

## ラーメン柱の有効座屈長算出法に関する一考察

ON THE PRACTICAL PROCEDURE OF  
EFFECTIVE BUCKLING LENGTH OF FRAMED COLUMNS

野上 邦栄\*

By Kuniei NOGAMI

This report proposes a practical calculation method for the evaluation of effective buckling length of tapered frame, in which nonelasticity is taken into consideration. The effective length and safety of structures are also evaluated by comparing the results obtained from the new proposed method (modified  $E_f$  method) with those obtained by other methods. The results indicate that by the new method, the ultimate strength of structures which are dominantly governed by axial forces and the corresponding effective length are obtained with high accuracy, in addition, this length is short compared with that in conventional methods. However, with structures subjected to small axial forces, the effective length calculated by the new method is very large. Hence some measures for correcting this problem must be incorporated into the practical design.

## 1. まえがき

わが国のラーメン構造物の設計は、構造物の限界状態（安定性）に対する照査を構造物全体に対する照査に代えて、構成する各部材における照査という形で行われる設計法であり、構造物全体の安全性の確保は個々の部材の安全を確保することにより可能であるという基本的な設計思想に基づいている。したがって、現行の設計法<sup>1),2)</sup>は本来弾塑性有限変位解析により構造物全体の耐荷力解析を行わない限り誤差の大きいラーメン構造の設計を弾性微小変位解析を用いて行うための実用設計上の便法であると考えることができる。

ところで、現行の設計法は周知のように許容応力度設計法であり、多くの解析結果を集約して柱の耐荷力を有効座屈長の関数として与えられる素材の許容応力度の形に変形して設計に用いるのが普通である。したがって、この考え方を多層ラーメンの柱の設計に用いるためには、個々の柱の有効座屈長を知らなければならない。しかし、もしラーメン全体を対象とする理論的な座屈解析を試みれば判るように、構造系全体に対して座屈耐荷力は一般にただ一つだけ定まり、個々の柱要素の有効座屈長が得られる訳ではない。言い換えれば、ラーメン構造系の全体座屈が求まるのであって部材単独の座屈（部分座屈）が得られるのではないと言うことである。そのため、多少理論的な厳密さには欠けるが、新たな仮定を持ちこむことによって個々の柱材の有効座屈長を求める設計法が実用されている<sup>1)</sup>。

しかし、ラーメン構造物（特に、横拘束のない構造）の全体座屈荷重では、ラーメン柱が非弾性領域に入っている場合もあり、その場合はり等の腹材にはほとんど軸力が伝えられないため弾性状態に留まることから、ラーメン柱とはりの見掛けの弾性係数が等しくなくなる。その結果柱端部の相対的回転拘束が大きくなり、座屈荷重が低下するばかりでなく、有効座屈長にも変化が生じることになる。このようなラーメン柱の有効座屈長は、

\* 工博 東京都立大学助手 工学部土木工学科 (〒192-03 東京都八王子市南大沢1-1)

道路橋示方書<sup>1)</sup>(以後、道示と呼ぶ)の方法により評価すると一般にかなり安全側の値になることから、構造全体系の弾性固有値解析<sup>5)</sup>により各部材の有効座屈長を求める方法も用いられている。しかし、その場合でも、軸力が小さい部材ではきわめて長い有効座屈長になり、許容軸圧縮応力度がかなり低下することが指摘されている<sup>6),7),15)</sup>。また、最近の長大橋におけるラーメン構造では、非弾性を考慮した有効接線弾性係数法が適用されるようになってきているが<sup>3),8),9),10)</sup>、この計算法に用いる荷重条件や構造全体系としての有効座屈長を算出する方法を含めて設計上の混乱も一部存在しているようである<sup>14)</sup>。

このような現況において、ラーメン構造物の耐荷力に対する安全性はラーメン構造全体の形状、剛性分布の他荷重状態にも依存することを考慮する時、本質的には構造全体として評価されるべきであると考えられる。この基本思想に立った場合、本州四国連絡橋公団の吊橋主塔設計要領・同解説<sup>3)</sup>(以後、本四規程と呼ぶ)に採用されている有効接線弾性係数法(以後、 $E_f$ 法と呼ぶ)の考え方が有効である。本報告ではこの $E_f$ 法を拡大解釈して実設計に適用され始めている、断面ごとにラーメン柱の非弾性を考慮して有効座屈長を算出する計算方法に注目し、 $E_f$ 法や他の設計に用いられている計算法との比較から有効座屈長および構造物の安全性について検証するとともに考察を加えたものである。

## 2. 修正 $E_f$ 法

### (1) 本算出法の特徴

まえがきで述べたように、ここでは新たに各断面ごとに $E_f$ を評価して有効座屈長を求める実用的な算出法(以後、修正 $E_f$ 法と呼ぶ)を考える。この方法には、次の3つの特徴を有している。

a) 構造全体系の耐荷力問題を固有値問題の形に置き換えて評価しようとする方法であり、荷重と構造形態の関係から完全系と見なしうる構造物の分岐座屈問題として扱うことになる。

柱の座屈耐荷力を支配する要因として、現在では初期曲がり、溶接による残留応力、その他素材の接線弾性係数 $E_t$ の影響が最も重要なものと考えられており、構造物、あるいは部材の耐荷力は、弾塑性有限変位解析あるいは耐荷力実験を行わない限り一般には予測し難いものである。

ここでは、柱の耐荷力がヤング率を一定として計算されるオイラー荷重より低下する理由をすべて素材の応力-ひずみ関係の増分勾配で与えられる接線弾性係数 $E_t$ の低下に起因するものとした接線係数理論<sup>8)</sup>に対して、その $E_t$ を素材に固有なものではなく、部材断面を包括的に見たパラメータであって初期曲がりや残留応力にも依存するものであると考え直し、この見掛けの接線弾性係数 $E_f$ を考慮した固有値問題として耐荷力を評価している。

b) 構造物の耐荷力に影響する初期曲がりおよび残留応力などの重要な非線形性を考慮した見掛けの接線弾性係数 $E_f$ は、柱の基準耐荷力曲線を用いて評価する。したがって、この接線弾性係数 $E_f$ は、有効座屈長の関数である限界応力度 $\sigma_{cr}$ に対して繰り返し計算を行うことから、必然的に有効座屈長の関数として決定されることになる。

