

静水圧を受ける薄肉弾性円筒シェルの座屈荷重の解析と境界条件の影響

ELASTIC BUCKLING ANALYSIS OF CIRCULAR CYLINDRICAL SHELLS WITH
VARIOUS END CONDITIONS UNDER HYDRO STATIC PRESSURE LOADING

増田陳紀* 西脇威夫** 長野克哉*** 小川研一****

By Nobutoshi MASUDA, Takeo NISHIWAKI, Katsuya NAGANO and Ken-ichi OGAWA

Circular cylindrical shells are the most common structural style used for caissons and tanks. They are subjected to pressure loadings. This paper deals with the buckling behavior of the shells subject to hydrostatic pressure.

As for the finite element analysis, validity of the selection of a partial structure considering symmetry is examined. By the selection the amount of calculation can be reduced considerably.

It is confirmed by numerical calculations that when a cylindrical shell is supported simply at both ends, buckling load under axial constraint is greater than the load under axially non-constrained condition. And it is revealed that in order to predict the buckling load accurately, the interaction between circumferential buckling waves and axial ones must be considered for shells with free upperend and simply supported lowerend.

1. はじめに

海中ケーソンや地中タンクなどの大型土木構造物に薄肉円筒シェル構造が用いられることがある。これらの構造物には側圧が作用し、設計・架設に際して座屈に対する安全性を検討しておくことが重要となる。側圧が作用する円筒シェルの座屈耐力については、上下端単純支持の条件に対してはこれまでに研究成果が報告されている。しかし、上述のような実構造物を想定した場合には、必ずしもこのような境界条件を適用した検討のみでは十分とは言えず、基礎的な検討として上端自由下端単純支持の境界条件、また静水圧のように直線的に変化する側圧の下での座屈挙動や座屈荷重などを把握しておくことも必要と思われる。

関連する既往の研究としては、一様な側圧が作用する円筒シェルの座屈荷重に関しては八巻らによる一連の研究^{1) 2)}が挙げられる。これは Flugge および Donnell³⁾の式をもとに、円筒シェルの座屈荷重を固有値問題として理論的に解きパラメトリックな検討を行ったものである。静水圧が作用する問題に関しては植村らの研究⁴⁾が存在するが、対象とした境界条件は上下単純支持の1条件のみである。1987年に発表された座屈設計ガイドラインの中で円筒シェルの座屈に関するその後の研究状況がまとめられている⁵⁾が、側圧が作用する場合については上記の研究のみが取り上げられており、この問題に関してその後の発展はみられていない。上端自由下端単純支持の境界条件を有する円筒シェルあるいは静水圧が作用する円筒シェルに関する研究は必ずしも十分になされておらず、参考となる資料も少ないのが現状である。

* 工博 武蔵工業大学助教授 工学部土木工学科 (〒158東京都世田谷区玉堤1-28-1)

** 工博 武蔵工業大学教授 工学部土木工学科

*** 工修 研究当時 武蔵工業大学大学院 土木工学専攻修士課程学生

**** 武蔵工業大学大学院 土木工学専攻修士課程

側圧を受ける円筒シェルの座屈荷重を求めるための手法としては、エネルギー的考察に基づいた理論解析、有限要素法を主とする数値解析、あるいは実験による方法などが考えられる。理論解析によって座屈荷重を求めるには、その過程において座屈時の変形様式を仮定しなければならず、変形をどのような式で表せばよいかが問題となる。有限要素法による数値解析は座屈時の変形様式を直接には仮定する必要がなく、原理的には任意の境界条件や荷重条件の下での解を表現することができる。また、固有値による理論解析からは一般には得ることが困難な座屈前後の変形挙動を知ることができる。しかし、形状パラメータなどに着目して座屈荷重をパラメトリックに検討するためには膨大な計算回数が必要となる。一方、実験による検討には、円筒シェルの座屈挙動が初期不整に敏感であり、様々な境界条件を試験体に対して忠実に再現することが難しいという問題点が伴う。

