

円周方向面内圧縮力を受ける円筒パネルの劣化域における複合非線形解析のための近似理論

SIMPLIFIED ANALYSIS OF ELASTO-PLASTIC CYLINDRICAL PANELS UNDER
CIRCUMFERENTIAL COMPRESSION OVER ULTIMATE LIMIT

三上 市蔵*

中野 唯史**

By Ichizou MIKAMI and Tadashi NAKANO

To investigate the ductility of cylindrical panels, it is necessary to analyze the nonlinear behavior over the ultimate limit. The theory including high-order nonlinear terms have to be used because of higher nonlinear behavior of cylindrical panels over ultimate limit. Simplifying the higher nonlinear theory of Mikami-Tsuji is discussed by omitting the some high-order nonlinear terms. The simplified theory presented here gives the accurate solution under the short computing times.

1. まえがき

アーチ部材のフランジや、縦断面内で曲率を有する箱桁のフランジなどは面外に曲率を有しており、円筒パネルとみなすことができる。これらの円筒パネルは、円周方向に面内力を受けているので、曲率の影響を考慮して解析を行う必要があり、その挙動は非線形性が著しいと考えられる。また、これらの円筒パネルには初期不整合が不可避免的に存在する。したがって、その挙動を明らかにするには、幾何学のおよび材料の非線形性を考慮して解析を行う必要がある。しかし、円筒パネルなどシェル要素の支配方程式は、非線形項の考慮のしかたによってさまざまな形になりうる。

近年、構造物の終局強度を越えるような地震に対する耐震設計法が論じられ、構造物のダクティリティを考慮する必要が生じている。ダクティリティを調べるには、終局強度を超えた領域（以下、劣化域¹⁾とよぶ）での挙動を正確に解析しなければならない。これまで、円筒パネルの研究としては、初期たわみを有する円筒パネルの幾何学的非線形挙動を解析した三上・矢部の研究²⁾、これを単純化³⁾し、複合非線形解析に拡張した三上・田中の研究⁴⁾、初期たわみと残留応力を有する場合の複合非線形解析を行った三上・松本・辻・田中の研究⁵⁾などがある。しかし、いずれも終局強度の解明を目的にしており、終局強度までが解析の対象とされている。そこで、三上・辻¹⁾は初期たわみと残留応力を有する円筒パネルの終局強度を超えた領域での挙動を明らかにするため、従来論じられていたものよりも高次の非線形項を考慮した非線形支配方程式を導いた。

しかし、この高次非線形支配方程式には、円筒パネルの挙動に大きな影響を与えない微小非線形項も含

* 工博 関西大学教授 工学部土木工学科

(〒564 大阪府吹田市山手町3丁目3番35号)

** 関西大学大学院 博士課程前期課程

(〒564 大阪府吹田市山手町3丁目3番35号)

まれていると考えられる。このような項が含まれると、基礎方程式が複雑になるばかりでなく、解析に要する時間も著しく増加する。三上・角・木元⁶⁾は、終局強度までを対象として、三上・矢部²⁾の複合非線形理論から非線形項を省略し、Kármán⁷⁾流、Flügge⁸⁾型などの近似非線形理論を導いている。本論文では、三上・辻¹⁾の非線形理論を基本にし、劣化域における挙動に影響しないと考えられる微小項を省略することにより、近似非線形理論を提案する。この理論を使って数値計算を行い、数値計算結果の比較から、劣化域での円筒パネルの挙動に大きな影響を与える非線形項を解明し、計算時間が短く、精度のよい解が得られる近似非線形理論を探る。

2. 円筒パネルの高次複合非線形解析¹⁾

図-1に示すような弧長 a 、幅 b 、厚さ h 、板厚中心の曲率半径 R の円筒パネルが、周辺単純支持されている場合を対象とする。パネルは等方性・完全弾塑性材料（降伏応力 σ_y 、Young率 E 、Poisson比 ν ）より成り、初期たわみ w_0 と円周方向残留応力を有する。座標軸を図-1のように設定し、 x 、 y 、 z 方向のそれぞれの変位 u 、 v 、 w および断面力の正の方向を図-2のように定義する。荷重としては直線辺に一樣な強制変位 v_m を与え、それにより円周方向面内応力 σ_y^m を作用させる。

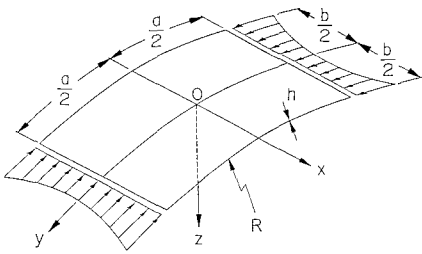


図-1 無補剛円筒パネル

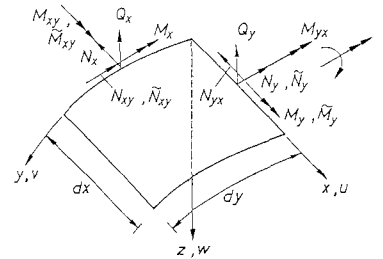


図-2 円筒パネルの変位と断面力

2.1 高次微小項を含んだ基礎方程式

三上・辻¹⁾は、薄いシェルに対する Washizu⁹⁾の非線形理論を参考にして、Kirchhoff-Loveの仮定が成り立ち、板厚の変化がないものとして、初期たわみおよび残留応力を有する、弾塑性円筒パネルの劣化域にわたる挙動を解析できる高次微小項を含んだ非線形理論を導いている。

(1) ひずみ-変位関係

円筒パネル中央面から z の位置（任意面）におけるひずみ成分 e_x' 、 e_y' 、 e_{xy}' は、次のようになる。

$$e_x' = e_x - z \{ \kappa_x + \varepsilon_x \kappa_x + (\varepsilon_{xy} + \phi) \kappa_{xy} \} \quad (1a)$$

$$e_y' = e_y - z \{ \kappa_y / \Lambda + \varepsilon_y \kappa_y / \Lambda^2 + (\varepsilon_{xy} - \phi) \kappa_{yx} / \Lambda^2 + (\phi_y \phi_{0y} / \Lambda^2) / R + (\phi_y / \Lambda)^2 / R \} \quad (1b)$$

$$2e_{xy}' = 2e_{xy} - z \{ \kappa_{xy} + \kappa_{yx} / \Lambda + \varepsilon_y \kappa_{xy} / \Lambda + \varepsilon_x \kappa_{yx} / \Lambda + (\varepsilon_{xy} - \phi) \kappa_x / \Lambda + (\varepsilon_{xy} + \phi) \kappa_y / \Lambda + (\phi_x \phi_y / \Lambda) / R + (\phi_{0x} \phi_y / \Lambda) / R \} \quad (1c)$$

ここに、 e_x 、 e_y 、 e_{xy} は中央面のひずみ成分、 κ_x 、 κ_y 、 κ_{xy} は曲率およびねじりの変化量であり、次のように表される。

$$e_x = \varepsilon_x + \frac{1}{2} \{ \varepsilon_x^2 + (\varepsilon_{xy} + \phi)^2 + \phi_x^2 \} + \phi_x \phi_{0x} \quad (2a)$$

$$e_y = \varepsilon_y / \Lambda + \frac{1}{2} [(\varepsilon_y / \Lambda)^2 + \{ (\varepsilon_{xy} - \phi) / \Lambda \}^2 + (\phi_y / \Lambda)^2] + \phi_y \phi_{0y} / \Lambda^2 \quad (2b)$$

$$2 e_{xy} = (\varepsilon_{xy} + \phi) + (\varepsilon_{xy} - \phi) / \Lambda + \varepsilon_x (\varepsilon_{xy} - \phi) / \Lambda + \varepsilon_y (\varepsilon_{xy} + \phi) / \Lambda + \phi_x \phi_y / \Lambda + \phi_x \phi_{0y} / \Lambda + \phi_{0x} \phi_y / \Lambda \quad (2c)$$

$$\kappa_x = \phi_{x,x} \quad (3a)$$

$$\kappa_y = \phi_{y,y} \quad (3b)$$

$$\kappa_{xy} = \frac{1}{2} \{ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} + (\varepsilon_{xy} + \phi) / R \} \quad (3c)$$

$$\kappa_{yx} = \frac{1}{2} \{ \phi_{x,y} + \phi_{y,x} - (\varepsilon_{xy} + \phi) / R \} \quad (3d)$$