見掛けの接線弾性係数 $E_f$ は、柱の初期曲がりや残留応力の影響を受け、さらに座屈時の応力状態に依存するため、一般には予め予測し難いものである。ここでは、設計上の観点から、部材としての初期曲がりや残留応力が考慮されている柱の基準耐荷力曲線を準用することにより、この曲線に見合ったラーメン柱の見掛けの接線弾性係数を近似的に決定する。したがって、ラーメン柱の座屈荷重は、この曲線に見合った座屈荷重が得られるように見掛けの弾性係数を変化させながら繰り返し計算を行うことにより求めることができ、同時にこの座屈荷重に対応する有効座屈長を求めることが可能になる。もちろん、対象とするラーメン柱の断面形状、製作・架設法の精度、初期曲がりおよび残留応力分布に関する実績データが蓄積され、対象構造独自のラーメン柱の耐荷力曲線を定めることができるようになれば、より精度の良い評価が可能になることは言うまでもない。

c) 見掛けの接線弾性係数、および有効座屈長は、各断面ごとに評価・設定する。

構造全体系の固有値解析によって全体座屈に対する各断面の最小座屈荷重を求め、各断面ごとの有効座屈長を

求める。各断面ごとに見掛けの接線弾性係数を評価することは、柱の基準耐荷力曲線が部材としての耐荷力を表していることから整合性がとれており、精度の高い変断面構造全体系としての耐荷力を算出できることになる。なお、a)b)の特徴は $E_f$ 法にも共通の特徴である。

## (2) 計算手順

いま、弾性計算による有効座屈長 $\ell_e$ からなる細長比 $\ell_e/r$ のラーメン柱のオイラー座屈応力度 $\sigma_e$ は

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(\ell_e/r)^2} \dots\dots\dots (1)$$

と与えられる。また、同じ $\ell_e/r$ のラーメン柱の限界応力度 $\sigma_{cr}$ は、式(1)の $E$ に見掛けの接線弾性係数 $E_f$ を用いた

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_f}{(\ell_e/r)^2} \dots\dots\dots (2)$$

と与えられる。この見掛けの接線弾性係数 $E_f$ は、前述したように図-1の柱の基準耐荷力曲線から得られる限界応力度 $\sigma_{cr}$ との間に

$$\frac{E_f}{E} \equiv \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e} \dots\dots\dots (3)$$

の関係が成り立つならば決定できることになる。ところで、上式は、

$$\frac{E_f}{E} \equiv \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_e} \dots\dots\dots (4)$$

と降伏応力度 $\sigma_y$ を用いて変形できる。他方、座屈パラメータとして

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_y}{E}} \frac{\ell_e}{r} \dots\dots\dots (5)$$

を用いるならば、式(1)により

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_e} = \lambda^2 \dots\dots\dots (6)$$

と表すことができるので、 $\lambda$ と

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_y} \equiv F(\lambda) \dots\dots\dots (7)$$

の関係が、 $\lambda$ の関数として与えられる柱の基準耐荷力曲線 $F(\lambda)$ により知ることができれば、 $\sigma_e/\sigma_y$ から $\lambda$ を求め、それによって $\bar{\sigma}$ が知られるとともに、式(4)により $E_f$ が計算される。したがって、ラーメン柱の限界応力度は、得られた $E_f$ を式(2)に代入することにより与えられることになる。

具体的な計算手順は次のようになる。

1) ラーメン柱を初め完全弾性体( $E_{fi} = E_i$ )として、次式による固有値解析から最小固有値 $\kappa$ を求め、各断面の座屈荷重 $N_{cri}$ を求める。

$$[K_E(E_{fi}) + \kappa K_G(N_i)] = 0 \dots\dots\dots (8)$$

$$N_{cri} = \kappa N_i \dots\dots\dots (9)$$

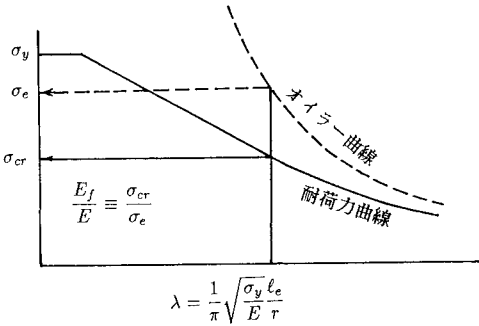


図-1  $E_f$  と  $\sigma_{cr}$  の関係

ここに、 $K_E$ は微小変位理論における全体剛性行列、 $K_G$ は全体幾何剛性行列を意味する。

2) 各断面の断面積 $A_i$ を用い、座屈時応力 $\sigma_{ei}$ を次式により計算する。

$$\sigma_{ei} = \frac{N_{cri}}{A_i} \dots\dots\dots (10)$$

3) 各断面の曲げ剛性 $E_{fi}I_i$ から、有効座屈長 $\ell_{ei}$ 、換算細長比 $\lambda_i$ を計算し、対応する限界応力 $\sigma_{cri}$ を柱の基準耐荷力曲線より求める。

$$\ell_{ei} = \pi \sqrt{\frac{E_{fi}I_i}{N_{cri}}} \dots\dots\dots (11)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_{yi}}{E_i}} \frac{\ell_{ei}}{r_i} \dots\dots\dots (12)$$

4) 得られる $\sigma_{cri}$ が2)で求められた $\sigma_{ei}$ と一致しなければ、 $E_{fi}$ と $\sigma_{cri}$ を修正して繰り返す。この場合修正前の $E_{fi}$ を $E_{fi}^{(1)}$ とすれば、修正後の $E_{fi}$ は

$$\frac{E_{fi}}{E} = \frac{\sigma_{cri}}{\sigma_{ei}} \cdot \frac{E_{fi}^{(1)}}{E} \dots\dots\dots (13)$$

と与えられる。

5)  $\sigma_{ei}$ と $\sigma_{cri}$ が一致した時、対応する $N_{cri}$ が座屈荷重であり、 $\sigma_{ei}$ がその時の応力である。各断面の細長比は座屈応力が $\sigma_{ei}$ になるような細長比である。

$$\frac{\ell_{ei}}{r_i} = \pi \sqrt{\frac{E_{fi}}{\sigma_{ei}}} \dots\dots\dots (14)$$

