

圧縮軸力を受ける上端支持柱の動的強度特性 についての基礎的考察

A FUNDAMENTAL STUDY ON DYNAMIC STRENGTH CHARACTERISTICS OF PROPPED-CANTILEVER COLUMN UNDER AXIAL COMPRESSION

中島章典*・工藤宏生**・阿部英彦***・倉西 茂****

By Akinori NAKAJIMA, Hiroo KUDOH, Hidehiko ABE and Shigeru KURANISHI

For statically indeterminate structures, the structure may collapse after the multiple plastic hinges are developed in the structure. Moreover, these structures are usually composed of members with variable cross section. Therefore, the dynamic strength characteristics of the structures may become complicated ones. This paper deals with the dynamic strength characteristics of propped-cantilever column with stepped cross section under static axial compression and lateral dynamic loading. The column is modelled as an SDOF system, and thereafter the restoring force characteristics and the energy absorption of the system are investigated analytically and numerically.

1. はじめに

吊形式橋梁タワー、高架橋の橋脚等は、上部構造の死荷重による圧縮軸力を受けながら、地震時にはおもに側方から動的外力を受ける。したがって、これらの構造物の耐震設計はこのような荷重条件の基で行われる必要がある。このような観点から、著者らは静的不安定性をもたらず圧縮軸力と側方から動的外力を受ける片持ち柱モデルを対象として、その動的強度特性を明らかにし¹⁾、また、動的外力によるエネルギー入力に相当する外力パワーと構造物のエネルギー吸収能力に相当する強度パワーを比較することで、対象構造物の動的倒壊判定が行えることを報告してきた²⁾。これらの研究で対象とした片持ち柱は静定構造物であり、塑性ヒンジが1つ形成されることによって全体的な倒壊が起こる。これに対して、ケーブルによって頂部の水平方向変位がある程度拘束される吊形式橋梁タワー³⁾あるいはアーチ、ラーメン橋脚など不静定構造物^{4), 5)}は、複数の塑性ヒンジが形成されてはじめて倒壊するものと考えられる。さらに、これらの構造物は一般に変断面部材によって構成されるために、その復元力特性は静定構造物の復元力特性とはかなり異なった複雑なものになると予想される⁶⁾。

本研究は、変断面部材を有する不静定構造物の一例として、圧縮軸力を受ける上端支持柱の基本的な動的強度特性を明らかにすることを目的としている。まず、上端支持柱を1自由度の質点-回転ばね系にモデル化し、基本的な系の変位・復元力関係および系のエネルギー吸収能力を解析的に検討した。また、上端支持柱のエネルギー吸収能力と静定構造物である片持ち柱のそれを比較した。さらに、上端支持柱に対して、これまで著者らが

* 工博 宇都宮大学助教授 工学部建設学科建設工学コース (321 宇都宮市石井町 2753)

** 鹿島建設株式会社 建設総事業本部土木設計本部 (107 東京都港区赤坂 6-5-30)

*** 工博 宇都宮大学教授 工学部建設学科建設工学コース

**** 工博 東北大学教授 工学部土木工学科 (980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

提案した上述の動的倒壊判定法²⁾の適用を試みた。

本研究では、構造物が倒壊するような終局的な状態を限界状態と考えている。しかし、材料の降伏や最大耐荷力など倒壊にいたる以前の状態に着目する場合にも、ここで明らかにされた系の変位・復元力関係などは有用なものであると考えられる。

2. 上端支持柱のモデル化

本研究では、図 1 のような圧縮軸力を受ける上端支持柱を対象とし、これを質点、剛棒および 2 つの回転ばねからなる最も基本的な 1 自由度系にモデル化する。上端支持柱の中央高さ付近において塑性ヒンジが発生する位置は、一般に柱軸方向の断面構成などによって変化するが、ここでは不静定構造物の基本的な動的強度特性の解明を目的とするため、その位置を中央高さに固定して考える。この系に水平方向の動的外力 $f(t)$ が作用する場合、系の運動方程式は

$$m\ddot{x} + \frac{(R_1 + 2R_2) - 2Px}{\ell} = f(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