ただし、

$$\varepsilon_x = u_{,x}, \quad \varepsilon_y = v_{,y} - w / R, \quad \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} (u_{,y} + v_{,x}) \quad (4a-c)$$

$$\phi_x = w_{,x}, \quad \phi_y = w_{,y} + v / R, \quad \phi = \frac{1}{2} (v_{,x} - u_{,y}) \quad (5a-c)$$

$$\phi_{0x} = w_{0,x}, \quad \phi_{0y} = w_{0,y} \quad (6a-b)$$

$$\Lambda = 1 - (w_0 + z) / R \quad (7)$$

ここで、下付き添字中の記号「,」は次に続く変数による偏微分を表す。

(2) 応力-ひずみ関係

平面応力状態が近似的に成り立つものとし、応力-ひずみ関係は、弾性域では Hooke の法則に、塑性域では Prandtl-Reuss 式に従うものとする。降伏判定には von Mises の降伏条件式を用いる。

任意面における x 軸方向直応力 σ_x' 、y 軸方向直応力 σ_y' 、x y 面内せん断応力 σ_{xy}' の増分 $\Delta \sigma_x'$ 、 $\Delta \sigma_y'$ 、 $\Delta \sigma_{xy}'$ は、弾性域においては、

$$\Delta \sigma_x' = (\Delta e_x' + \nu \Delta e_y') E / (1 - \nu^2), \quad \Delta \sigma_y' = (\Delta e_y' + \nu \Delta e_x') E / (1 - \nu^2),$$

$$\Delta \sigma_{xy}' = \Delta e_{xy}' E / (1 + \nu) \quad (8a-c)$$

となり、塑性域においては偏差応力 S_x' 、 S_y' 、 S_{xy}' を用いて次のように表される。

$$\Delta \sigma_x' = (\Delta e_x' + \nu \Delta e_y') E / (1 - \nu^2) - S_1' \Delta \lambda' \quad (9a)$$

$$\Delta \sigma_y' = (\Delta e_y' + \nu \Delta e_x') E / (1 - \nu^2) - S_2' \Delta \lambda' \quad (9b)$$

$$\Delta \sigma_{xy}' = \Delta e_{xy}' E / (1 + \nu) - S_3' \Delta \lambda' \quad (9c)$$

ここに、

$$\Delta \lambda' = (S_1' \Delta e_x' + S_2' \Delta e_y' + 2 S_3' \Delta e_{xy}') / S_0' \quad (10)$$

$$S_0' = S_1' S_x' + S_2' S_y' + 2 S_3' S_{xy}', \quad S_1' = (S_x' + \nu S_y') E / (1 - \nu^2),$$

$$S_2' = (S_y' + \nu S_x') E / (1 - \nu^2), \quad S_3' = S_{xy}' E / (1 + \nu) \quad (11a-d)$$

$$S_x' = (2 \sigma_x' - \sigma_y') / 3, \quad S_y' = (2 \sigma_y' - \sigma_x') / 3, \quad S_{xy}' = \sigma_{xy}' \quad (12a-c)$$

である。

σ_x' 、 σ_y' 、 σ_{xy}' は、増分応力の総和とその断面における円周方向の残留応力 σ_r を考慮して、次のようになる。

$$\sigma_x' = \Sigma \Delta \sigma_x', \quad \sigma_y' = \Sigma \Delta \sigma_y' + \sigma_r, \quad \sigma_{xy}' = \Sigma \Delta \sigma_{xy}' \quad (13a-c)$$

(3) 断面力-応力関係

断面力と応力の関係を次のようにする。

$$\Delta N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\Lambda} \Delta \sigma_x' dz, \quad \Delta N_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y' dz, \quad \Delta \tilde{N}_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y' / \underline{\Lambda} dz,$$

$$\Delta N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\Lambda} \Delta \sigma_{xy}' dz, \quad \Delta \tilde{N}_{xy} = \Delta N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xy}' dz \quad (14a-e)$$

$$\Delta M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \underline{\Lambda} \Delta \sigma_x' z dz, \quad \Delta M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y' z dz, \quad \Delta \tilde{M}_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y' z / \underline{\Lambda} dz,$$

$$\Delta M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\Delta}{\Delta} \sigma_{xy}' z dz, \quad \Delta \tilde{M}_{xy} = \Delta M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xy}' z dz \quad (15a-e)$$

(4) つり合い式

微小要素に対して仮想仕事の原理を適用すると、次のような静的つり合い式が得られる。

$$N_{x,x} + N_{yx,y} + (N_x \varepsilon_x)_{,x} + (N_{yx} \varepsilon_x)_{,y} + \{\tilde{N}_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,x} + \{\tilde{N}_y(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,y} \\ - (M_x \kappa_x)_{,x} - (M_{yx} \kappa_x)_{,y} - (\tilde{M}_{xy} \kappa_{yx})_{,x} - (\tilde{M}_y \kappa_{yx})_{,y} = 0 \quad (16a)$$

$$N_{y,y} + N_{xy,x} + (\tilde{N}_y \varepsilon_y)_{,y} + (\tilde{N}_{xy} \varepsilon_y)_{,x} + \{N_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,y} + \{N_x(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,x} \\ - \{N_{yx}(\phi_x + \phi_{0x}) + \tilde{N}_y(\phi_y + \phi_{0y})\}/R - (M_{y,y} + M_{xy,x})/R \\ - \{\tilde{M}_y(\varepsilon_y/R + \kappa_y)\}_{,y} - \{\tilde{M}_{xy}(\varepsilon_y/R + \kappa_y)\}_{,x} \\ - [M_{yx}\{(\varepsilon_{xy} + \phi)/R + \kappa_{xy}\}]_{,y} - [M_x\{(\varepsilon_{xy} + \phi)/R + \kappa_{xy}\}]_{,x} \\ + \{M_{yx}(\phi_x + \phi_{0x}) + \tilde{M}_y(\phi_y + \phi_{0y}) + \tilde{M}_{xy} \phi_y\}/R^2 = 0 \quad (16b)$$

$$M_{x,xx} + M_{yx,yx} + M_{y,yy} + M_{xy,xy} \\ + \{N_x(\phi_x + \phi_{0x})\}_{,x} + \{N_{yx}(\phi_x + \phi_{0x})\}_{,y} + \{\tilde{N}_{xy}(\phi_y + \phi_{0y})\}_{,x} + \{\tilde{N}_y(\phi_y + \phi_{0y})\}_{,y} \\ + \{N_y + N_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi) + \tilde{N}_y \varepsilon_y\}/R - (\tilde{M}_y \kappa_y + M_{yx} \kappa_{xy})/R \\ - (\tilde{M}_{xy} \phi_y)_{,x}/R - (\tilde{M}_y \phi_y)_{,y}/R - \{\tilde{M}_y(\phi_y + \phi_{0y})\}_{,y}/R - \{M_{yx}(\phi_x + \phi_{0x})\}_{,y}/R \\ + \{\tilde{M}_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,xx} + \{\tilde{M}_y(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,xy} + \{M_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,yy} + \{M_x(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,xy} \\ + (M_x \varepsilon_x)_{,xx} + (M_{yx} \varepsilon_x)_{,xy} + (\tilde{M}_y \varepsilon_y)_{,yy} + (\tilde{M}_{xy} \varepsilon_y)_{,xy} = 0 \quad (16c)$$

