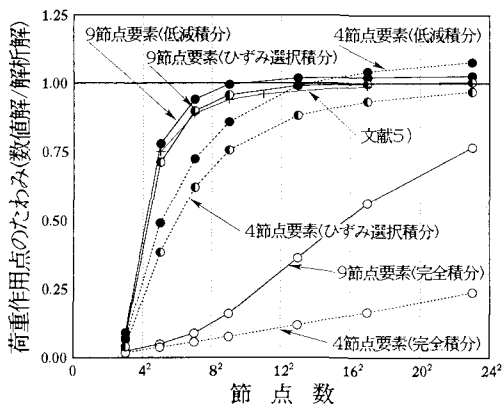
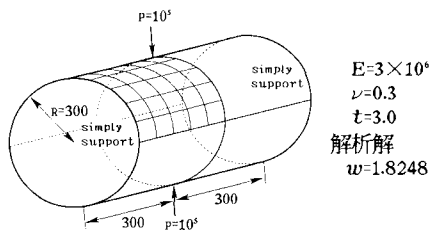


図-7 円筒シェル

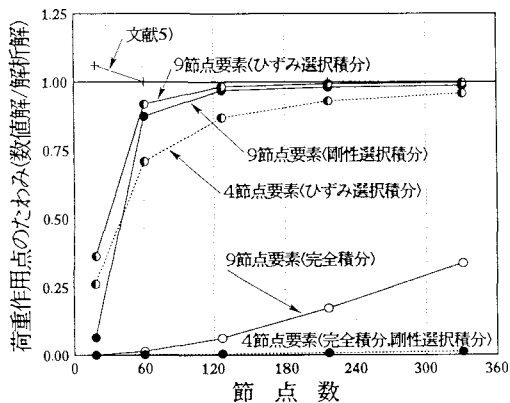
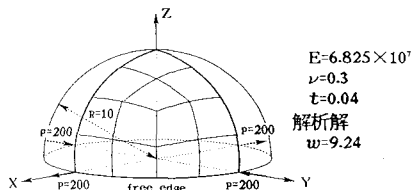


図-8 半球形シェル

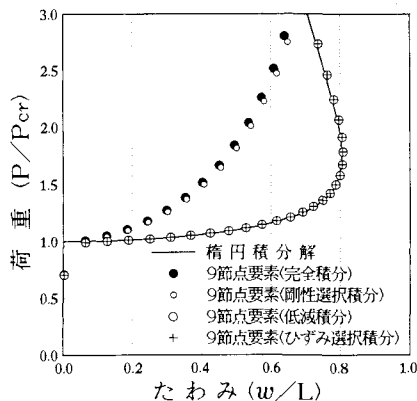
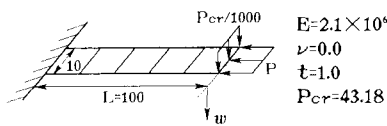


図-9 片持ち板

る。これは、図-3,4,5から明らかなように積分点数を少なくすると、変形モードの幾つかが失われるが、低減積分では、正解に収束するために必要なモードが剛性行列に含まれていないために、このような結果になったものと思われる。これに対して、ひずみ選択積分では、9節点要素による低減積分やひずみ選択積分による結果と同程度の精度が得られている。