### 3. 実設計に採用されている計算法

現在、実設計において適用されている有効座屈長の算出法を分類すると、表-1のようにまとめることができる<sup>15),16)</sup>。弾性固有値解法は、わが国を始めAISC, AASHTOなどで長い実績を持つ方法であり、対象構造モデルの面から、さらに全体構造解析法と部分構造解析法に大別できる。全体構造解析法は、構造全体系の特性方程式として与えられる線形式を誘導し、境界条件および荷重条件のもとで自明でない解に対する最小固有値を求め、有効座屈長を求める方法である。最近、わが国の長大橋梁に広く用いられている。

一方、部分構造解析法は表-1の基本仮定に基づく近似計算法であり、着目部材ごとに有効座屈長を求め、その最大値を全体系の有効座屈長とする解法である。この解法はさらに解法-1, 解法-2, 解法-3の3つに区別できる。解法-1は、1層の構造部分系に対する特性方程式をそのまま解く方法であり、非線形式のため繰り返し計算を必要とする。さらに、繰り返し計算の煩わしさを無くし、しかも解法-1の値の精度を確保できるような近似式として与えたのが解法-2である。解法-3は、さらにノモグラフから読み取れるように配慮した方法であり、一般設計ではこの解法が用いられている。なお、道示では代表的構造物に対する具体的な有効座屈長を表にまとめている。

次に、ラーメン柱の非弾性領域を考慮した非弾性固有値解法には、Yuraによって初めて提案された部分構造解析法（以後、Yuraの方法<sup>12),13)</sup>と呼ぶ）と本四規程の全体構造解析法（ $E_f$ 法）がある。

Yuraの方法は、初期曲がりや残留応力を考慮したラーメン柱の耐荷力の実用的な計算方法として初めて提案された方法である。この方法では、まず着目部材 $\ell$ の有効座屈長係数 $\beta$ はラーメン柱の曲げ剛性 $E_{fc}I_c$ に対するはりの曲げ剛性 $E_bI_b$ の比で与えられる

$$G = \frac{\Sigma E_{fc}I_c/\ell_c}{\Sigma E_bI_b/\ell_b} \dots\dots\dots (15)$$

表-1 有効座屈長の算出法の分類

|                 |           | 解 析 法                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 基 本 仮 定                                                                                                                                                                                       |
|-----------------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 弾 性 固 有 値       | 全 体 構 造 系 | $\det   K_E(E) + \kappa K_G(N)   = 0$<br>$l_e = \pi \sqrt{\frac{EI}{\kappa N}}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | (1)挙動は弾性                                                                                                                                                                                      |
|                 | 部 分 構 造 系 | 解法-1<br>横拘束がない場合：<br>$\frac{G_1 G_2 \chi^2 - 36}{6(G_1 + G_2)} = \chi \cot \chi$<br>横拘束がある場合：<br>$\frac{G_1 G_2}{4} \chi^2 - \frac{G_1 + G_2}{2} (1 - \chi \cot \chi) = 1 - \frac{\tan(\chi/2)}{\chi/2}$<br>$G = \frac{\sum (1/\ell)_{\text{column}}}{\sum (1/\ell)_{\text{beam}}}, \quad \chi = \frac{\pi}{\beta}$<br>$l_e = \beta \ell$<br>解法-2<br>横拘束がない場合：<br>$\beta = \sqrt{\frac{1.6 + 2.4(\xi_1 + \xi_2) + 1.1\xi_1\xi_2}{\xi_1 + \xi_2 + 5.5\xi_1\xi_2}}$<br>横拘束がある場合：<br>$\beta = \frac{3.0 - 1.6(\xi_1 + \xi_2) + 0.84\xi_1\xi_2}{3.0 - (\xi_1 + \xi_2) + 0.28\xi_1\xi_2}$<br>$\xi_1 = \frac{1}{1 + G_1}, \quad \xi_2 = \frac{1}{1 + G_2}$<br>$l_e = \beta \ell$<br>解法-3<br>ノモグラフ ( $G_1, G_2$ )、あるいは表から読み取る<br>$l_e = \beta \ell$ | (1)挙動は弾性<br>(2)全ての結合部は剛結<br>(3)全ての部材は一樣断面<br>(4)同一階の全ての柱は同時に座屈<br>(5)はりの抵抗モーメントは、その上下の柱の剛性に応じて分配<br>(6)横拘束のある場合、はりの両端の回転角は大きさが同じで方向が逆符号<br>(7)横拘束のない場合、はりの両端の回転角は大きさおよび方向とも同じ<br>(8)作用荷重は対称荷重 |
|                 | 全 体 構 造 系 | $\det   K_E(E_r) + \kappa K_G(N)   = 0$<br>$l_e = \pi \sqrt{\frac{EI}{\kappa N}}$<br>$\frac{E_r}{E_{r1}} = \frac{\sigma_{cr}}{\kappa N/A}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | (1)全ての柱の挙動は非弾性<br>(柱の基準耐荷力曲線を採用)<br>(2)全ての腹材の挙動は弾性<br>(3)全ての部材は一樣断面<br>(4)繰り返し計算                                                                                                              |
| 非 線 形 弾 性 固 有 値 | 部 分 構 造 系 | ノモグラフ<br>$l_e = \beta \ell$<br>$\frac{E_t}{E} = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_e}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | (1)全ての柱の挙動は非弾性<br>(柱の基準耐荷力曲線を採用)<br>(2)全ての腹材の挙動は弾性<br>(3)全ての結合部は剛結<br>(4)腹材間の柱は一樣断面<br>(5)繰り返し計算                                                                                              |

$K_E$  : 微小剛性行列,  $K_G$  : 幾何剛性行列,  $\kappa$  : 固有値,  $N$  : 断面圧縮力,  
 $EI$  : 曲げ剛性,  $G_1, G_2$  : 柱の上、下端,  $\beta$  : 有効座屈長係数,  $\ell$  : 部材長,  
 $E_r$  : 有効接線弾性係数,  $E_{r1}$  : 前回の有効接線弾性係数,  $A$  : 柱の断面積,  $E_t$  : 接線弾性係数,  
 $\sigma_{cr}$  : 柱の耐荷応力,  $\sigma_e$  : 柱の座屈応力