2.2 境界条件式

対称変形を考慮して、円筒パネルの $\frac{1}{4}$ 領域を解析対象とする。

(1) 面外変形に関する境界条件

円筒パネルの円弧辺および直線辺で単純支持されているものとする、面外変形に関する境界条件は次のようになる。

$$x = b/2 \text{ において } w = 0, \quad M_x(1 + \varepsilon_x) + \tilde{M}_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi) = 0 \quad (17a-b)$$

$$y = a/2 \text{ において } w = 0, \quad M_y + \tilde{M}_y \varepsilon_y + M_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi) = 0 \quad (18a-b)$$

(2) 面外変形に関する対称条件

面外変形に関する対称条件は、次のようになる。

$$x = 0 \text{ において } w(x) = w(-x), \quad M_x(x) = M_x(-x), \quad M_y(x) = M_y(-x), \quad \tilde{M}_y(x) = \tilde{M}_y(-x), \\ M_{xy}(x) = -M_{xy}(-x), \quad \tilde{M}_{xy}(x) = -\tilde{M}_{xy}(-x), \quad M_{yx}(x) = -M_{yx}(-x) \quad (19a-g)$$

$$y = 0 \text{ において } w(y) = w(-y), \quad M_x(y) = M_x(-y), \quad M_y(y) = M_y(-y), \quad \tilde{M}_y(y) = \tilde{M}_y(-y), \\ M_{xy}(y) = -M_{xy}(-y), \quad \tilde{M}_{xy}(y) = -\tilde{M}_{xy}(-y), \quad M_{yx}(y) = -M_{yx}(-y) \quad (20a-g)$$

(3) 面内変形に関する境界条件

円筒パネルの円弧辺で x および y 軸方向の面内変位は自由で、直線辺で一様な円周方向強制変位 v_m を受け、 x 軸方向の面内変位は自由である。

$$x = b/2 \text{ において } N_x(1 + \varepsilon_x) + \tilde{N}_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi) - M_x \kappa_x - \tilde{M}_{xy} \kappa_{yx} = 0, \quad (21a) \\ N_{xy} + \tilde{N}_{xy} \varepsilon_y + N_x(\varepsilon_{xy} + \phi) \\ - M_{xy}/R - \tilde{M}_{xy}(\varepsilon_y/R + \kappa_y) - M_x\{(\varepsilon_{xy} + \phi)/R + \kappa_{xy}\} = 0 \quad (21b)$$

$$y = a/2 \text{ において } v = v_m, \quad (22a)$$

$$N_{yx}(1 + \varepsilon_x) + \tilde{N}_y(\varepsilon_{xy} - \phi) - M_{yx} \kappa_x - \tilde{M}_y \kappa_{yx} = 0 \quad (22b)$$

(4) 面内変形に関する対称条件

面内変形に関する対称条件は、次のようになる。

$$\begin{aligned} x=0 \text{ において} \quad & u(x) = -u(-x), \quad v(x) = v(-x), \quad N_x(x) = N_x(-x), \\ & N_y(x) = N_y(-x), \quad \tilde{N}_y(x) = \tilde{N}_y(-x), \quad N_{xy}(x) = -N_{xy}(-x), \\ & \tilde{N}_{xy}(x) = -\tilde{N}_{xy}(-x), \quad N_{yx}(x) = -N_{yx}(-x) \end{aligned} \quad (23a-h)$$

$$\begin{aligned} y=0 \text{ において} \quad & u(y) = u(-y), \quad v(y) = -v(-y), \quad N_x(y) = N_x(-y), \\ & N_y(y) = N_y(-y), \quad \tilde{N}_y(y) = \tilde{N}_y(-y), \quad N_{xy}(y) = -N_{xy}(-y), \\ & \tilde{N}_{xy}(y) = -\tilde{N}_{xy}(-y), \quad N_{yx}(y) = -N_{yx}(-y) \end{aligned} \quad (24a-h)$$

2.3 初期不整

(1) 初期たわみ

次式のような、円周方向および母線方向に1半波の初期たわみを仮定する。

$$w_0(x, y) = w_{0\max} \cos(\pi x/b) \cos(\pi y/a) \quad (25)$$

(2) 残留応力

円周方向残留応力 σ_r は、次式のように分布するものとする。

$$0 \leq x \leq L \text{ において} \quad \sigma_r = \sigma_{rc} \quad (26a)$$

$$L < x \text{ において} \quad \sigma_r = -(\sigma_{rt} - \sigma_{rc})^2 x/b \sigma_{rc} + (\sigma_{rt}^2 + \sigma_{rc}^2)/2 \sigma_{rc} \quad (26b)$$

ここに、 σ_{rt} は最大引張残留応力、 σ_{rc} は最大圧縮残留応力であり、 L は次式で与えられる。

$$L = \frac{1}{2} b (\sigma_{rt} + \sigma_{rc}) / (\sigma_{rt} - \sigma_{rc}) \quad (27)$$

なお、円筒パネルでは残留応力は板厚方向に変化するが、本論文で扱う曲率の大きさであれば、残留応力の絶対値は小さい¹⁰⁾ので、 σ_r を板厚方向に一定として扱うことにした。

3. 近似非線形理論

3.1 近似非線形理論の基礎方程式

(1) ひずみ-変位関係

円筒パネルの任意面におけるひずみと変位の関係式として、以下の2種を考える。

①Kármán流の簡易非線形関係(1)

一般に、面内変位 u 、 v は、たわみ w および初期たわみ w_0 に比べて小さいので、 u 、 v の関数である中央面の線形ひずみ成分 ε_x 、 ε_y 、 ε_{xy} および中央面の回転成分 ϕ は、たわみによる中央面の回転成分 ϕ_x 、 ϕ_y と初期たわみによる中央面の回転成分 ϕ_{0x} 、 ϕ_{0y} に比べ、微小であると考えられる。そこで、高次微小項を含んだひずみ-変位関係式(1)、(2)において、下線をつけた ε_x 、 ε_y 、 ε_{xy} および ϕ に関する高次微小項を省略すると、次のようなKármán流⁷⁾のひずみ-変位関係式が得られる。

$$e_x' = \varepsilon_x + \frac{1}{2} \phi_x^2 + \phi_x \phi_{0x} - z \kappa_x \quad (28a)$$

$$\begin{aligned} e_y' = & \varepsilon_y + \frac{\underline{\Lambda}}{\Lambda} + \frac{1}{2} (\phi_y / \underline{\Lambda})^2 + \phi_y \phi_{0y} / \underline{\Lambda}^2 \\ & - z \{ \kappa_y / \underline{\Lambda} + (\phi_y \phi_{0y} / \underline{\Lambda}^2) / R + (\phi_y / \underline{\Lambda})^2 / R \} \end{aligned} \quad (28b)$$

$$\begin{aligned} 2 e_{xy}' = & (\varepsilon_{xy} + \phi) + (\varepsilon_{xy} - \phi) / \underline{\Lambda} + \phi_x \phi_y / \underline{\Lambda} + \phi_x \phi_{0y} / \underline{\Lambda} + \phi_{0x} \phi_y / \underline{\Lambda} \\ & - z \{ \kappa_{xy} + \kappa_{yx} / \underline{\Lambda} + (\phi_x \phi_y / \underline{\Lambda}) / R + (\phi_{0x} \phi_y / \underline{\Lambda}) / R \} \end{aligned} \quad (28c)$$

②Kármán流の簡易非線形関係(2)

曲率の影響を示す Λ について、中央面の曲率半径 R が w_0 、 z に比べて十分大きいと考えて $\Lambda \simeq 1$ と

すると、ひずみ-変位関係式(28)は次のように簡単化される。

$$e_x' = \varepsilon_x + \frac{1}{2} \phi_x^2 + \phi_x \phi_{0x} - z \kappa_x \quad (29a)$$

$$e_y' = \varepsilon_y + \frac{1}{2} \phi_y^2 + \phi_y \phi_{0y} - z \{ \kappa_y + \phi_y \phi_{0y} / R + \phi_y^2 / R \} \quad (29b)$$

$$2 e_{xy}' = 2 \varepsilon_{xy} + \phi_x \phi_y + \phi_x \phi_{0y} + \phi_{0x} \phi_y - z \{ \kappa_{xy} + \kappa_{yx} + \phi_x \phi_y / R + \phi_{0x} \phi_y / R \} \quad (29c)$$