以上の背景を考慮して本研究では、座屈荷重のみでなく座屈前後の挙動を把握するのに都合のよい有限要素法を用いた数値解析により、前述の円筒シェルの座屈問題の中から、基礎的な次の問題を検討する。すなわち、上下端単純支持された静水圧を受ける円筒シェルに関して、上下端の軸方向変位の拘束が座屈荷重に及ぼす影響および上端自由下端単純支持で静水圧を受ける円筒シェルに関して座屈挙動に及ぼす変形拘束の影響の検討である。このような境界条件と荷重条件の場合、上端付近と下端付近の周方向座屈波形が異なることが予想されその確認を行うことも目的とする。さらに、できるだけ少ない計算量で座屈荷重を求めるために粗い要素分割を用いた試計算に基づいて部分構造を抽出し、細かい要素分割で解析を行う方法の適用性と適用可能範囲に関する考察を併せて行う。上記の検討に先駆けて偏心載荷により得られる荷重－変位曲線に Southwell-Plot を適用して座屈荷重を評価する際の客観的なデータ処理の方法について検討する。

2. Southwell-Plotを用いた座屈荷重の評価方法

2.1 用いる幾何学的非線形有限要素解析法⁴⁾

基本として用いる解析法は、薄板で構成される立体構造を対象とした増分法による文献(6)の幾何学的非線形解析法である。要素には、面内回転を節点変位成分として有する1節点6自由度計18自由度の三角形薄板線形要素を用い、幾何学的非線形性は要素の剛体回転によって生ずるとの立場から、直接、全体座標系での剛体回転を含む節点変位と、要素と共に移動する要素座標系での剛体回転を含まない節点変位との関係式を誘導し、評価している。

本研究の数値解析での増分の制御は荷重制御とし、側圧の増加に対する円筒シェルの応答を求める。本解析法は、座屈時の挙動の追跡にも固有値計算を用いない解析法であるため計算量が、低減されるが座屈挙動の追跡のためには、初期不整あるいは荷重の偏心を考慮しなければならない。本解析では、偏心荷重を載荷する方法を用いることとする。

2.2 Southwell-Plot⁷⁾を用いて座屈荷重を評価する客観的な方法

側圧を受ける円筒シェルの荷重－変位関係は、圧縮を受ける棒のそれに類似していることが知られている。このことより、座屈荷重の評価には、棒の Euler 座屈の実験値から座屈荷重を定めるのに用いられる Southwell の方法を採用する。

座屈変形様式が既知である場合には、その変形様式を初期たわみに与えて計算を行えば、Southwell-Plot により得られる曲線は直線となりし

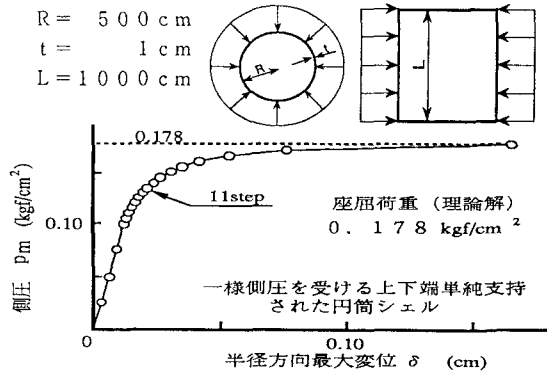


図 - 1 荷重 - 変位関係

たがって一定の勾配から座屈荷重がその逆数として一義的に定まることになる。しかし、一般的には与えられた初期不整の下で計算された荷重－変位関係から得られるSouthwell-Plot曲線は直線とはならないため、勾配をどのように定めるかが問題となる。ここでは、この問題について次のような一義的な評価方法を提案する。理論解が既知である一様側圧を受ける上下端単純支持された円筒シェルを対象として考える。数値解析結果から荷重－変位関係を図-1に示す。

Southwell-Plotの勾配は最小二乗法により求めるが、その際に取り込むデータの範囲を変化させると当然、得られる勾配の値が異なる。取り込む一定荷重増分の最初のステップ番号を m 、最後のステップ番号を n として、この範囲のSouthwell-Plotに対し最小二乗法で勾配を求め、その逆数を計算座屈荷重 $F(m,n)$ とする。 m を固定し n を1ステップずつ増していったときの計算値と理論解との関係について考える。例として $m=11$ の場合について n と計算座屈荷重 $F(m,n)$ の関係を図-2に、またこのときの n と計算座屈荷重 $F(m,n)$ の増加量 ΔF との関係を図-3に示す。