と表せる。ここに、 m は質量、 x は質点の水平方向変位、 R_1 、 R_2 はそれぞれ基部および中央部の回転ばねの復元モーメント、 P は上端に作用する鉛直方向の静的圧縮軸力である。上式中、左辺第 2 項は静的圧縮軸力の影響を含んだ水平方向の復元力であり、これを次式のように $R'(x)$ と置く。

$$R'(x) = \frac{(R_1 + 2R_2) - 2Px}{\ell} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここでは、静的圧縮軸力 P がポテンシャルエネルギーに及ぼす影響は考慮しているが、それ以外の幾何学的非線形性の影響は無視する。したがって、近似的に $\theta = x/\ell$ が成立する。また、粘性減衰の影響は考慮しない。回転ばねの弾性範囲では、図 1 に示す諸量を用いて、

$$R_1 = k_1\theta, \quad R_2 = 2k_2\theta \quad \dots\dots\dots (3)$$

と表せる。これを式 (2) に代入し、水平方向の復元力 $R'(x) = 0$ の条件から、限界圧縮軸力（座屈荷重） P_{CR} は

$$P_{CR} = (1 + 4\eta) \frac{k_1}{2\ell} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。ここに、 $\eta = k_2/k_1$ である。

3. 系の変位・復元力関係

構造物が倒壊するような終局状態までのエネルギー吸収量は、粘性および履歴減衰によって失われるエネルギー量が無視すれば、系の変位・復元力関係の経路と水平変位を表す x 軸によって囲まれる面積に相当すると考えられる¹⁾。したがって、このエネルギー吸収能力を明らかにするためには、まず、系の変位・復元力関係の経路を明確にする必要がある。ここで対象とした上端支持柱モデルの復元力特性は、2 つの回転ばねの特性と静的荷重の大きさに依存する。そこで、系の変位・復元力関係を検討するに先だって、次の 3 つのパラメーターを設定する。ただし、基部および中央部の回転ばねはどちらも完全弾塑性型の復元モーメント特性を有するものとする。

- 1) 基部に対する中央部の回転ばね定数比 $\eta (= k_2/k_1)$ 、
- 2) 基部に対する中央部の回転ばねの降伏回転角の比 $\phi (= \theta_{Y2}/2\theta_{Y1})$

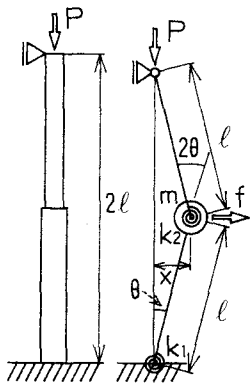


図 1 上端支持柱モデル

表 1 系の変位・復元力関係の経路

ϕ	x	$R'(x)$
$\phi > 1$	$x_Y \leq x < \phi x_Y$	$\frac{\{4\eta - \alpha(1+4\eta)\}x + x_Y}{\ell^2} k_1$
	$\phi x_Y \leq x$	$\frac{(1+4\eta\phi)x_Y - \alpha(1+4\eta)x}{\ell^2} k_1$
$\phi = 1$	$x_Y \leq x$	$\frac{(1+4\eta)(x_Y - \alpha x)}{\ell^2} k_1$
$\phi < 1$	$\phi x_Y \leq x < x_Y$	$\frac{\{1 - \alpha(1+4\eta)\}x + 4\eta\phi x_Y}{\ell^2} k_1$
	$x_Y \leq x$	$\frac{(1+4\eta\phi)x_Y - \alpha(1+4\eta)x}{\ell^2} k_1$