(2) 応力-ひずみ関係

応力とひずみの関係式は、式(8)～(13)を用いる。

(3) 断面力-応力関係

断面力と応力の関係式(14)～(15)は、 $\Lambda \approx 1$ のとき次のようになる。

$$\begin{aligned} \Delta N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_x' dz, & \Delta N_y &= \Delta \tilde{N}_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y' dz, \\ \Delta N_{xy} &= \Delta \tilde{N}_{xy} = \Delta N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xy}' dz \end{aligned} \quad (30a-c)$$

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_x' z dz, & \Delta M_y &= \Delta \tilde{M}_y = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_y' z dz, \\ \Delta M_{xy} &= \Delta \tilde{M}_{xy} = \Delta M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xy}' z dz \end{aligned} \quad (31a-c)$$

(4) つりあい式

④' 非線形つりあい式(1)

高次微小項を含んだ非線形つりあい式(16)を用いる。

④ 非線形つりあい式(2)

高次微小項を含んだ非線形つりあい式(16)は $\Lambda \approx 1$ のとき、下線をつけた項が $\tilde{N}_y = N_y$, $\tilde{N}_{xy} = N_{xy}$, $\tilde{M}_y = M_y$, $\tilde{M}_{xy} = M_{xy}$ となり、次のように簡単化される。

$$N_{x,x} + N_{yx,y} + \underline{(N_x \varepsilon_x)_{,x} + (N_{yx} \varepsilon_x)_{,y} + \{N_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,x} + \{N_y(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,y} - (M_x \kappa_x)_{,x} - (M_{yx} \kappa_x)_{,y} - (M_{xy} \kappa_{yx})_{,x} - (M_y \kappa_{yx})_{,y}} = 0 \quad (32a)$$

$$\begin{aligned} N_{y,y} + N_{xy,x} + \underline{(N_y \varepsilon_y)_{,y} + (N_{xy} \varepsilon_y)_{,x} + \{N_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,y} + \{N_x(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,x} - \{N_{yx}(\phi_x + \phi_{0x}) + N_y(\phi_y + \phi_{0y})\} / R - (M_{y,y} + M_{xy,x}) / R} \\ - \{M_y(\varepsilon_y / R + \kappa_y)\}_{,y} - \{M_{xy}(\varepsilon_y / R + \kappa_y)\}_{,x} \\ - [M_{yx}\{(\varepsilon_{xy} + \phi) / R + \kappa_{xy}\}]_{,y} - [M_x\{(\varepsilon_{xy} + \phi) / R + \kappa_{xy}\}]_{,x} \\ + \{M_{yx}(\phi_x + \phi_{0x}) + M_y(2\phi_y + \phi_{0y})\} / R^2 = 0 \end{aligned} \quad (32b)$$

$$\begin{aligned} M_{x,xx} + M_{yx,yx} + M_{y,yy} + M_{xy,xy} \\ + \underline{\{N_x(\phi_x + \phi_{0x})\}_{,x} + \{N_{yx}(\phi_x + \phi_{0x})\}_{,y} + \{N_{xy}(\phi_y + \phi_{0y})\}_{,x} + \{N_y(\phi_y + \phi_{0y})\}_{,y} \\ + \{N_y(1 + \varepsilon_y) + N_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi)\} / R - (M_y \kappa_y + M_{yx} \kappa_{xy}) / R} \\ - (M_{xy} \phi_y)_{,x} / R - (M_y \phi_y)_{,y} / R - \{M_y(\phi_y + \phi_{0y})\}_{,y} / R - \{M_{yx}(\phi_x + \phi_{0x})\}_{,y} / R \\ + \{M_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,xx} + \{M_y(\varepsilon_{xy} - \phi)\}_{,xy} + \{M_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,yy} + \{M_x(\varepsilon_{xy} + \phi)\}_{,xy} \\ + (M_x \varepsilon_x)_{,xx} + (M_{yx} \varepsilon_x)_{,xy} + (M_y \varepsilon_y)_{,yy} + (M_{xy} \varepsilon_y)_{,xy} = 0 \end{aligned} \quad (32c)$$

④ Flüge型のつりあい式

非線形つりあい式(32)において、下線で示した断面力とひずみの積、断面力と回転の積の項のうち、面内力とひずみあるいは回転の積の項、面内力とひずみあるいは回転の偏微分の積の項以外を微小項と考えて省略する。これはFlüge⁸⁾の考え方に類似している。また、 $R \gg 1$ であるので、 $1/R^2$ の項も

省略する.

$$N_{x,x} + N_{y,x,y} + N_x \varepsilon_{x,x} + N_{yx} \varepsilon_{x,y} + N_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi)_{,x} + N_y(\varepsilon_{xy} - \phi)_{,y} = 0 \quad (33a)$$

$$N_{y,y} + N_{x,y,x} + N_y \varepsilon_{y,y} + N_{xy} \varepsilon_{y,x} + N_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi)_{,y} + N_x(\varepsilon_{xy} + \phi)_{,x} - \{N_{yx}(\phi_x + \phi_{0x}) + N_y(\phi_y + \phi_{0y})\} / R - (M_{y,y} + M_{xy,x}) / R = 0 \quad (33b)$$

$$M_{x,xx} + M_{yxx,yx} + M_{y,yy} + M_{xy,xy} + N_x(\phi_x + \phi_{0x})_{,x} + N_{yx}(\phi_x + \phi_{0x})_{,y} + N_{xy}(\phi_y + \phi_{0y})_{,x} + N_y(\phi_y + \phi_{0y})_{,y} + \{N_y + N_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi) + N_y \varepsilon_y\} / R = 0 \quad (33c)$$

©Kármán型のつりあい式

Flügge型のつりあい式(33)において、下線で示した断面力とひずみの積の項と、式(33b)において曲率の影響を表す $1/R$ の項を省略すると、Kármánが板の大たわみの解析に用いたつりあい式に類似したものとなる.

$$N_{x,x} + N_{y,x,y} = 0 \quad (34a)$$

$$N_{y,y} + N_{x,y,x} = 0 \quad (34b)$$

$$M_{x,xx} + M_{yxx,yx} + M_{y,yy} + M_{xy,xy} + N_x(\phi_x + \phi_{0x})_{,x} + N_{yx}(\phi_x + \phi_{0x})_{,y} + N_{xy}(\phi_y + \phi_{0y})_{,x} + N_y(\phi_y + \phi_{0y})_{,y} + N_y / R = 0 \quad (34c)$$

3.2 近似非線形理論の境界条件式

境界条件式はつりあい式に対応して、次のように簡単化される.