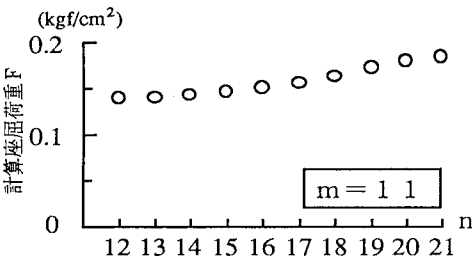


図 - 2 n と計算座屈荷重 F との関係

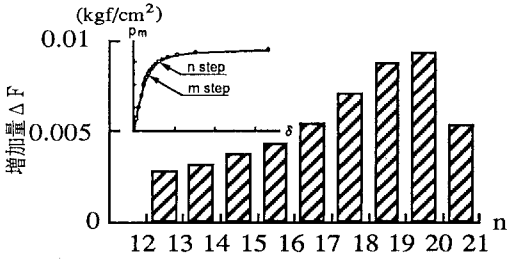


図 - 3 n と増加量 ΔF との関係

図-3より n を増やしていくと計算座屈荷重の増加量 ΔF は徐々に増加していき最大を示した後、減少する。また、理論解はこの増加量が最大となるところに挟まれている。このことから、座屈荷重を、増加量 ΔF が最大となる前後の計算座屈荷重 $F(m,n-1)$ と $F(m,n)$ との平均で評価する方法を考える。表-1は、 m の値に対するこの方法で求めた計算値と理論解を比較したものであるが、理論解との差は最大でも7%以内である。さらに、少なくともこの問題の、座屈荷重の75%以上かつ95%（この場合11step～18step）の荷重段階に対する m を採用すれば計算座屈荷重と理論解との差は2%以内である。理論解が既知でない場合は、 m として採用する座屈段階が計算座屈荷重より逆算して、上記のようにその75%～95%の範囲内に入るような m を一般には反復して求める方法が考えられる。

表 - 1 m の値に対する座屈荷重の計算値と理論解の差

固定 step(m)	計算値	理論解との差	固定 step(m)	計算値	理論解との差
4	0.171	-3.9%	12	0.176	-1.1%
5	0.176	-1.1%	13	0.176	-1.1%
6	0.181	1.6%	14	0.175	-1.7%
7	0.167	-6.2%	15	0.175	-1.7%
8	0.174	-2.2%	16	0.175	-1.7%
9	0.171	-3.4%	17	0.175	-1.7%
10	0.169	-3.9%	18	0.176	-1.1%
11	0.177	0.1%	19	0.182	2.2%

側圧を受ける円筒シェルの座屈荷重の評価方法として、Southwellの方法を上述した手法で適用し評価することは、有効な方法であると考えられる。

3. 上下端単純支持された円筒シェルにおける上下端の軸方向変位拘束が座屈荷重に及ぼす影響
円筒シェルの座屈荷重に関する既往の研究成果²⁾によれば、一様側圧を受ける円筒シェルでは、極端に短いものを除いて、円筒軸方向変位を完全に拘束することにより全く拘束しない場合に比べ座屈荷重が約50%増加する。直線的に変化する側圧を受ける場合にも同様な傾向が予測される。そこで、軸方向変位拘束の違いが座屈荷重に及ぼす影響について、静水圧を受ける上下端単純支持された円筒シェルを対象に検討を行なう。

なお、ここでは計算量を低減するための部分構造抽出による解析手法に関して、その適用性について併せて考察する。

3. 1 試計算により得られる対称性を利用した部分構造抽出による解析手法

有限要素法を用いた数値解析では、一般に離散化による誤差を最小限に抑えるために相当数の自由度を設定する必要がある。また、本研究で対象とする静水圧を受ける円筒シェルの座屈を解析しようとする場合、棒や板の座屈解析の場合とは異なり、一般に局所的な座屈波形を伴うため構造全体を対象とすることが必要となり、固有値解析あるいは反復計算による非線形解析の計算量が著しく増し、その面からも計算量による制約を受けることになる。このような制約の中でできるだけ無駄の無い解析を行う方法として、全体構造解析から変形応答の対称性を見だし、対称条件を考慮して構造の一部を抽出する次のような方法が考えられる。すなわち側圧 p' (z, θ) を受ける円筒シェルが周方向に波数を生じる座屈様式では周方向波数が予測できないため、まず比較的粗い要素分割で試計算を行う。その際、周方向波数を伴わない軸対称座屈が生じず、所要の座屈変形様式が得られるように、径路の分岐を誘発すべく載荷荷重に僅かな偏心を、次式の第2項により与え (図-4、図-5) 載荷荷重を $p(z, \theta)$ とする。ただし、 a は与える不整の大きさを表す係数で、 n は偏心の周期を表す。