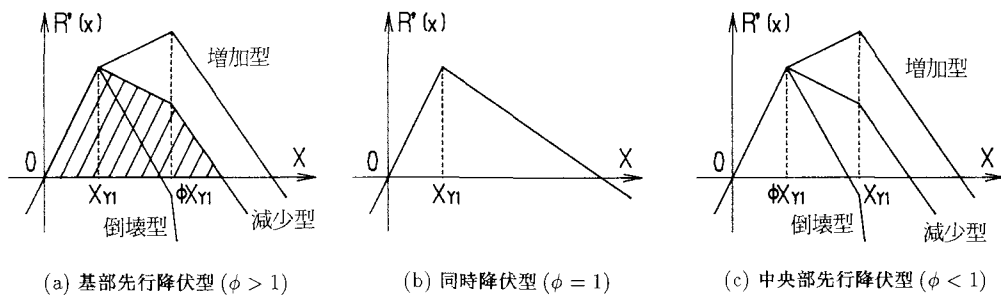


図 2 系の変位・復元力関係の概形

3) 限界圧縮軸力 (座屈荷重) P_{CR} に対する作用静的圧縮軸力 P の比 $\alpha (= P/P_{CR})$

対象とする上端支持柱において、上述のパラメーターの値を求める場合には、断面の曲げモーメントと曲率の関係が近似的に完全弾塑性型になると仮定し、基部および中央部断面の軸力作用下の全塑性曲げモーメントと降伏曲率の値を用いて、 η 、 ϕ を算定すれば、以下の考察に適用することができると考えられる。また、回転ばねのばね定数 k_i は、モデル化される柱の対応する部分の曲げ剛度 EI_i を用いて、 $k_i = EI_i/\ell$ と仮定する。

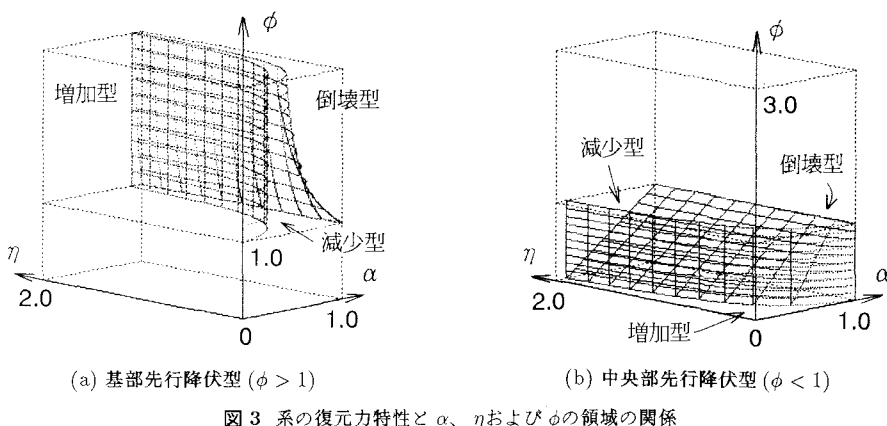
基部の回転ばねと中央部の回転ばねが降伏する順序などを考慮して、式 (2) に表される経路を整理すれば、復元力が再びゼロになるまでの系の変位・復元力関係の経路は、表 1 に示すようになる。ただし、どちらのばねも降伏しない弾性状態の変位・復元力関係は次式で表される。

$$R'(x) = \frac{k_1(1-\alpha)(1+4\eta)}{\ell^2} x \quad \dots \dots \dots (5)$$

図 2 は、表 1 中に示された系の変位・復元力関係の経路を模式的に示したものである。この図から、基部あるいは中央部のどちらか一方のばねだけが降伏した後、系の剛性がまだ正の勾配である場合と、既に負の勾配をもつ場合のあることがわかる。系の剛性が正の勾配をもつ場合は、塑性ヒンジが 1 つ形成された後に最高荷重に到達する。さらに、系の剛性が負の勾配をもつ場合には、もう 1 つのばねが降伏しない場合でも、復元力が再びゼロになる終局状態に達することがある。つまり、この系では塑性ヒンジが必ずしも 2 つ形成されない場合でも、終局状態に到達することを意味している。図 3 は、表 1 あるいは図 2 に示す変位・復元力関係の各経路と系の特性を表すパラメーター α 、 η および ϕ の関係を $\alpha - \eta - \phi$ 座標中に示している。ただし、 $\phi = 1$ である同時降伏型の場合は省略している。また表 2 には、各経路に付けた名称とそれに対応した α 、 η および ϕ の領域をまとめている。例えば、 $\alpha - \eta - \phi$ 座標中の点 $(\alpha, \eta, \phi) = (0.9, 1, 1.5)$ は図 3(a) に示す 2 つの曲面に挟まれた領域に