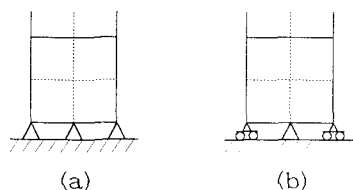


図-10 面内支持条件

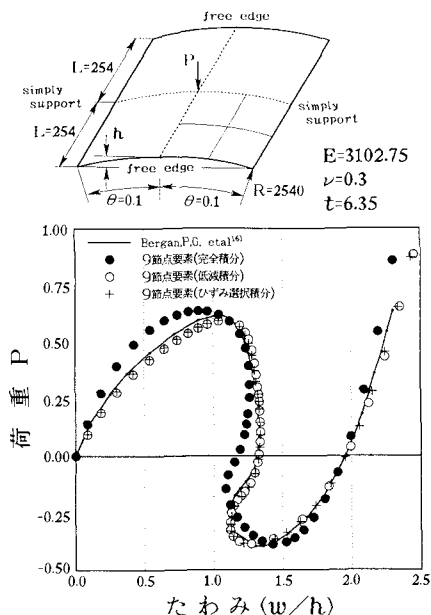


図-11 部分円筒シェル

図-7は、一対の集中荷重が作用した両端で単純支持された円筒シェルの8分の1の領域を有限要素分割したときの荷重作用点のたわみを表している。この図も前の図と同様にひずみ選択積分は精度の良い結果を得ている。これらの図で完全積分は、9節点要素では 3×3 点、4節点要素では 2×2 点の gauss 積分を用い、低減積分では、それぞれ 2×2 点、 1×1 点積分を用いている。

図-8は、対になった二組の集中荷重が作用した半球シェルの4分の1の領域を有限要素分割したときの荷重作用点の作用方向変位を表している。この場合にもひずみ選択積分では精度のよい解を得ている。この計算例は、低減積分では剛性行列が特異になり、解が求められない。図に示している剛性選択積分は、膜剛性と面外曲げ剛性を低減積分により求め、面外せん断剛性は完全積分により求めている。

また、ひずみ選択積分による結果を Belytschko らの結果⁵⁾(9節点要素)と比較すると、ほぼ同程度の精度が得られている。Belytschko らの手法は、低減積分により生じた特異モードに対する付加的な剛性を剛性行列に加えることにより特異性を回避しているが、この方法は種々の要素について特異なモードを陽な形で見いださなければならない。

(3) 有限変位解析

回転を有限回転として扱うと回転の連成が生じて前述のような面内回転剛性の不足による剛性行列の特異性はなくなるが、回転量の大小によっては疑似特異な状態になることがある。そこで、有限変位解析においても前述の仮想回転剛性を接線剛性行列に付加する。

ところで、線形剛性行列の場合には面内回転と曲げによる面外回転が独立になっているので、仮想回転剛性を付加しても、解に影響を与えないが、接線剛性行列では仮想回転剛性の値により、剛性方程式を解いた結果に影響を与える。しかし、有限変位解析の定式化には更新ラグランジュの手法を用い、解法には増分法とニュートンラプソン法を併用すると、仮想回転剛性はニュートン法の反復回数に影響を与えるが、解の精度は等価節点力ベクトル f により決まる。仮想回転剛性は応力による等価節点力ベクトルには付加しないので各増分段階の収束時の解には影響を与えない。

図-9は、一端が固定支持された片持ち板の自由端の面外方向に面内圧縮による座屈荷重 P_{cr} の1/1000倍が

作用した場合の圧縮荷重 P と自由端の面外たわみ w の関係を表している。この問題は、エラスチカと呼ばれ、楕円積分による解が示されている¹⁵⁾。図のような寸法比の板の場合には、エラスチカの解析仮定の適用範囲内に入るので、楕円積分による解を、この問題の正解と見なす。この解と比べると、完全積分による解は精度がかなり悪い。これに対して、低減積分やひずみ選択積分による結果は5要素(9節点要素)程度の少ない要素分割でも、精度のよい解を得ている。

この計算例の支持条件は、並進変位と面外回転のすべてを拘束している。面内支持条件を図-10.(a)に示す。ところで、図-10.(b)のように板の両端で幅方向の変位を自由な状態にしても、St.-Venantの原理よりこの構造全体の挙動にはわずかの違いしか現れない。このような支持条件で計算を行った場合にも、完全積分やひずみ選択積分による結果は、図-9と同一になる。しかし、低減積分による場合には、剛性行列が特異になり計算不能になる。ひずみ選択積分に依らないで、完全積分より精度の良い解は、膜剛性を完全積分、残りの剛性を低減積分により求めた場合に得られ、結果は図-9に示している通りであるが、完全積分による結果よりわずかに正解に近付いているだけである。