$$p(z, \theta) = p'(z, \theta) + a \cdot p'(z, \theta) \cos(n\theta) \quad (1)$$

座屈挙動から対称性が確認できれば、そこから1波分を抽出して細かい要素分割を施した解析モデルを用いて座屈荷重を求める。

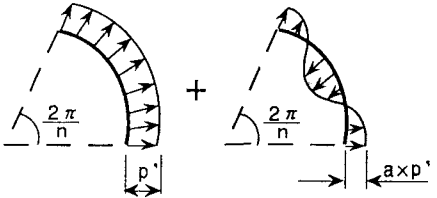


図-4 載荷荷重

3. 2 解析モデル

解析対象の両端単純支持の円筒シェルの図-5に示す。なお、径厚比 D/t は1000、Batdorfパラメータは1908である。荷重条件を図-6に示す。対象とする境界条件は、表-2のように円筒軸方向 (Z 軸方向) の拘束条件を変えた三種類の条件である。

1/2構造を対象とした試計算($a=0.0005, n=1$)の結果として得られたそれぞれの境界条件下での座屈時周方向波数を表-3に示す。座屈荷重を求めるための詳細解析モデルは、試計算から得られた座屈時周方向波数の1波部分を抽出し、周方向24等分割、軸方向20等分割とした、要素分割モデルである。荷重載荷の際、解析モデルに対して一波部分の偏心を式(1)の偏心量 a を $a=0.0005$ として与える。

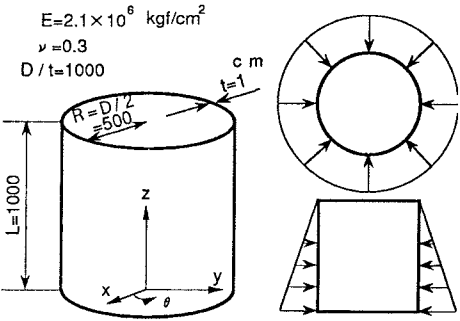
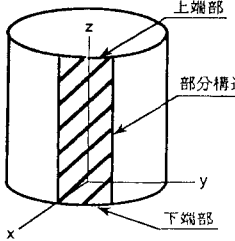


図-5 諸元 図-6 荷重条件

表-2 三種類の軸方向 (z 軸方向) 拘束条件 ①②③



○: 自由 ×: 拘束

		x 軸方向変位	y 軸方向変位	z 軸方向変位	x 軸回り変位	y 軸回り変位	z 軸回り変位
①	上端部			○			
	下端部			○			
②	上端部	×	×	○	○	○	○
	下端部			×			
③	上端部			×			
	下端部			×			

表-3 試計算による座屈時の周方向波数および部分構造抽出により得られた座屈荷重

【 () 内は理論値】

境界条件	周方向波数	座屈荷重 kgf/cm ²
①	9	0.345 (0.342)
②	10	0.450 (-----)
③	11	0.482 (-----)

◎ 座屈荷重は下端部における圧力

3. 3 解析結果および解析手法の妥当性の検証

解析結果より荷重（下端部作用圧力）－半径方向最大変位関係を図-7に示す．この結果に2. のSouth-wellの方法を適用して求めた座屈荷重を表-3に示す．また，変形様式が大きく変化する点の前後における変形を等高線図と断面変形図として図-8に示す．