(1) 面外変形に関する境界条件

①' 高次微小項を含んだ境界条件式(17)~(18)を用いる.

$$\textcircled{a} \ x = b/2 \text{ において } w = 0, \quad M_x(1 + \varepsilon_x) + M_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi) = 0 \quad (35a-b)$$

$$y = a/2 \text{ において } w = 0, \quad M_y(1 + \varepsilon_y) + M_{yx}(\varepsilon_{xy} + \phi) = 0 \quad (36a-b)$$

$$\textcircled{b}, \textcircled{c} \ x = b/2 \text{ において } w = 0, \quad M_x = 0 \quad (37a-b)$$

$$y = a/2 \text{ において } w = 0, \quad M_y = 0 \quad (38a-b)$$

(2) 面外変形に関する対称条件

①' 高次微小項を含んだ対称条件式(19)~(20)を用いる.

$$\textcircled{a}, \textcircled{b}, \textcircled{c} \ x = 0 \text{ において } w(x) = w(-x), \quad M_x(x) = M_x(-x), \quad M_y(x) = M_y(-x), \\ M_{xy}(x) = -M_{xy}(-x), \quad M_{yx}(x) = -M_{yx}(-x) \quad (39a-e)$$

$$y = 0 \text{ において } w(y) = w(-y), \quad M_x(y) = M_x(-y), \quad M_y(y) = M_y(-y), \\ M_{xy}(y) = -M_{xy}(-y), \quad M_{yx}(y) = -M_{yx}(-y) \quad (40a-e)$$

(3) 面内変形に関する境界条件

①' 高次微小項を含んだ境界条件式(21)~(22)を用いる.

$$\textcircled{a} \ x = b/2 \text{ において } N_x(1 + \varepsilon_x) + N_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi) - M_x \kappa_x - M_{xy} \kappa_{yx} = 0, \quad (41a)$$

$$N_{xy}(1 + \varepsilon_y) + N_x(\varepsilon_{xy} + \phi) - M_{xy} / R - M_{xy}(\varepsilon_y / R + \kappa_y) - M_x\{(\varepsilon_{xy} + \phi) / R + \kappa_{xy}\} = 0 \quad (41b)$$

$$y = a/2 \text{ において } v = v_m, \quad (42a)$$

$$N_{yx}(1 + \varepsilon_x) + N_y(\varepsilon_{xy} - \phi) - M_{yx} \kappa_x - M_y \kappa_{yx} = 0 \quad (42b)$$

$$\textcircled{b} \ x = b/2 \text{ において } N_x(1 + \varepsilon_x) + N_{xy}(\varepsilon_{xy} - \phi) = 0, \quad (43a)$$

$$N_{xy}(1 + \varepsilon_y) + N_x(\varepsilon_{xy} + \phi) - M_{xy} / R = 0 \quad (43b)$$

$$y = a/2 \text{ において } v = v_m, \quad N_{yx}(1 + \varepsilon_x) + N_y(\varepsilon_{xy} - \phi) = 0 \quad (44a-b)$$

$$\textcircled{C} x = b/2 \text{ において } N_x = 0, \quad N_{xy} = 0 \quad (45a-b)$$

$$y = a/2 \text{ において } v = v_m, \quad N_{yx}(1 + \varepsilon_x) = 0 \quad (46a-b)$$

(4) 面内変形に関する対称条件

④' 高次微小項を含んだ対称条件式(23)～(24)を用いる。

$$\begin{aligned} \textcircled{A}, \textcircled{B}, \textcircled{C} x = 0 \text{ において } \quad & u(x) = -u(-x), \quad v(x) = v(-x), \quad N_x(x) = N_x(-x), \\ & N_y(x) = N_y(-x), \quad N_{xy}(x) = -N_{xy}(-x), \quad N_{yx}(x) = -N_{yx}(-x) \end{aligned} \quad (47a-f)$$

$$\begin{aligned} y = 0 \text{ において } \quad & u(y) = u(-y), \quad v(y) = -v(-y), \quad N_x(y) = N_x(-y), \\ & N_y(y) = N_y(-y), \quad N_{xy}(y) = -N_{xy}(-y), \quad N_{yx}(y) = -N_{yx}(-y) \end{aligned} \quad (48a-f)$$

4. 近似非線形理論による数値計算結果と考察

数値計算の便宜上、無次元パラメータ $\alpha = a/b$, $\beta = b/h$, $Z = b^2/hR$, $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma_Y$, $\bar{u} = u/b/h^2$, $\bar{v} = v/b/h^2$, $\bar{w} = w/h$ を用いる。

また、換算幅厚比 λ を $k = 4$ に対して次式で求めて、後の図表に用いる。

$$\lambda = (b/h) \sqrt{(\sigma_Y/E) \cdot 12(1-\nu^2)/(\pi^2 k)} \quad (49)$$

4.1 近似非線形理論

前章で示した2種のひずみ-変位関係式と、4種のつりあい式に対して4種類の近似非線形理論を考える。高次微小項を含んだ非線形理論¹⁾において、ひずみ-変位関係式のみをKármán流に簡単化した近似非線形理論としてCase A' を考える。すなわち、ひずみ-変位関係式①、応力-ひずみ関係は式(8)～(13)、断面力-応力関係は式(14)～(15)、つりあい式④' からなる。これに対して、曲率の影響を示す Λ の影響を検討するために、Case A' において $\Lambda \equiv 1$ としたCase A を考える。なお、本論文で解析する幅厚比 $\beta = 22.50 \sim 78.74$ 、曲率 $Z = 0.0 \sim 2.0$ の範囲では、 $\Lambda \equiv 1$ とみなしてよいと考えられるが、変位からひずみを、ひずみから応力を、応力から断面力を求める過程において、 Λ の影響が増大することも考えられるので、Case A' とCase A の両方の解析結果を比較する。

さらに、Case A を基にして2種類の近似理論を考える。いずれも、ひずみ-変位関係は②、応力-ひずみ関係は式(8)～(13)、断面力-応力関係は式(30)～(31)である。つりあい式として⑥を使うCase B、③を使うCase C である。

4.2 近似非線形理論の比較

4種の近似非線形理論および2章で述べた非線形理論に対して、差分表示を適用した動的緩和法¹⁾を用いて、円周方向面内圧縮力を受ける円筒パネルの解析を行う。なお、鋼材としてSS400を取り上げ、降伏応力 $\sigma_Y = 2400 \text{ kgf/cm}^2$ 、ヤング率 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用いる。

縦横比 $\alpha = 1.0$ 、パネル中央面の最大初期たわみ $\bar{w}_{0max} = -\beta/150$ 、最大引張残留応力 $\bar{\sigma}_{rt} = 1.0$ 、最大圧縮残留応力 $\bar{\sigma}_{rc} = -0.3$ の場合について、非線形理論と近似非線形理論による解析結果を比較する。

(1) 曲率の大きい円筒パネルの解析

曲率 $Z = 2.0$ 、幅厚比 $\beta = 22.50$ の場合について、 $\bar{y} = 0$ における平均円周方向面内応力と、 $\bar{y} = 1/2$ にお

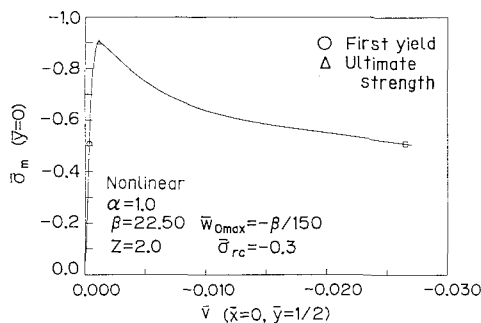


図-3 応力-変位関係 (非線形)

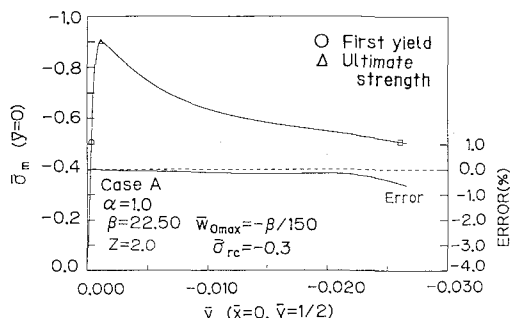


図-5 応力-変位関係 (Case A)

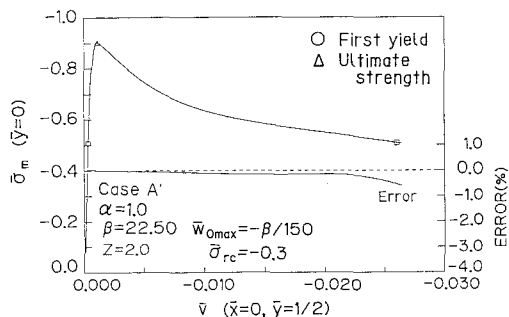


図-4 応力-変位関係 (Case A')