を用いてノモグラフ<sup>4)</sup>から読みとり、得られる有効座屈長 $l_e = \beta \ell$ を用いて AISC<sup>4)</sup>の柱の基準耐荷力曲線から許容軸圧縮応力度 $\sigma_{ca}$ を求める。さらに、

$$G = \frac{\sigma_{ca}}{\sigma_e} \dots \dots \dots (16)$$

により $G$ の修正値を計算し、この値を用いて再びノモグラフから $\beta$ を読みとり、 $\beta = 1.0$ に収束するまで繰り返し計算を行い、許容軸圧縮応力度を算出する手順をとっている。

一方、 $E_f$  法は、2. の考え方を基にした算出法として唯一実設計に導入されている方法である。本四規程では、対象とするラーメン構造物が極端な変断面ではなく、軸圧縮力も一様分布状態に近いことから、全てのラーメン柱の見掛けの接線弾性係数  $E_f$  は同じであり、かつ軸方向に変化しないとするなどの仮定が成り立つものとして等断面ラーメン柱から成る構造全体系の固有値解析を行い、構造全体を代表する唯一の有効座屈長を設定している。このように、各部材の見掛けの接線弾性係数  $E_f$  を一定とする取扱は、柱の基準耐力曲線がそのまま構造全体系の耐力力に対する初期不整合および残留応力の影響と等価とみなしていることになる。この計算方法は、上述した等断面、一定の

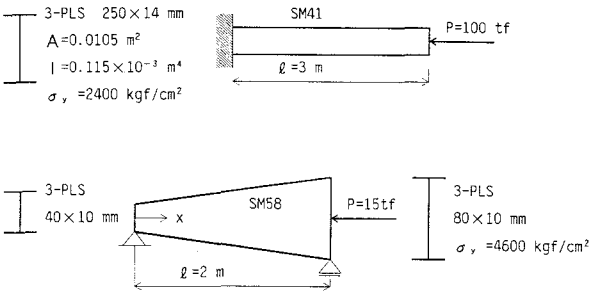


図-2 柱モデル

$E_f$  の仮定以外、ほぼ (2) の計算手順と同様に行われるが、実際には 1) 段階において、作用荷重に対する微小変位理論による線形解析により軸力  $N$  を計算し、式 (8) の固有値解析を行い、式 (9) により座屈荷重  $N_{cr}$  を求めている。また、式 (7) の柱の基準耐力曲線として道示の曲線を用いている。

#### 4. 数値計算例

ここでは、柱、ラーメン構造物を計算対象にして 2. および 3. で述べた算出法の違い、荷重条件の違いが有効座屈長に与える影響、および得られる有効座屈長を用いて評価される許容軸圧縮応力度への影響などについて数値計算を行い、考察を行った。

##### (1) 柱

いま、簡単な単一部材（柱）<sup>5)</sup>を具体的数値計算例として採り上げ、2. で述べた修正  $E_f$  法と弾性固有値解析（全体構造解析方法）により求まる有効座屈長、および限界応力度について検討した。

表-2 等断面柱の有効座屈長と限界応力度

まず、図-2に示すような等断面片持ち柱の場合、その有効座屈長は周知のように理論上、 $\ell_e = 2\ell = 6m$  となるため、座屈パラメータ  $\lambda$  は式 (12) により  $\lambda = 0.62$  となる。したがって、道示の柱の基準耐力曲線から限界応力度  $\sigma_{cr}$  を求めると、 $\sigma_{cr} = 1856 \text{ kgf/cm}^2$  (SM41 の場合) となり、安全率  $\nu = 1.7$  を考慮するならば、許容軸圧縮応力度が  $\sigma_{ca} = 1092 \text{ kgf/cm}^2$  と与えられる。これに対して、表-2に示すように 10 分割要素（このような簡単な部材では要素分割数の影響は少ない）を用いて計算した結果、修正  $E_f$  法と弾性固有値解析の

|                     | 理論解              | 弾性固有値解析 | 修正 $E_f$ 法 |        |
|---------------------|------------------|---------|------------|--------|
|                     |                  |         | 収束回数 1     | 収束回数 2 |
| 軸圧縮力 $N_i$          | —                | 100.0   | 100.0      | 100.0  |
| 固有値 $\kappa$        | —                | 6.621   | 6.621      | 1.943  |
| 座屈荷重 $\kappa N_i$   | —                | 662.1   | 662.1      | 194.3  |
| 有効座屈長 $\ell_e$      | 6.0(2.0 $\ell$ ) | 6.0     | 6.0        | 6.0    |
| 細長比 $\ell_e/r$      | 57.3             | 57.3    | 57.3       | 57.3   |
| 換算細長比 $\lambda$     | 0.62             | 0.62    | 0.62       | 0.62   |
| 限界応力度 $\sigma_{cr}$ | 1855.8           | 1855.8  | 1855.8     | 1855.8 |
| 座屈応力度 $\sigma_s$    | —                | —       | 6323.7     | 1855.8 |
| 弾性係数 $E_f/E$        | —                | —       | 0.293      | 0.293  |

2 解法とも有効座屈長および限界応力度は理論値に完全に一致している。また、修正  $E_f$  法における収束計算回数は 2 回であり、その時の見掛けの接線弾性係数の値は  $E_f/E = 0.293$  となった。

次に、単純支持された変断面柱について、弾性固有値解析と修正  $E_f$  法による結果を比較したのが、図-3 である。両解法は、階段状に 10 要素分割した解析モデルを用いて計算した。なお、最小断面と最大断面の平均断面 ( $I = 0.17 \times 10^{-5} \text{ m}^4$ ,  $A = 0.0018 \text{ m}^2$ ) を持つ等断面部材としての近似理論解の曲線を図中に併せて示してい