本問題の境界条件①(上下端軸方向変位自由)については既往の研究において理論解が報告されている⁴⁾．この理論解と本数値解析の結果を比較すると、

理論解 $P_{cr}=0.342\text{kgf/cm}^2$

数値解析解 $P_{cr}=0.345\text{kgf/cm}^2$

となり，理論解と0.9%の誤差で一致する．このことから本数値解析手法は，妥当であると考えられる．

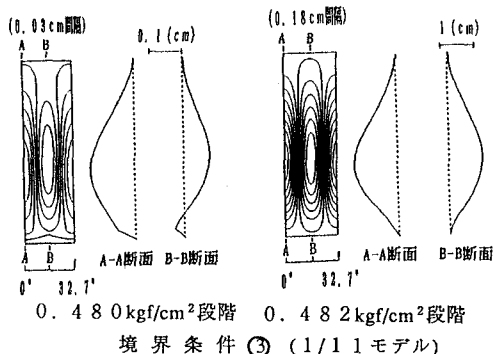
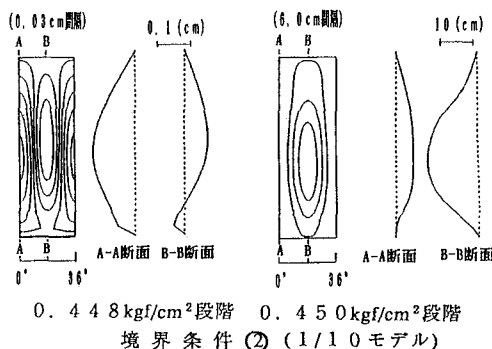
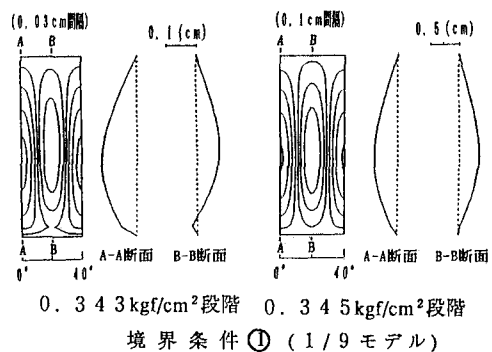
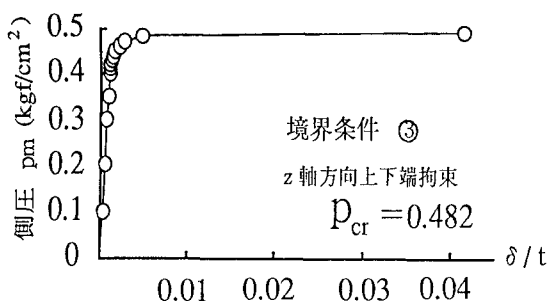
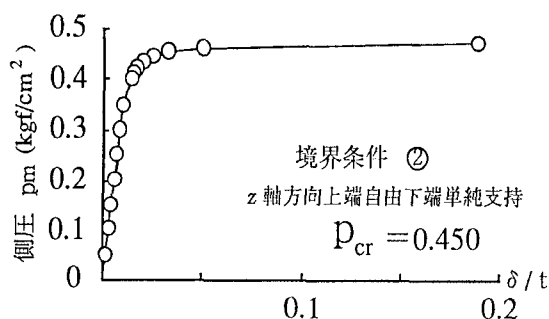
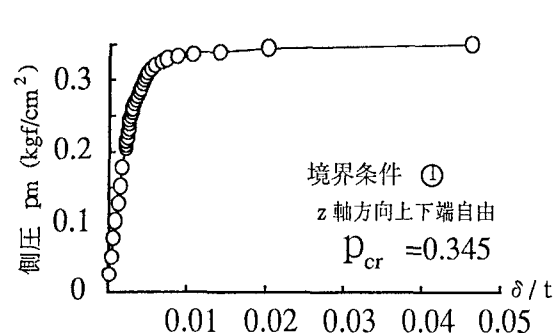


図-7 荷重（下端部作用圧力）－半径方向最大変位

図-8 等高線図および断面変形図

3. 4 端部軸方向変位の拘束による影響

直線的に変化する側圧を受ける場合には、図-7に示すように両端の軸方向変位を拘束することによる座屈荷重の増加は40%となる。実構造物に対して実際の境界条件と思われる、荷重が大きい下部単純支持端のみを軸方向拘束した場合の座屈荷重の増加量は30%である。また荷重-体積変化率関係を示す図-9より、予測されるように両端の軸方向変位を拘束することによって、側圧に対する構造物全体の剛性が約10%高くなるが判る。