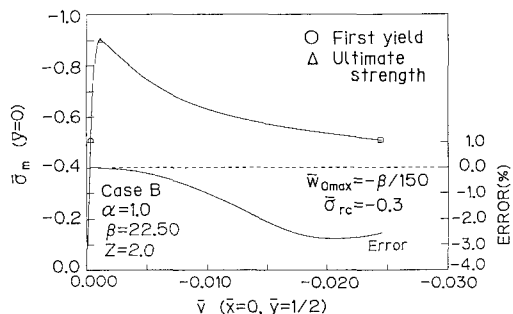


図-6 応力-変位関係 (Case B)

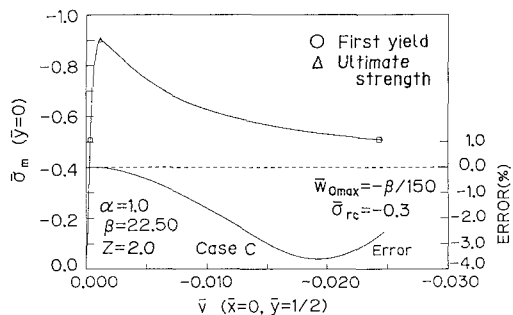


図-7 応力-変位関係 (Case C)

ける円周方向面内変位の関係を調べると図-3～7のようになる。図-3は非線形理論による解析結果であり、図-4～7はそれぞれ近似非線形理論Case A', Case A, Case B, Case Cによる解析結果である。図中、○印は初期降伏状態、△印は終局強度状態、□印は劣化域において応力が初期降伏強度まで低下した状態（以後、劣化限界状態とよぶ¹⁾）を示す。また、図-4～7には、各荷重段階において、非線形理論の解に対する近似非線形理論の解の相対誤差を合わせて示した。

これらの図から、幅厚比が比較的小さい場合には、曲率の大きい円筒パネルにおいても、終局強度までの範囲で、どの近似非線形理論を用いても非線形理論解とほとんど等しい解が得られることがわかる。一方、劣化域においては、Case A', Case Aのいずれを用いても非線形理論による解とほとんど同じ解を得られるが、Case B, Case Cを用いると応力について非線形理論による解より若干小さい解が得られる。

表-1 パネル中央のたわみの比較

Case	初期降伏状態		終局強度状態		劣化限界状態	
	$\bar{w} + \bar{w}_0$	誤差 (%)	$\bar{w} + \bar{w}_0$	誤差 (%)	$\bar{w} + \bar{w}_0$	誤差 (%)
非線形	-0.1908140	—	-0.3072884	—	-3.1812301	—
A'	-0.1908187	0.025	-0.3073621	0.024	-3.1849870	0.118
A	-0.1908586	0.021	-0.3074363	0.048	-3.1853042	0.128
B	-0.1908544	0.021	-0.3073302	0.014	-3.0401919	-4.433
C	-0.1908737	0.031	-0.3073149	0.009	-3.0235207	-4.957

$\alpha=1.0$, $\beta=22.50$, $Z=2.0$, $\bar{w}_0=-\beta/150$, $\bar{\sigma}_{rc}=-0.3$