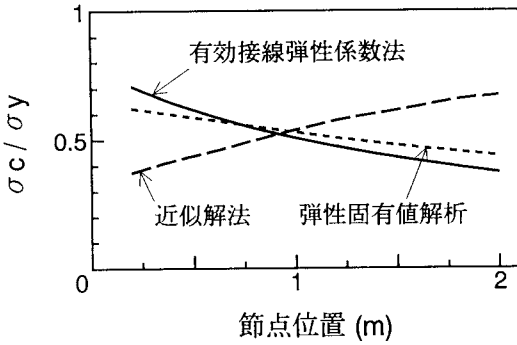


図-3 変断面柱の有効座屈長と限界応力度

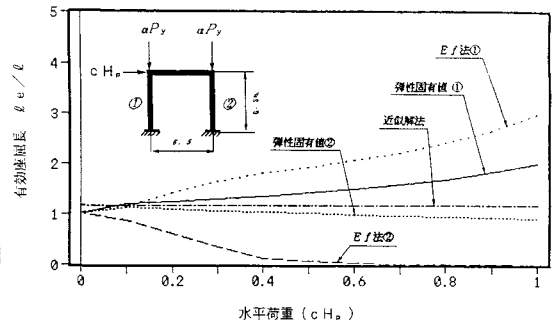


図-4 水平荷重の有効座屈長への影響

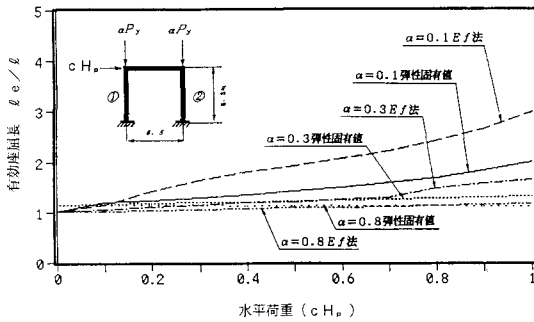


図-5 鉛直荷重の有効座屈長への影響

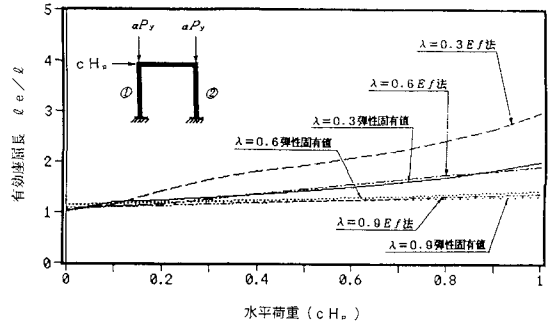


図-6 換算細長比の有効座屈長への影響

る。図中の縦軸は、降伏応力度に対する限界応力度の無次元量、横軸は節点位置を表している。また、このような変断面部材に対する修正  $E_f$  法の収束回数は 6 回であった。

変断面部材の場合、各要素に作用する軸力は全て一様であっても曲げ剛性が異なるため、断面が小さく曲げ剛性が小さい断面では、有効座屈長が短くなり、その結果得られる限界応力度が大きくなる事実を弾性固有値解析は示している。同様に、修正  $E_f$  法の場合、見掛けの接線弾性係数の値の減少率も大きくなるため弾性固有値解析の場合の事実がより顕著に現れる。逆に、両解法は大断面の有効座屈長がかなり長くなるため、近似理論解の値に比べて限界応力度を過度に低く評価していることがわかる。このように、修正  $E_f$  法および弾性固有値解析により得られる有効座屈長は、断面が大きく、軸圧縮応力度が小さい部材では長くなり、許容軸圧縮応力度が低下するという不合理性が存在することがわかる。

## (2) 1 層ラーメン構造

次に、鉛直荷重と水平荷重の組み合わせ荷重を受ける 1 層ラーメン構造の有効座屈長について検討した。ここに、構成部材は等断面である。組み合わせ荷重に対する有効座屈長は、微小変位解析を行い、得られた各断面の軸力  $N_i$  を用いて以後 2.(2) の計算手順にしたがって求めている。

まず、図-4 では、柱の換算細長比  $\lambda=0.3$  を有する構造に対称鉛直荷重  $0.1 P_y (\alpha=0.1)$  と  $c H_p (H_p=4 M_p / \ell, M_p$  は全塑性モーメント) の水平荷重が作用した場合の水平荷重の変化  $c$  にともなう有効座屈長を示したものである。水平荷重が増加するに従い、1 部材では微小軸力状態になるため、 $E_f$  法、弾性固有値解析による有効座屈長係数は大きく変化し、極めて長めの有効座屈長を示す。一方、2 部材は大きな軸力状態になるため、有効座屈長は短かめの値になる。特に、 $E_f$  法は  $E_f / E$  の影響によりその傾向が著しい。

図-5は、1部材に着目して、鉛直荷重 $\alpha$ の違いによる有効座屈長の変化を示したものである。 $\alpha$ が大きくなり、つまり大きな軸力が作用するにしたがって、両解析法による有効座屈長の値のばらつきは少なくなり、水平荷重の影響も小さいことがわかる。したがって、 $\lambda = 0.3$  の場合軸力に支配される構造系では、弾性固有値解析で充分な解を得ることができる。さらに図-6は、1部材に着目して換算細長比 $\lambda$ の違いによる影響を示したものである。

微小軸力 $0.1P_y$ であっても、 $\lambda$ が大きくなると弾性固有値が大きくなるため、算出法の違いによる有効座屈長のばらつきは小さく、水平荷重の影響も少ないことがわかる。しかし、 $\lambda$  が小さくなると $E_f$  の影響が現れて相違が生じている。以上のことから、荷重の組み合わせ、それらの大きさの違いにより有効座屈長が大きく変化することが予想される。

### (3) 3層ラーメン構造

#### a) 算出法の違いによる有効座屈長への影響

実橋レベルのラーメン構造物として吊橋の塔などに用いられる図-7に示すような3層ラーメン構造を取り上げ、ノモグラフを用いた従来の算出法、 $E_f$  法、および修正 $E_f$  法による計算方法の違いによる有効座屈長への影響について比較・検討した。なお、塔柱の各層は3要素に分割し、全体として21要素数で計算している。

まず、表-3は、着目する柱部材の上下端に連結されているはり回転ばねとして働くものと見なし、その反力モーメントは連結される柱の曲げ剛度の比に分配されるものと仮定して求められる両端の $G_T$  および $G_B$  からノモグラフにより有効座屈長を算出した結果である。有効座屈長の最大値は、第2層の $\ell_e = 59.6m$ となる。

一方、 $E_f$  法において塔頂部と塔基部の平均断面( $I_{mean} = 1.567m^4$ ,  $A_{mean} = 0.611m^2$ )を用い、設計荷重としての鉛直荷重 $V_e = 9000.8t$  が頂部に作用する場合の構造全体系の有効座屈長の収束状況を示したのが表-4である。

表中の第1回目の値である $\ell_e = 54.48m$  は、弾性固有値解析の結果に対応する値である。収束した時の有効座屈長である $\ell_e = 41.95m$  は、ノモグラフや弾性固有値解析の有効座屈長に比して短めの値になっていることがわかる。また、見掛けの接線弾性係数は $E_f/E = 0.11$  と大きく低下している。