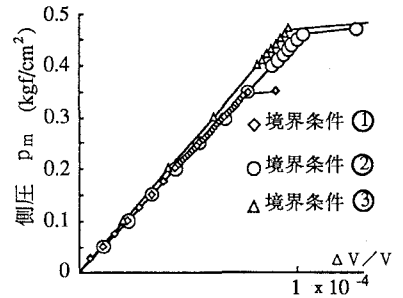


図-9 荷重-体積変化率関係

4. 上端自由下端単純支持された円筒シェルの座屈

4. 1 試計算による座屈挙動の概要

(1) 解析モデルおよび荷重方法

対象とする円筒シェルの構造諸元は図-5と同様、荷重条件は図-6と同様である。偏心荷重様式は、図-10に示すものを採用する。試計算に用いる解析モデルは、全体構造から1/2部分を抽出したものに比較的粗い要素分割を施した周方向48等分割、軸方向20等分割のモデルである。境界条件は上端自由で下端円筒軸方向拘束の面外方向単純支持とする。偏心は(1)式において、 $n=1, a=0.0005$ として与える。荷重(下端作用圧力)の制御に関しては、はじめ増分量は 0.100kgf/cm^2 、 0.300kgf/cm^2 から 0.050kgf/cm^2 とし変形様式が大きく変化し始める 0.500kgf/cm^2 から 0.002kgf/cm^2 とした。

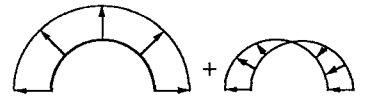


図-10 試計算における載荷荷重様式

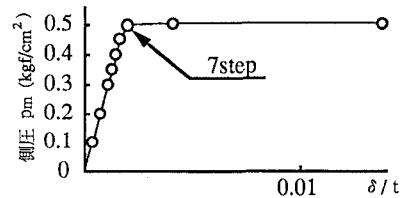


図-11 荷重(下端部作用圧力)-半径方向最大変位関係

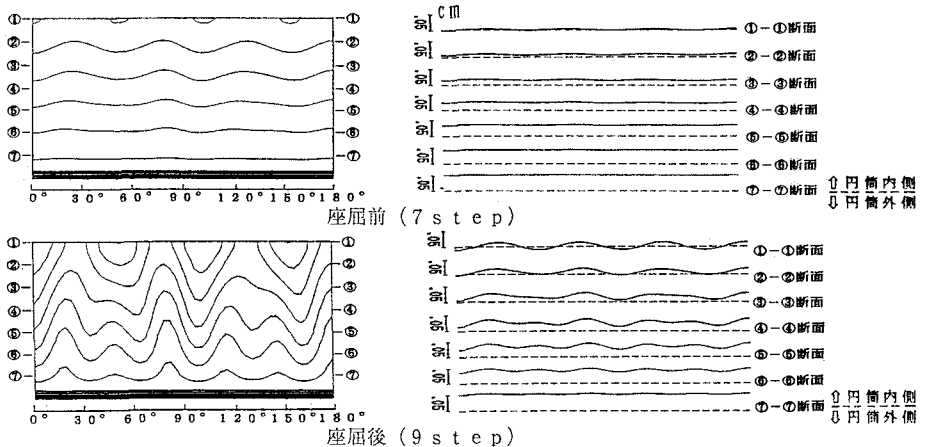


図-12 等高線図および変形図(ステップ)

(2) 荷重-変位関係および座屈変形様式

解析結果より、荷重と半径方向最大変位との関係を図-11に示す。この関係から、7ステップ(約 0.5kgf/cm^2)を境として荷重の変位に対する増加割合が著しく減少していることが読み取れる。半径方向変位が増加する前後のステップ7,9ステップにおける変形様式に注目してみる。初期形状からの半径方向変位の等高線図と変形図を図-12に示す。9ステップの変形様式から自由端付近と単純支持端付近で周方向波数が異なることが明かである。

4. 2 部分構造を抽出した座屈荷重解析

(1) 解析モデル

周方向波形が軸方向に関して様な問題と異なり、本問題では自由端付近と単純支持端付近で周方向波数が増えるため、対称性は見いだせず、したがって部分構造を抽出した座屈解析は成り立たない。1/2部分を対象とした細かな要素分割による標記問題の解析には、膨大な計算量を必要とするため、ここではひとまず、この問題のこれ以上の解析を取りやめる。

ところで、実構造物においては、何らかの補剛を行うことが通常である。以下では対称変形が生ずるようなねじり拘束が何らかの方法により得られた場合を対象にする解析を行うこととする。部分構造として1/7, 1/8, 1/9の3通りを抽出して、座屈解析を行う。偏心荷重は、各モデルに対して $a=0.0005$ とする1波分の荷重を載荷する。