表 2 各経路のエネルギー吸収能力とその境界面

ϕ	経路名	E_{SU}	α 、 η および ϕ の領域	
$\phi > 1$	基部先行降伏倒壊型	$\frac{(1-\alpha)(1+4\eta)}{\alpha(1+4\eta)-4\eta} E_Y$	$\eta < \frac{\alpha}{4(1-\alpha)}$	$\phi \geq \frac{1}{(1+4\eta)\alpha-4\eta}$
	基部先行降伏減少型	$\frac{(1+4\eta)\phi^2 - \alpha(1+4\eta\phi^2)(1+4\eta)}{\alpha(1+4\eta)} E_Y$		$\phi < \frac{1}{(1+4\eta)\alpha-4\eta}$
	基部先行降伏増加型		$\eta \geq \frac{\alpha}{4(1-\alpha)}$	—
$\phi = 1$	同時降伏型	$\frac{(1+4\eta)(1-\alpha)}{\alpha} E_Y$	—	—
$\phi < 1$	中央部先行降伏倒壊型	$\frac{4\eta\phi^2(1-\alpha)(1+4\eta)}{\alpha(1+4\eta)-1} E_Y$	$\eta > \frac{1-\alpha}{4\alpha}$	$\phi \leq \frac{(1+4\eta)\alpha-1}{4\eta}$
	中央部先行降伏減少型	$\frac{(1+4\eta)\phi^2 - \alpha(1+4\eta\phi^2)(1+4\eta)}{\alpha(1+4\eta)} E_Y$		$\phi > \frac{(1+4\eta)\alpha-1}{4\eta}$
	中央部先行降伏増加型		$\eta \leq \frac{1-\alpha}{4\alpha}$	—



あり、これは表 2 中の基部先行降伏減少型に相当する。このパラメーターをもつ系が

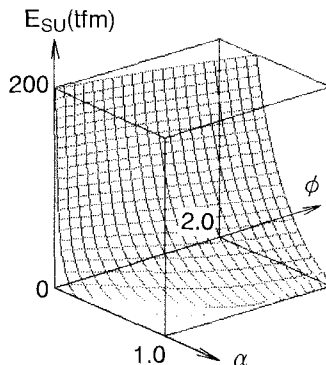
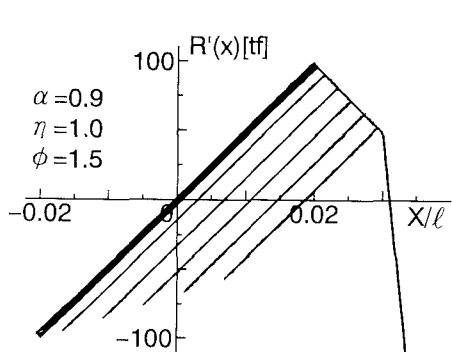
$$f(t) = -mZ \sin \omega t \dots\dots\dots (6)$$

のような系の固有円振動数 ω に等しい円振動数と加速度振幅 Z をもつ正弦波外力を受ける場合について、時刻歴応答解析を実行すると、図 4 に示す系の復元力特性が得られ、これは解析的に予想された基部先行降伏減少型になっていることがわかる。系がこの他のパラメーターを有する場合でも、パラメーターの組み合わせが図 3 中のどの領域に存在するかによって、系の変位・復元力関係の経路を予測することができる。