次に、修正 $E_f$  法により有効座屈長を計算した結果をまとめたのが表-5である。有効座屈長は、塔基部ほど長くなり、同様に見掛けの接線弾性係数も塔基部ほど大きい値を示している。また、固有値 $\kappa = 1.99$  は、 $E_f$  法の $\kappa = 2.25$  に比較して12%ほど低下している。

以上の結果をまとめると表-6のようになる。なお、 $E_f$  法により得られる有効座屈長は、構造全体系を代表する有効座屈長であり、いま各層の曲げ剛性に比例して

$$\ell_e^* = \ell_e \sqrt{\frac{I_i}{I_{mean}}} \dots\dots\dots (17)$$

により補正した各層ごとの有効座屈長を表中に合せて示している。 $E_f$  法による有効座屈長に対して補正した有効座屈長は、ノモグラフを用いた計算法によるその値に比べて第2、第3層でより短く、逆に第1層では長く

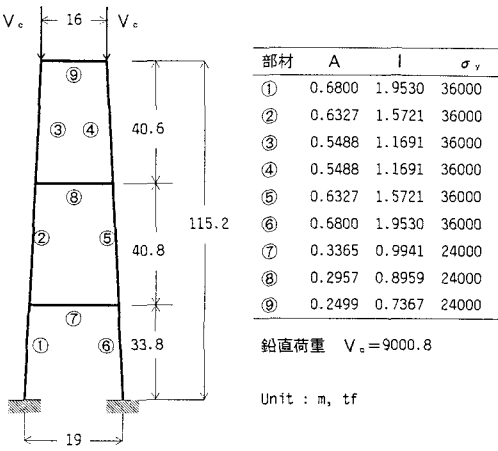


図-7 3層ラーメン構造の解析モデル

表-3 ノモグラフによる有効座屈長

| 層 | $G_T$ | $G_B$ | $\beta$ | $\ell_e$ | $G = \frac{\sum (I/\ell)_{column}}{\sum (I/\ell)_{beam}}$ |
|---|-------|-------|---------|----------|-----------------------------------------------------------|
| 3 | 0.626 | 1.155 | 1.28    | 52.0     |                                                           |
| 2 | 1.155 | 1.949 | 1.46    | 59.6     |                                                           |
| 1 | 1.949 | 0.000 | 1.27    | 42.9     |                                                           |

Unit = m

表-4  $E_f$  法による有効座屈長

| 断面定数                                 | 収束回数 | N      | $\sigma_c$ | $\kappa$ | $\kappa N$ | $\ell_e$ | $\lambda$ | $\sigma_{cr}$ | $\sigma_a$ | $E_r/E$ |
|--------------------------------------|------|--------|------------|----------|------------|----------|-----------|---------------|------------|---------|
| A=0.6113<br>I=1.5670<br>$\ell=115.2$ | ①    | 9000.8 | 14724.0    | 12.16    | 109442.3   | 54.48    | 0.45      | 31126.0       | 179032.1   | 0.174   |
|                                      | ②    | 9000.8 | 14724.0    | 3.40     | 30626.3    | 42.94    | 0.35      | 32989.3       | 50100.3    | 0.114   |
|                                      | ③    | 9000.8 | 14724.0    | 2.34     | 21051.2    | 42.03    | 0.35      | 33136.6       | 34436.8    | 0.110   |
|                                      | ④    | 9000.8 | 14724.0    | 2.26     | 20320.7    | 41.96    | 0.35      | 33147.4       | 33241.7    | 0.110   |
|                                      | ⑤    | 9000.8 | 14724.0    | 2.25     | 20267.6    | 41.95    | 0.35      | 33148.1       | 33155.0    | 0.110   |
|                                      | ⑥    | 9000.8 | 14724.0    | 2.25     | 20263.8    | 41.95    | 0.35      | 33148.2       | 33148.7    | 0.110   |

Unit=m, t

表-5 修正 $E_f$  法による有効座屈長

| 層 | 断面定数                                | 収束回数 | N      | $\sigma_c$ | $\kappa$ | $\kappa N$ | $\ell_e$ | $\lambda$ | $\sigma_{cr}$ | $\sigma_a$ | $E_r/E$ |
|---|-------------------------------------|------|--------|------------|----------|------------|----------|-----------|---------------|------------|---------|
| 3 | A=0.5488<br>I=1.1691<br>$\ell=40.6$ | ①    | 9000.8 | 16400.9    | 10.97    | 98732.6    | 49.53    | 0.45      | 31147.4       | 179906.5   | 0.173   |
|   |                                     | ②    | 9000.8 | 16400.9    | 2.70     | 24282.9    | 41.56    | 0.38      | 32560.3       | 44247.3    | 0.127   |
|   |                                     | ③    | 9000.8 | 16400.9    | 2.02     | 18216.9    | 41.17    | 0.37      | 32631.0       | 33194.1    | 0.125   |
|   |                                     | ④    | 9000.8 | 16400.9    | 1.99     | 17927.2    | 41.14    | 0.37      | 32634.9       | 32666.3    | 0.125   |
|   |                                     | ⑤    | 9000.8 | 16400.9    | 1.99     | 17911.5    | 41.13    | 0.37      | 32637.4       | 32637.6    | 0.125   |
|   |                                     | ⑥    | 9000.8 | 16400.9    | 1.99     | 17911.5    | 41.13    | 0.37      | 32637.4       | 32637.6    | 0.125   |
| 2 | A=0.6327<br>I=1.5721<br>$\ell=40.8$ | ①    | 9000.8 | 14226.0    | 10.97    | 98732.6    | 57.45    | 0.48      | 30500.4       | 156049.8   | 0.195   |
|   |                                     | ②    | 9000.8 | 14226.0    | 2.70     | 24282.9    | 51.21    | 0.43      | 31523.2       | 38379.8    | 0.161   |
|   |                                     | ③    | 9000.8 | 14226.0    | 2.02     | 18216.9    | 53.59    | 0.45      | 31133.9       | 28792.4    | 0.174   |
|   |                                     | ④    | 9000.8 | 14226.0    | 1.99     | 17927.2    | 56.17    | 0.47      | 30709.9       | 28334.5    | 0.188   |
|   |                                     | ⑤    | 9000.8 | 14226.0    | 1.99     | 17911.5    | 56.17    | 0.47      | 30709.9       | 28334.5    | 0.188   |
|   |                                     | ⑥    | 9000.8 | 14226.0    | 1.99     | 17911.5    | 70.29    | 0.58      | 28392.9       | 28309.6    | 0.272   |
| 1 | A=0.6800<br>I=1.9530<br>$\ell=33.8$ | ①    | 9000.7 | 13236.3    | 10.97    | 98732.6    | 64.03    | 0.50      | 30154.5       | 145195.0   | 0.208   |
|   |                                     | ②    | 9000.7 | 13236.3    | 2.70     | 24282.9    | 58.83    | 0.46      | 30946.5       | 35710.1    | 0.180   |
|   |                                     | ③    | 9000.7 | 13236.3    | 2.02     | 18216.9    | 63.24    | 0.49      | 30275.1       | 26789.6    | 0.203   |
|   |                                     | ④    | 9000.7 | 13236.3    | 1.99     | 17927.2    | 67.77    | 0.53      | 29584.1       | 26363.6    | 0.228   |
|   |                                     | ⑤    | 9000.7 | 13236.3    | 1.99     | 17911.5    | 67.77    | 0.53      | 29584.1       | 26363.6    | 0.228   |
|   |                                     | ⑥    | 9000.7 | 13236.3    | 1.99     | 17911.5    | 88.76    | 0.69      | 26381.8       | 26340.4    | 0.349   |