(2) 解析結果

3通りの部分解析モデルそれぞれに対する解析結果より、それぞれを相対的に比較するために荷重と体積減少率の関係に置き換えた結果を図-13に、また、荷重-半径方向最大変位の関係を図-14に示す。変形挙動としては、荷重と体積減少率の線形性がくずれ変形様式が大きく変化する点の前後における変形を等高線図と断面波形図として図-15に示す。変形図から判るように、1/7, 1/8, 1/9の各モデルのそれぞれで異なった変形挙動を示す。

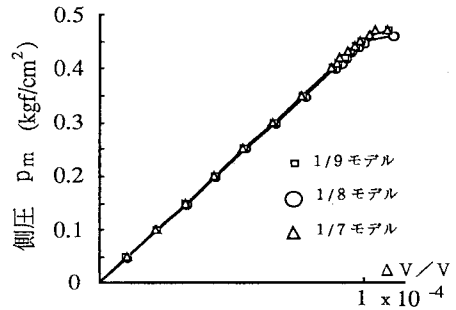


図-13 荷重-体積変化率関係図

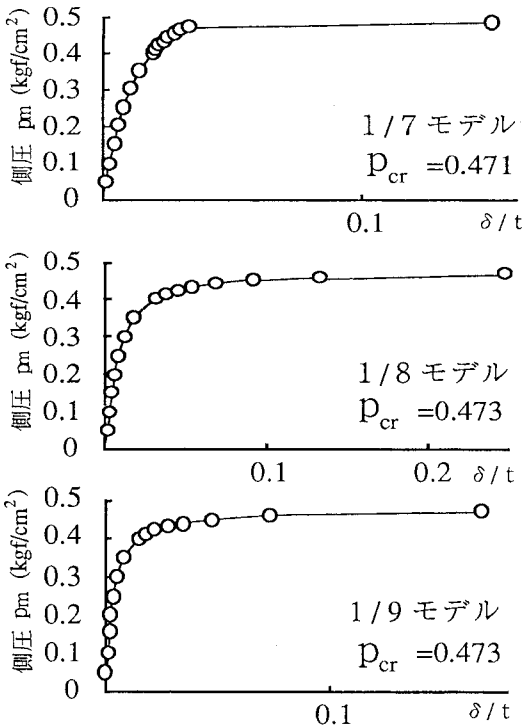


図-14 荷重(下端部作用圧力)-半径方向最大変位関係

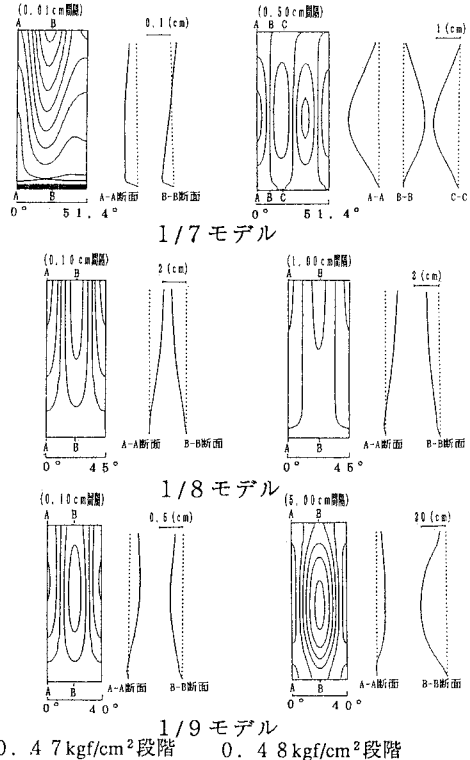


図-15 等高線図および断面変形図

一方、座屈荷重耐荷力に着目してみるといずれの部分構造モデルにおいても 0.47kgf/cm^2 前後の値を示す、この値を上端で面外変位を拘束（単純支持）された境界条件②の値と比較すると、

上端単純支持（軸方向変位自由）	}	0.45kgf/cm^2
下端単純支持（軸方向変位固定）		
上端自由	}	0.47kgf/cm^2
下端単純支持（軸方向変位固定）		