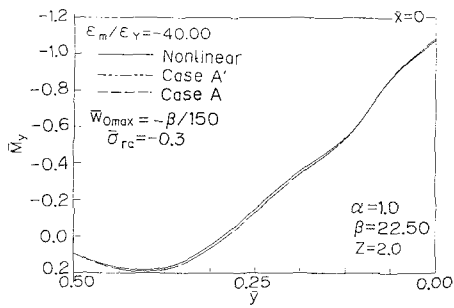


図-8 (a) 円周方向曲げモーメント分布

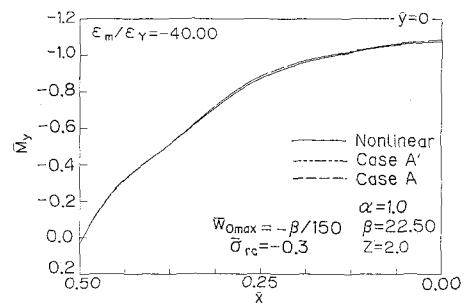


図-8 (b) 円周方向曲げモーメント分布

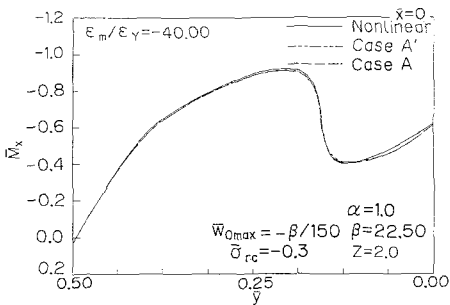


図-9 (a) 母線方向曲げモーメント分布

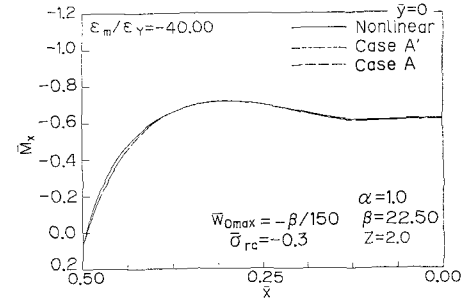


図-9 (b) 母線方向曲げモーメント分布

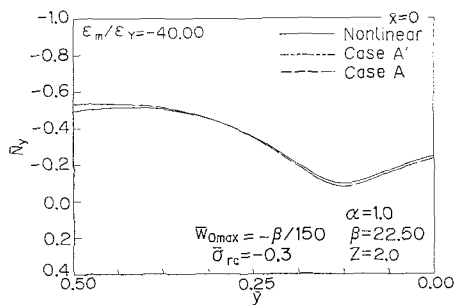


図-10 (a) 円周方向軸力分布

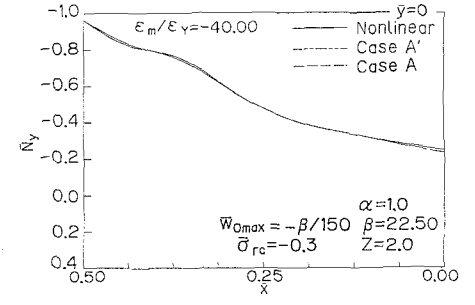


図-10 (b) 円周方向軸力分布

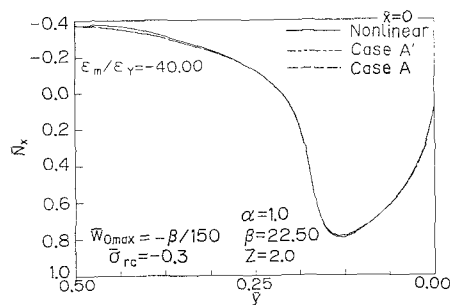


図-11 (a) 母線方向軸力分布

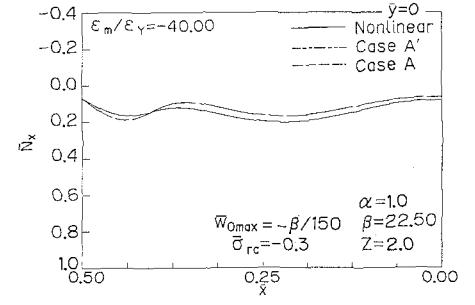


図-11 (b) 母線方向軸力分布

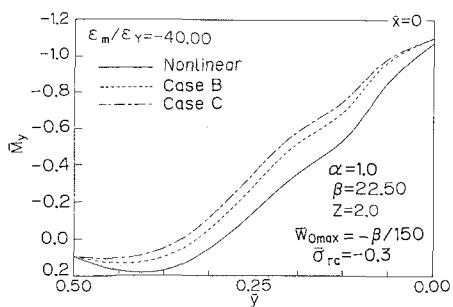


図-12(a) 円周方向曲げモーメント分布

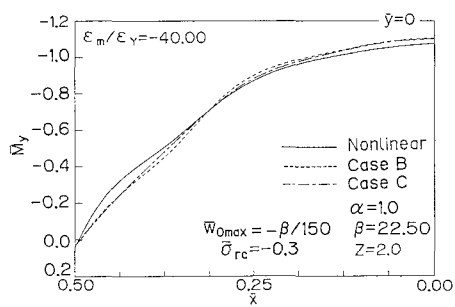


図-12(b) 円周方向曲げモーメント分布

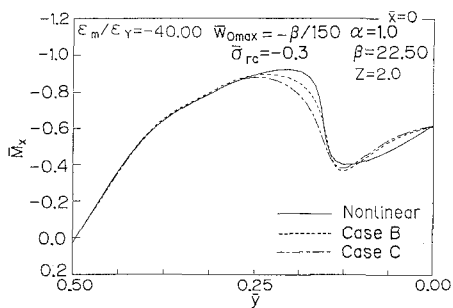


図-13(a) 母線方向曲げモーメント分布

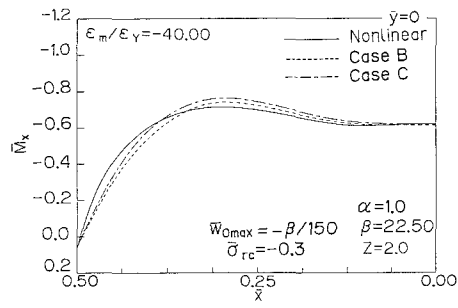


図-13(b) 母線方向曲げモーメント分布

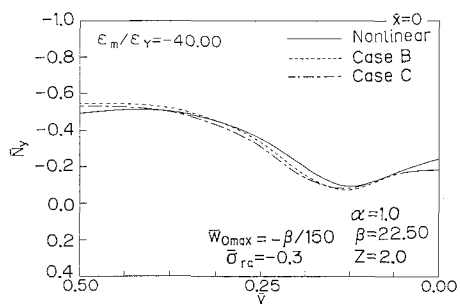


図-14(a) 円周方向軸力分布

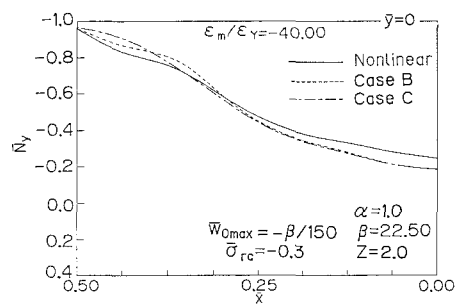


図-14(b) 円周方向軸力分布

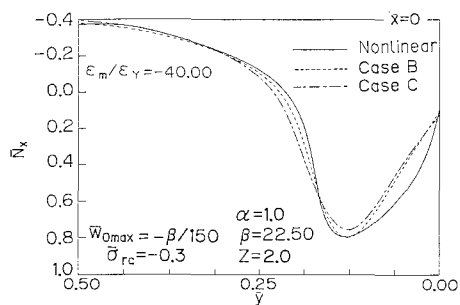


図-15(a) 母線方向軸力分布

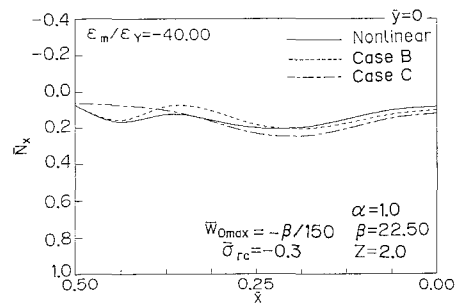


図-15(b) 母線方向軸力分布

次に、たわみの精度を調べてみる。パネル中央 ($\bar{x} = \bar{y} = 0$) のたわみ $\bar{w} + \bar{w}_0$ を初期降伏、終局強度、劣化限界の各状態において比較すると、表-1 になる。この表からも、終局強度状態まではどの近似非線形理論を用いてもよいこと、劣化域においてはCase A', Case Aは精度のよい解を与えるが、Case B, Case Cによると解の精度は悪くなることがわかる。

さらに、断面力について理論解の精度を調べてみる。まず、非線形理論と近似非線形理論Case A', Case Aの劣化限界状態における断面力分布を比較してみる。円周方向および母線方向曲げモーメントを図-8および9に、円周方向および母線方向軸力を図-10および11に示す。図-8~11において、 $\varepsilon_m = 2 \nu_m / a$ は強制変位に対する円周方向平均ひずみであり、 $\varepsilon_v = \sigma_v / E$ である。

これらの図において、曲げモーメント、面内力ともに非線形理論と近似非線形理論の間で若干の差がある。その差は、母線方向軸力 N_x 分布 (図-11(b)) において大きい。無視してもよい程度のものである。したがって、近似非線形理論Case A' およびCase Aは劣化域において変位、応力とも精度よく解析できる。また、近似非線形理論Case A' とCase Aの解の間には差は見られないことから、本論文の解析対象である円筒パネルでは、非線形理論をCase A' に簡単化する際に省略した項の影響に比べて、 $\Lambda \approx 1$ の影響は、変位からひずみを、ひずみから応力を、応力から断面力を求める過程において微小であることがわかる。したがって、近似非線形理論Case A' の代わりにCase Aを用いてもよい。

近似非線形理論Case B, Case Cを詳細に検討するために、劣化限界状態における断面力分布を調べる。円周方向および母線方向曲げモーメントを図-12および13に、円周方向および母線方向軸力を図-14および15に示す。これらの図より、円周方向曲げモーメント分布において、Case BもCase Cも非線形理論と大きな差が生じていることがわかる。したがって、つりあい式を簡単化したCase BやCase Cの理論では、劣化域において円周方向曲げモーメント分布を正確に捉えられなくなるものと考えられる。Case BとCase Cの解の間の差はあまり大きくないので、式(33)の下線の項は、式(32)の下線の項に比べて、劣化域における挙動にあまり影響を与えない。以上の比較から、Case B, Case Cは変位、応力とも若干の誤差を許せるのなら、劣化域の解析に使える。

(2) 薄い円筒パネルの解析

円筒パネルの幅厚比が大きい場合、挙動の非線形性が大きくなる。そこで、 $\beta = 78.74$ の場合について、近似非線形理論の解の精度を調べてみる。 $\Lambda = 1$ としてよいので、非線形理論と近似非線形理論Case A, Case Bを比較する。平均円周方向面内応力と円周方向面内強制変位との関係は図-16~18のようになる。図-16は非線形理論、図-17はCase A, 図-18はCase Bによるものである。

近似非線形理論Case Aは、劣化域においても非線形理論の解とほとんど同じ解を得られる。しかし、図-18からわかるように、Case Bでは、終局強度を越えて強制変位が大きくなると、動的緩和法の反復計算において解が収束しにくくなり、劣化限界状態までの解が求められない。これは、式(32)の下線の項の影響が大きいと考えられる。したがって、曲率および幅厚比が大きく、挙動の非線形性が著しくなる場合は、Case B, Case Cの近似理論は使えない。

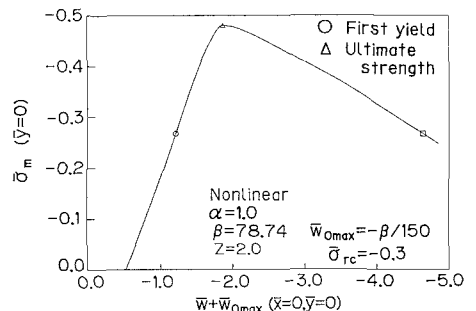


図-16 応力-変位関係 (非線形)