図-11は、単純支持された部分円筒シェルの中央に集中荷重が作用した場合の荷重作用点のたわみと荷重の関係、対称性を考慮して4分の1の領域を9節点要素で4分割した場合について示している。この計算例では、釣り合い曲線が複雑な曲線を呈しているが、低減積分やひずみ選択積分による方法では、修正ハイブリット応力法により定式化された三角形要素により計算した Bergan らの結果¹⁶⁾に、近い結果を得ている。

なお、これらの計算例では、すべての節点において反復段階での変位と等価節点力の修正量がそれらの増分量の1/1000以下に収まるまで反復計算を行っている。また、これらの計算例は変位増分法を用い、図-9の例では、荷重作用点中央の節点の回転角を制御パラメータに採り、図-11の例では、荷重作用点のたわみを採り、途中から単純支持辺中央の回転角を制御パラメータに用いている。これらの計算例の収束回数は、積分方法の違いに依らずほぼ同一で、前者の例では平均5.6回、後者の例では平均3.4回で収束値を得ている。

6. あとがき

本論分は、従来の低減積分法と同程度の精度を有しており、アイソパラメトリック要素で問題になるロッキングや低減積分による特異性を回避した汎用性の高いひずみ選択積分法を示した。この積分方法は、ハイブリット応力法や修正変分原理に基づいたひずみ仮定による方法で一部用いられている方法を、通常の変位法による方法に適用したものであり、従来の方法に比べて汎用性と定式化の簡便性がある。

参考文献

- 1) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: *The Finite Element Method*, 4th ed., Vol.2, McGraw-Hill, pp.103-210, 1991.
- 2) Parisch, H.: A critical survey of the 9-node degenerated shell element with special emphasis on thin shell application and reduced integration, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol.20, pp.323-350, 1979.
- 3) Bićanić, N. and Hinton, E.: Spurious modes in two-dimensional isoparametric elements, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.14, pp.1545-1557, 1979.
- 4) Belytschko, T. and Ong, J.S.-J.: Hourglass control in linear and nonlinear Problems, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 43, pp.251-276, 1984.
- 5) Belytschko, T., Stolarski, H., Liu, W.K., Carpenter, N. and Ong, J.S.-J.: Stress projection for membrane and shear locking in shell finite elements, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 51, pp.221-258, 1985.
- 6) Huang, H.C. and Hinton, E.: A new nine node degenerated shell element with enhanced membrane and shear interpolation, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.22, pp.73-92, 1986.
- 7) 和田 章・山田貴博: ひずみ仮定に基づく9節点次数低減積分要素, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, 第11巻, pp.129-134, 1987.
- 8) Huang, H.C.: Implementation of assumed strain degenerated shell elements, *Comp. Struct.*, Vol.25, No.1, pp.147-155, 1987.
- 9) Belytschko, T. and Wong, B.L.: Assumed strain stabilization procedure for the 9-node lagrange shell element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.28, pp.385-414, 1989.
- 10) Saleeb, A.F., Chang, T.Y., Graf, W. and Yingyeunyoung, S.: A hybrid/mixed model for non-linear shell analysis and its applications to large-rotation problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.29, pp.407-446, 1990.
- 11) Choi, C.K. and Yoo, S.W.: Geometrically nonlinear behavior of an improved degenerated shell element, *Comp. Struct.*, Vol.40, No.3, pp.785-794, 1991.

- 12) Prathap,G. and Viswanath,S.: An optimally integrated four-node quadrilateral plate bending element, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.19, pp.831-840, 1983.
- 13) Kanok-Nukulchai,W. and Wong,W.K.: Element-based lagrangian formulation for large-deformation analysis, *Comp. Struct.*, Vol.30, No.4, pp.967-974, 1988.
- 14) 岩崎英治・林 正: 立体骨組構造の有限変位解析の精密化, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.353-366, 1991.
- 15) Timoshenko,S.P. and Gere,J.M.: *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., McGraw-Hill, pp.76-82,1963.
- 16) Bergan,P.G., Horrigmoe,G., Kråkeland,B. and Søreide,T.H.: Solution techniques for non-linear finite element problems, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol.12, pp.1677-1696, 1978.

(1992 年 9 月 21 日 受付)