Unit=m, t

なっている。さらに、修正 $E_f$  法による有効座屈長は、塔基部要素は一端固定他端自由の $\ell_e=2.0\ell$  よりも大きく不合理性が生じている。なお、表中の( )の値は、各層間の部材長 $\ell$  に対する有効座屈長の比率を表している。

弾性、および非弾性固有値解析の全体構造解析法における上述の不合理性は、構造物の内部に座屈に対して弱い部材が存在すると、その部材における作用応力度に支配されるため、強い部材、つまり断面剛性が大きく作用応力度が小さい部材の有効座屈長は過大に評価されてしまうことに起因している。したがって、本来両解法による有効座屈長が精度よく求められるのは、各部材の座屈強度がほぼ等しくなる断面を有する構造物の場合になる<sup>15)</sup>。

#### b) 許容軸圧縮応力度の評価

表-7は、得られた各層の有効座屈長を基に道示により許容軸圧縮応力度 $\sigma_{ca}$  を求めた結果を示している。また、表中には各計算法の収束時の限界応力度 $\sigma_{cr}$ を安全率1.7で割って求めた値を( )に示している。非弾性・全体構造解析法を用いることにより、第2および第3層の許容軸圧縮応力度は、ノモグラフによる従来の計算法による値より大きい値を示しており、断面設計においてより経済的な改善を可能にしている。しかし、第1層では補正した $E_f$  法、および修正 $E_f$  法の値が、ノモグラフによる従来の計算法に比べ低めの値を示している。これは、表-6から明らかのように $\ell_e$ が46.9m, 88.8mとノモグラフによる値より長くなったことに起因している。しかし、このような厳しい、低めの許容軸圧縮応力度は、直感的にも実際上の耐荷力を評価しているとは言えないことは明らかなである。

また、修正 $E_f$  法において、有効座屈長を求める時同時に得られる限界応力度 $\sigma_{cr}$ を安全率で割った値は、許容軸圧縮応力度より約2%高めの値ではあるがほぼ柱としての耐荷力を評価していることが明らかである。通

表-6 算出法の違いによる有効座屈長

| 層 | 弾性・部分構造           | 弾性・全体構造           | 非弾性・全体構造            |                          |                        |
|---|-------------------|-------------------|---------------------|--------------------------|------------------------|
|   | ノモグラフによる $\ell_e$ | 固有値解析による $\ell_e$ | $E_f$ 法による $\ell_e$ | $E_f$ 法による $\ell_e$ の補正值 | 修正 $E_f$ 法による $\ell_e$ |
| 3 | 52.0<br>(1.28)    | 49.5<br>(1.22)    | 42.0<br>(1.03)      | 36.3<br>(0.89)           | 41.2<br>(1.01)         |
| 2 | 59.6<br>(1.45)    | 57.4<br>(1.41)    | 42.0<br>(1.03)      | 42.1<br>(1.03)           | 70.3<br>(1.72)         |
| 1 | 42.9<br>(1.27)    | 64.0<br>(1.89)    | 42.0<br>(1.24)      | 46.9<br>(1.39)           | 88.8<br>(2.63)         |

( ) =  $\ell_e / \ell$ , Unit = m

表-7 許容軸圧縮応力の比較

| 層 | 弾性・部分構造 | 非弾性・全体構造         |                  |                  |
|---|---------|------------------|------------------|------------------|
|   | ノモグラフ   | $E_f$ 法          | 補正 $E_f$ 法       | 修正 $E_f$ 法       |
| 3 | 17758   | 18785<br>(19499) | 19371<br>(19499) | 18867<br>(19198) |
| 2 | 17427   | 19103<br>(19499) | 19093<br>(19499) | 16409<br>(16702) |
| 1 | 19304   | 19383<br>(19499) | 18950<br>(19499) | 15242<br>(15519) |

( ) =  $\sigma_{cr} / 1.7$ , Unit = t/m<sup>2</sup>

常、ラーメン柱断面の安全性の照査を行うために必要な許容軸圧縮応力度 $\sigma_{ca}$ は、

a) 何らかの方法（例えば、設計基準に規定された代表値、ノモグラフ、弾性固有値解析、あるいは $E_f$ 法等）により有効座屈長を計算する。

b) 得られた有効座屈長を用いて設計基準から別途許容軸圧縮応力度を算出する。

方法により決定される。しかし、非弾性・全体構造解析法( $E_f$ 法、修正 $E_f$ 法)の場合、4.および上記の数値計算例から明らかのようにa)の段階において、その収束した状態では各断面における有効座屈長が求まると同時に耐荷力（安全率を考慮すれば許容軸圧縮応力度）が計算されているのであり、b)の段階で新たに許容軸圧縮応力度を求め直す必要はないことになる。

もちろん、上記のように考察ができるのは、見掛けの接線弾性係数を評価するのに設計基準に規定されている柱の基準耐荷力曲線を適用した場合であり、曲げの影響が少なく、軸力に支配される完全系としての構造物に対して、a)b)の設計手順にしたがって許容軸圧縮応力度を求めた場合2度手間をかけていることになる。