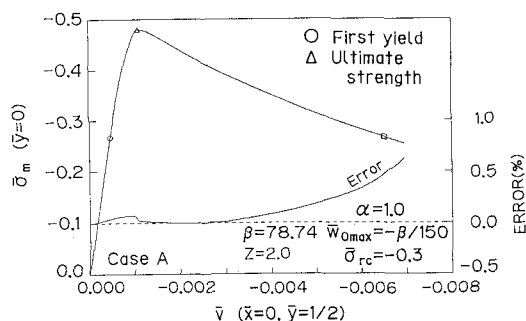


図-17 応力-変位関係 (Case A)

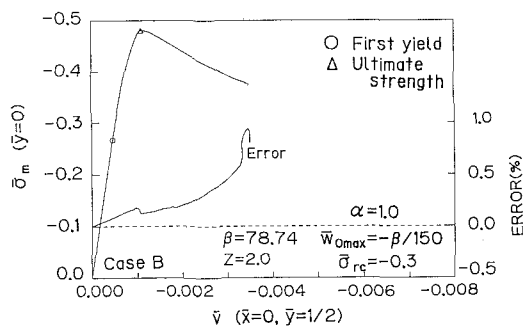


図-18 応力-変位関係 (Case B)

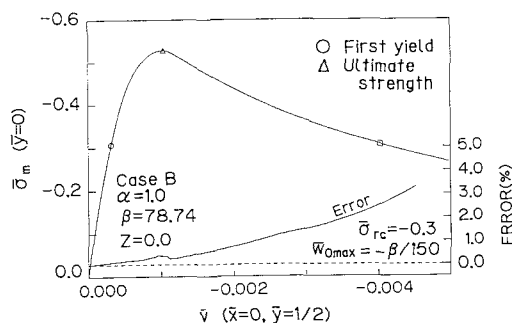


図-19 応力-変位関係 (Case B)

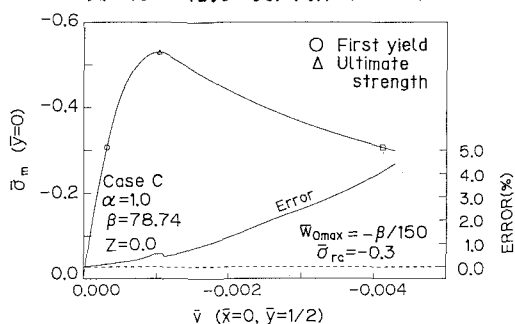


図-20 応力-変位関係 (Case C)

(3) 板の解析

板 ($Z=0$) の場合について、近似理論Case B, Case Cによる劣化域の解析の可能性を調べておく。 $\beta=78.74$ のときの円周方向の平均面内応力と面内強制変位との関係を図-19, 20に示す。図からわかるように、板の場合には劣化限界状態まで解析できるが、劣化限界状態における解の誤差は大きくなり、1%を越える。

(4) 解析時間

近似非線形理論によれば計算時間は短縮されるはずである。円筒パネルを劣化限界状態まで解析した際の所要時間 (CPU時間) を表-2に示す。Case A' は非線形理論による解析に比べて、80%の時間で解析が完了した。このように、ひずみ-変位関係を単純化することによって、解析時間が短縮できることがわかる。さらに、 $\Lambda=1$ としたCase Aでは、非線形理論に比べて解析時間が約60%に短縮できた。つりあい式の単純化を行ったCase B, Case Cでは、非線形理論の約30%の時間で劣化限界状態までの解析を行える。しかし、解の精度を考慮すると、Case Aが円筒パネルの劣化域における挙動を解析するのに、最も有効な近似非線形理論であるといえる。

表-2 解析所要時間の比較

Case	解析所要時間 (秒)	所要時間比
非線形	64861	1.00
A'	52026	0.80
A	36860	0.57
B	20529	0.32
C	18134	0.28

$\alpha=1.0$, $\beta=78.74$, $Z=0.0$,
 $\bar{w}_0=-\beta/150$, $\bar{\sigma}_{rc}=-0.3$

5. あとがき

円周方向圧縮力を受け、初期たわみと残留応力を有する円筒パネルの劣化域での挙動を短時間に高精度

で解析するための近似非線形理論を検討した。基本となる非線形理論としては、高次微小項を含み、任意面の変位に対する中央面からの距離による影響も考慮した三上・辻の式¹⁾を用いた。この非線形理論より、劣化域における挙動に大きな影響がないと考えられる項を省略することによって2種のひずみ-変位関係式と、3種のつりあい式を導き出し、これらを組み合わせて4種の近似非線形理論を考えた。

Case A' : ひずみ-変位関係式において、中央面の線形ひずみ成分および中央面の回転成分が、たわみまたは初期たわみによる中央面の回転成分に比べて微小であると考えた理論。

Case A : Case A' において、任意面の変位に対する中央面からの距離による影響が微小であると考えた理論。

Case B : Case A のつりあい式において、断面力とひずみあるいは回転の積の項のうち、面内力とひずみあるいは回転の積、面内力とひずみあるいは回転の偏微分の積の項のみを考慮した理論。

Case C : Case B において、さらに面内力とひずみの積の項を微小と考えた理論。

種々の曲率と板厚比を持つ円筒パネルを、この4種類の近似非線形理論に基づいて、差分表示を適用した動的緩和法を用いて解析し、その結果を非線形理論による結果と比較した。その結果、近似非線形理論 Case A が、三上・辻の高次非線形理論¹⁾と比べて、精度を損なうことなく $\frac{1}{2}$ の時間で、円周方向面内圧縮力を受ける円筒パネルの劣化域における挙動を解析できることがわかった。また、Case B および Case C についても、解析時間、解の精度など有用な知見を得ることができた。これらの結果は、有限要素の定式化の際に参考となるであろう。

なお、数値計算には、関西大学情報処理センターのスーパーコンピュータ FACOM VP-2100/10 ならびに VP-50B を用いた。解析結果の処理には FACOM M-780/10 のアプリケーションソフト GRAPHMAN を使用した。

数値計算の実施と整理にあたって、関西大学学生 篠田隆広君（現在・駒井鉄工）の協力を得た。本研究の一部は、平成3、4年度文部省科学研究費補助金総合研究(A)（代表者 山田善一）の補助を受けた。ここに記して、感謝の意を表する。

参考文献

- 1) 三上市蔵・辻 省悟：終局強度を超えた円筒パネルの弾塑性有限変位挙動の解析，構造工学論文集，土木学会，Vol. 37A，pp. 287-298，1991. 3.
- 2) 三上市蔵・矢部幸男：初期たわみを有する弾性円筒パネルの円周方向面内力による非線形挙動，構造工学論文集，土木学会，Vol. 31A，pp. 209-222，1985. 3.
- 3) 三上市蔵・福富孝泰・角肇：円周方向面内荷重を受ける円筒パネルの非線形解析のための種々の理論，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，Vol. 13，pp. 353-358，1989. 7.
- 4) 三上市蔵・田中克弘：ベクトル計算機を用いた円筒パネルの弾塑性有限変位解析，構造工学論文集，土木学会，Vol. 33A，pp. 53-62，1987. 3.
- 5) 三上市蔵・松本浩徳・辻省悟・田中克弘：初期不整を有する円筒パネルの圧縮強度，構造工学論文集，土木学会，Vol. 36A，pp. 217-228，1990. 3.
- 6) 三上市蔵・角肇・木元宏之：円周方向面内力を受ける円筒パネルの複合非線形解析のための近似理論，構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，Vol. 16，pp. 343-348，1992. 7.
- 7) Kármán, T. V. : Festigkeitsprobleme im Maschinenbau, Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, Vol. IV, pp. 314-385, 1910.
- 8) Flugge, W. : Stresses in Shells, 2nd ed., Springer-Verlag, 1973.
- 9) Washizu, K. : Variational Method in Elasticity and Plasticity, 3rd ed., Pergamon Press, 1982.
- 10) Mikami, I., Akamatsu, Y., and Sakamoto, S. : Residual Stress Measurement of Steel Curved Members, Technology Report of Kansai Univ., Vol. 32, pp. 167-177, 1990. 3.

(1992年9月21日受付)