この数値計算例で対象とした上端支持柱の全高は $20m$ 、等断面の場合、有効座屈長を基に求めた細長比は 30 程度である。したがって、このプロポーションの柱断面で実際に許容される静的圧縮軸力より算定される α はかなり小さい値になり、その復元力特性は増加型になる場合が多いと思われる。

4. 系のエネルギー吸収能力と有効エネルギー入力

本研究で対象とした上端支持柱モデルにおいても、粘性および履歴減衰エネルギーを無視した系のエネルギー吸収能力 E_{SU} は図 2 に示す系の変位・復元力関係の経路と x 軸によって囲まれる部分の面積（例えば図中斜線部）として求められる。そこで、表 2 には、種々の経路に対して解析的に求められる E_{SU} も示している。ここに、 E_Y は基部回転ばねの降伏ひずみエネルギー（ $= k_1 \theta_Y^2 / 2$ ）である。たとえば、図 5 は $\eta = 1$ の場合について、 E_{SU} 、 α および ϕ の関係を表したものである。この図より、 ϕ が大きいほど、つまり基部先行降伏型の方が系のエネルギー吸収能力 E_{SU} は大きいことがわかる。前述の劣化型復元力特性を有する 1 自由度系について



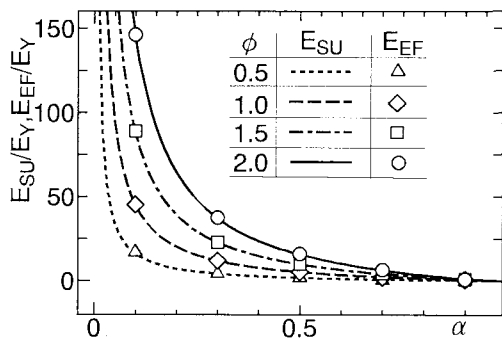


図 6 α 、 ϕ および E_{EF} の関係

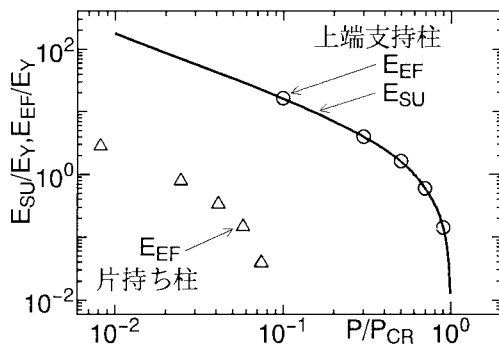


図 7 上端支持柱と片持ち柱の有効エネルギーの比較

の研究¹⁾では、動的外力によるエネルギー入力 E_F から履歴減衰エネルギー E_h を差し引いた有効エネルギー入力 E_{EF} が、系のエネルギー吸収能力 E_{SU} を越えた時に、系は動的終局状態にいたることも明らかにされている。すなわち、

$$E_{SU} \leq E_F - E_h (= E_{EF}) \quad \dots \dots \dots (7)$$

を満足する時刻に到達したとき、系は動的終局状態にいたる。

そこで、上端支持柱モデルについても、弾塑性時刻歴応答解析を行い、動的外力によるエネルギー入力がないにもかかわらず系の変位が発散する最初の時刻の状態までの有効エネルギー入力 E_{EF} を求めた。図 6 は、 $\eta = 1$ における α 、 ϕ および E_{EF} の関係を表したものである。縦軸は E_{EF} および E_{SU} を E_Y で無次元化して表している。図中の各マークは異なった ϕ に対する E_{EF} であり、各線がそれぞれの E_{SU} を表している。この図から、上端支持柱モデルにおいてもパラメーターにかかわらず、 E_{EF} の値が解析的に求められた E_{SU} に一致することが認められる。