一方、対象構造物の理想的な柱の耐荷力曲線が与えられ、それを用いて見掛けの接線弾性係数を評価することができるならばより精度の高い耐荷力が得られることになるが、上記a)b)の設計手順にしたがって許容軸圧縮応力度を求める場合、a)の有効座屈長を算出する時に理想的耐荷力曲線を用い、b)の許容軸圧縮応力度を求める時に設計基準に規定された柱の基準耐荷力曲線を用いる取扱いも起こり得る。この場合、構造および部材の非線形性を2重に考慮することになり、上述の2度手間の問題を含めて設計技術者に混乱と誤解を与える可能性がある。

## 5. まとめ

許容応力度設計法において重要となる有効座屈長を求める修正 $E_f$ 法について、その基本的な考え方、および計算手順を述べるとともに、具体的な数値計算例として柱、ラーメン構造を取り上げて、得られる有効座屈長を現在採用されている各種計算法との比較により検証し、問題点を明らかにした。

修正 $E_f$ 法は、曲げの影響が少なく、軸力に支配される構造物に対する終局強度、およびそれに対応する有効座屈長を精度良く算出できるとともに、ノモグラフなどによる従来の算出法に比べてより短い有効座屈長を算出できるため、設計上有利となることを明らかにした。しかし、変断面における大断面部材や微小軸力を受ける構造および部材では、弾性固有値解析法、 $E_f$ 法と同様に極めて長くなることから、実設計では何らかの対策が必要になる<sup>18),19)</sup>。

ところで、本来有効座屈長は、ラーメン柱に対して軸圧縮力のみを作用させて求めることが自然であるが、実際の設計では、組み合わせ荷重状態に対して、弾性固有値解析、あるいは $E_f$ 法の全体構造解析法により有効座屈長の計算を実施しているようである。しかし、横荷重を含む組み合わせ荷重を受ける構造は、本来完全系としての分岐座屈問題ではなくなるはずであり、したがって、このような荷重状態の場合、構造系に対して得られる

有効座屈長の物理的意味を明確にしておく必要がある。

また、見掛けの接線弾性係数は、本来軸応力の他に断面力の加わり方に依存することから、軸応力が支配的な構造では良い耐荷力の評価をしているものの<sup>17)</sup>、初めから外力によって大きな曲げ変形に支配されるラーメン柱から成る構造物に対して、この修正 $E_f$ 法を適用して精度の高い耐荷力が得られるかどうかは疑問の余地が残されているので今後の検討課題としたい。現在、このような問題点などを踏まえて、有効座屈長の概念を用いない新しい設計法<sup>20),21),22)</sup>が検討されており今後の成果が期待される。

#### 参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説（Ⅰ共通編2鋼橋編），1990.2
- 2) 土木学会：国鉄建造物設計標準解説（鋼鉄道橋），1983.4
- 3) 本州四国連絡橋公団：吊橋主塔設計要領・同解説，1989.4
- 4) AISC：Specifications for the design, Fabrication, and Erection of Structural Steel for Buildings, 1978.11
- 5) 西野文雄・三木千寿・鈴木篤：道路橋示方書 2鋼橋編改訂の背景と運用第8回 13章ラーメン構造，橋梁と基礎，pp.82-85, 1981.10
- 6) 井上純三・竹中秀夫・長谷川彰夫・西野文雄：有効座屈長を用いた部材設計の全体骨組耐荷力に関する精度，構造工学論文集，Vol.31A, pp.123-132, 1985.3
- 7) F.,NISHINO and W.ATTIA：A Proposal for In-plane Stability Design of Steel Framed Structures, Proc. of JSCE, pp.1-10, 1992.1
- 8) 野上邦栄・成田信之・山本一之：吊橋主塔の構造特性と座屈設計に関する実績調査研究，構造工学論文集，Vol.37A, pp.177-190, 1991.3
- 9) 野上邦栄・成田信之：鋼斜張橋主塔の構造特性と座屈設計に関する実績調査研究，構造工学論文集，Vol.38A, pp.167-180, 1992.3
- 10) 野上邦栄・成田信之：吊形式橋梁の塔の座屈設計に関する一考察，土木学会論文集，No.446/I-19, pp.225-234, 1992.4
- 11) 倉方慶夫・西野文雄・長谷川彰夫：骨組構造物における現行の座屈設計法の問題点（上）（下），橋梁と基礎，pp.19-27, pp.41-46, 1992.2,3
- 12) 土木学会：座屈設計ガイドライン，1987
- 13) Yura J.A.：The Effective Length of Columns in Unbraced Frames, AISC, Eng.,J., Vol.8, No.2, 1971.4
- 14) 海洋架橋調査会・本州四国連絡橋公団：本州四国連絡橋の海洋架橋技術に関する調査研究・鋼上部構造委員会報告，1990.3
- 15) 宇佐美勉：鋼骨組構造物の座屈設計法の問題点：SGST 拡大研究論文集，第1回，pp.107-120, 1991.11
- 16) 野上邦栄：鋼ラーメン構造物の座屈設計について：土木学会・鋼構造委員会・鋼構造終局強度研究小委員会終局強度設計分科会資料，1990.4
- 17) 野上邦栄・小林岳彦：平面ラーメン構造物の実用的な耐荷力算出法について，JSSC 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第12回，pp.467-472, 1988.7
- 18) 野上邦栄・高瀬弘・山本一之：微小軸圧縮力を受ける骨組部材の有効座屈長に関する一考察，JSSC 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集，第16回，pp.385-390, 1992.7
- 19) 尾下里治・吉田昭仁：高次の座屈固有値を用いた有効座屈長の決定方法の提案，第47回土木学会年次学術講演会，1992.9
- 20) 野上邦栄：鋼ラーメン柱の実用的座屈設計法に関する一提案，土木学会論文集，No.460/I-22, 1993.1
- 21) 西野文雄：土木学会・鋼構造委員会・鋼構造終局強度研究小委員会，終局強度設計分科会成果報告書（案），1992.9
- 22) 崎元達郎・平野邦昭・結城皓曠：有効接線係数により定めた有効長さを用いた鋼骨組の設計法について，第47回土木学会年次学術講演会，1992.9

(1992年9月21日 受付)