となり、上端部の面外変位を拘束した値の方が拘束しない場合の値よりも小さくなっている。

4. 3 考察

静水圧を受ける境界条件が上端自由下端単純支持の円筒シェルの座屈挙動について、全体構造から1/2部分を抽出したモデルを用いた解析の結果から、面外拘束条件の異なる上端部付近と下端部付近で周方向波数が異なることを確認することができた。本問題のような軸方向波形と周方向波形の連成を考慮する必要がある問題では、部分構造を抽出し解析する手法を採用することはできない。このような問題について有限要素法で座屈耐力解析を行うには、全体構造もしくは全体の1/2構造モデルに十分な要素分割を施して計算する必要がある。この場合、問題が大次元化し計算量が膨大となる。固有値問題として臨界座屈値を求める理論解析を行う場合においても軸方向波と周方向波の連成を考慮した変形様式が必要となることから、数式処理システムを使用しても中間膨張が原因で計算容量に制約を受けることになる。このため、連成を十分考慮しつつ、計算容量を低減するための何らかの工夫が必要である。

対称変形を生ずるように拘束することが可能な場合には、ここで対象とした諸元の円筒シェルに関して1/7～1/9対称の範囲内では、変形様式が著しく異なるものの座屈荷重はほぼ一定の値となる結果が得られた。

5. おわりに

本研究から得られた知見を以下に列挙する。まず数値解析手法について、

1) 周方向座屈波形が軸方向に変化しない境界条件、荷重条件の下での円筒シェルの場合には、粗い要素分割による試計算に基づき、対称性を考慮して部分構造を抽出し、十分な要素分割を行った解析モデルを用いることによって、全体構造を対象として解析を行うのに比べて少ない計算量で座屈荷重を精度よく求めることが可能である。

2) Southwell-Plotの勾配より座屈荷重を評価する際のデータ取り込み範囲に関する一義的な方法を提案しここで取り上げた問題の場合には、理論解に対してたかだか数%の誤差で解を推定することが可能であることを示した。

また、特定の構造諸元をもつ円筒シェルに関してではあるが、

3) 静水圧が作用する上下端単純支持の円筒シェルに関して端部軸方向変位拘束の違いが座屈荷重に及ぼす影響を調べた結果、相対的に大きな荷重が載荷する下端部の軸方向変位を拘束することにより、約30%座屈荷重が増大する。

4) 静水圧が作用する上端自由下端単純支持の円筒シェルの座屈挙動解析を行い、無補剛円筒シェルの場合には、軸方向波形と周方向波形の連成を考慮する必要性を示すとともに、補剛により連成を抑え、対称性を維持できる場合には、周方向波数が7～9の範囲では、上端単純支持の条件下での座屈荷重に劣らない耐力を確保することができることを確認した。

謝 辞

本研究を遂行するに際し、住友金属工業株式会社建設エンジニアリング事業本部の飯村修氏、柳本泰伴氏にご協力頂きました。ここに記して謝意を表します。

(参考文献)

- 1) 八巻昇：円筒殻の外圧による座屈に及ぼす座屈前変形の影響，東北大学高速力学研究所報告，第25巻，第259号，pp.153-175,1969/1970.
- 2) 八巻昇：円筒殻の外圧による座屈，東北大学高速力学研究所報告，第24巻，第236号pp.3755,1968/1969.
- 3) Donnell,L.H.:Buckling of thin cylinders under circumferential compression,Beams,Plates,and Shells-Section7.3,McGraw-Hill;Walled structures,Comp.Meth.Appl.Eng.,Vol.32,pp.406-416,1976.
- 4) 植村益次・森田道子：直線的に変化する外圧による円筒殻の座屈，日本機械学会論文集（第1部），37巻，298号，pp.1100-1106,1971.6.
- 5) 土木学会鋼構造委員会：座屈設計ガイドライン-第13章パイプおよびシェル-，鋼構造シリーズ2 土木学会，p.324,1987.
- 6) 吉田裕・増田陳紀・松田隆：薄板で構成される立体構造の弾塑性・大变位離散化要素解析法，土木学会論文集,第288号，pp.41-55,1979.8.
- 7) Timoshenko.S.P and J.M.Gere:Theory of Elastic Stability,2nd ed.,McGraw-Hill,pp.278-300,1961.

(1992年9月21日受付)