次に、静定構造系と不静定構造系のエネルギー吸収能力の差異を検討するために、一例として、まったく同じ回転ばね特性 ($\eta = 1, \phi = 0.5$) を有する上端支持柱モデルと片持ち柱モデルについて、荷重 P と有効エネルギー入力 E_{EF} の関係を図 7 に示している。片持ち柱モデルは 2 自由度系になるが、2 つの質点の質量は、2 次までの固有振動数がモデル化される片持ち柱の 2 次までの曲げ固有振動数に一致するように決定している。横軸は荷重 P を上端支持柱の限界圧縮軸力 P_{CR} で無次元化して表している。○は上端支持柱の E_{EF} 、実線はその E_{SU} であり、△は片持ち柱の E_{EF} である。2 自由度系の片持ち柱モデルの E_{SU} を解析的に求めることは非常に難しい。しかしこの場合、数値計算によって求められた E_{EF} が E_{SU} を表していることが文献 (7) によって示されている。そこで図では、 E_{EF} だけを示している。この図から、回転ばね特性が同じなら、上端支持柱モデルのエネルギー吸収能力のほうが片持ち柱モデルのそれに比べて格段に大きくなっていることがわかる。しかし、実際のなタワーの面内、面外などのように、方向によって支持条件とともに断面特性が異なる場合には、エネルギー吸収能力の小さい方に着目する必要があると考えられる。

5. 動的倒壊判定

著者らは不安定性をもたらす静的圧縮軸力を受ける片持ち柱モデルに側方からの動的外力が作用する場合について、動的外力によるエネルギー入力に相当する外力パワーと系のエネルギー吸収能力に相当する強度パワーを比較することで、対象構造系の動的倒壊が判定されることを報告した²⁾。本研究で対象としている上端支持柱モデルが、系の固有円振動数に等しい円振動数をもつ式 (6) の正弦波外力を受ける場合についても、以下の式 (8)

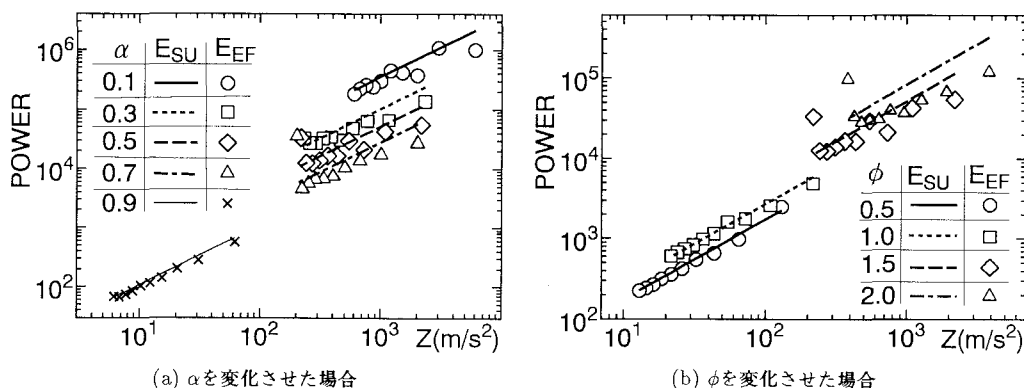


図 8 S および L と α および ϕ の関係

で与えられる外力パワー L と式 (9) で与えられる強度パワー S を比較して、系の動的倒壊判定を試みる。

$$L = \int_0^{T_d} (Z \sin \omega t)^2 dt \dots\dots\dots (8)$$

$$S = \frac{E_{SU}}{\mu \ell \theta_Y m \omega} Z \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 T_d は動的終局状態までの継続時間、 θ_Y は先に降伏する回転ばねの降伏回転変位、 μ は、定常振動を仮定した場合の降伏変位 $x_Y (= \ell \theta_Y)$ に対する定常振幅の比であり、 $\mu = 0.537$ としている²⁾。中央部のばねが先に降伏する $\phi = 0.5$ の場合には、幾何学的な関係から $\theta_Y = \theta_{Y2}/2$ として、強度パワー S を評価している。

図 8(a) は、 $\eta = 1$ 、 $\phi = 1.5$ とし、 α を変化させた場合の外力パワー L および強度パワー S と正弦波外力の加速度振幅 Z の関係を示したものであり、図 8(b) は $\eta = 1$ 、 $\alpha = 0.5$ とし、 ϕ を変化させた場合の同様の図である。縦軸はパワーを、横軸は Z である。 α が小さく、 ϕ が大きい増加型の復元力特性の場合には、正弦波外力の振幅がかなり大きい衝撃的な動的外力が作用しないと柱は倒壊にいたらない傾向がある。これに対して、強度パワー S を算定するに際しては、この場合も変位応答は定常振動になると仮定しているため、図のこの領域では、強度パワー S は外力パワー L とあまり一致していない。しかし、この図の他の領域では、強度パワー S は動的終局状態までの外力パワー L を比較的良好に近似していることがわかる。したがって、文献 (2) と同様の手法によって、上端支持柱モデルの動的倒壊がある程度の精度で判定されると言える。

6. おわりに

本研究では、変断面材を有する不静定構造物の動的強度特性を明らかにする目的で、静的圧縮軸力を受ける上端支持柱の基本的な動的強度特性を解析的、数値的に検討した。

まず、上端支持柱を質点、剛棒および 2 つの回転ばねからなる 1 自由度系にモデル化し、静的圧縮軸力の大きさおよび 2 つの回転ばね特性を表すパラメーター α 、 η および ϕ の関係を整理することによって、基本的な系の変位・復元力関係の経路およびエネルギー吸収能力が解析的に明らかにされた。実際的な上端支持柱をモデル化する際には、静的圧縮軸力および断面特性を基に算定される剛性、圧縮軸力下の全塑性曲げモーメント、降伏曲率の値から α 、 η および ϕ の値を求めればよいと考えられる。

また、不静定構造物である上端支持柱モデルは、同じばね特性を有する静定構造物の片持ち柱モデルに比較して、格段に大きなエネルギー吸収能力のあることが示された。

さらに、系の固有振動数に等しい振動数をもつ正弦波外力が作用する上端支持柱モデルにおいても、文献 (2) と同様の手順により、その動的倒壊がある程度の精度で判定されることが確認された。

最後に、本研究の一部は科学研究費（総合研究A、代表：山田善一京都大学教授）の補助を受けたことを付記し、関係方々に謝意を表する。

参考文献

- 1) 中島章典・倉西 茂・阿部英彦：静的不安定性を有する構造物の動的倒壊，土木学会論文集，第 386 号 /I-8，pp.135-144，1987,10.
- 2) 中島章典・阿部英彦・倉西 茂・白石正俊：劣化型復元力特性を有する構造物の構造物の動的倒壊判定に関する基礎的研究，構造工学論文集，Vol.36A，pp.655-662，1990,3.
- 3) Gimsing, Niels J. (伊藤 學他訳)：吊形式橋梁 — 計画と設計 —，建設図書，pp.229-257，1990,4.
- 4) 倉西 茂・中島章典：橋軸方向周期性加速度外力を受ける鋼アーチ橋の強度特性，土木学会論文集，第 374 号 /I-6，pp.119-127，1986,10.
- 5) 安田 学・山田善一・家村浩和・岡 重洋：サブストラクチャー・ハイブリッド実験による鋼製箱型橋脚の耐震性評価，土木学会第 46 回年次学術講演会講演概要集第 1 部，pp.214-215，1991,9.
- 6) 酒造敏廣：繰り返し水平力を受ける鋼変断面片持ち柱の弾塑性挙動に関する研究，土木学会論文集，第 446 号 /I-19，pp.127-136，1992,4.
- 7) 中島章典・阿部英彦・倉西 茂：複数の倒壊モードが静的不安定性を有する構造物の動的倒壊に及ぼす影響，土木学会論文集，第 416 号 /I-13，pp.13-23，1990,4.

(1992 年 9 月 21 日 受付)