

# 種々の境界および荷重条件を統一的に考慮した 弾性矩形板の線形座屈解析法

UNIFIED ANALYTICAL METHOD OF LINEAR BUCKLING STRENGTH  
OF ELASTIC RECTANGULAR PLATE  
UNDER VARIOUS TYPE OF LOADING AND BOUNDARY CONDITIONS

中沢 正利\*・倉西 茂\*\*・横幕 清\*\*\*

By Masatoshi NAKAZAWA, Shigeru KURANISHI and Kiyoshi YOKOMAKU

A unified method to calculate the elastic buckling load of an elastic rectangular plate subjected to a variety of loading under various boundary conditions is developed. By using the shape function derived from the free vibration of beams, the common function with orthogonally two directions becomes available and makes possible to simplify the method of analysis of the plate buckling problems. Quite excellent agreement of numerical results with analytical ones and the wide-applicability are confirmed through the several numerical simulations. From the numerical examples, it is shown that the bending strength mainly depends on the rigidity of compressive edges, on the other hand, the shear strength is affected by the all surrounding edges of a panel even under the combined loading of bending and shear. This often causes the change of loading parameter which expresses the most critical state.

## 1. まえがき

これまで板に関しては種々の境界および荷重条件の下での線形座屈解が多数発表され、公式集等<sup>1), 2)</sup>に多くの解析例が列挙されている。しかし、それらは異なる研究者が個々に異なる変位関数あるいは座屈モードを用いて求めたものであるため、この意味で座屈解の精度は明確でない。さらに、その解析例は境界条件の単純な場合、特に四辺単純支持条件についての座屈解がほとんどであり、その他の境界条件に対する解析値は非常に少ない<sup>3), 4)</sup>のが現状であろう。

また一般に、薄板で構成された構造物の部分パネルを構造解析する場合には、実構造の部分パネル周辺での境界条件が不明確なため、上下界（例えば単純支持と回転固定境界条件）での座屈強度を明らかにしておくことが必要となる場合が多い。よって、複数の境界条件を統一的に扱うことが可能で、しかも解析精度という点から、変位関数あるいは座屈モードが明瞭で誤差評価の容易な形で扱えることが望ましい。荷重条件についても、一般の実構造では単独荷重の載荷は稀であるため、載荷荷重の連成効果を考慮した連成座屈強度を精度よく解析する必要が今後一層必要になってくると思われる。

本研究では、はりの自由振動解<sup>5)</sup>より得られる変位関数を用いることにより、板周辺での種々の境界条件を統一的に記述し得ることに着目し、板の場合に対して拡張を試みた。この変位関数は、必ずしも板の全ての境界条件に対して適合するものではないことが既に知られている<sup>6)</sup>が、その適用範囲を整理したうえで、実用的な範囲の計算には充分有用であることを示す。また、板平面上での直角二方向に対する種々の荷重条件を考慮できる応力関数を導き、これを併用することにより、種々の境界条件のみならず種々の荷重条件をも統一的に考慮可能な弾性矩形板の線形座屈解析法の開発を目的としている。

\* 工博 東北大学助手 工学部土木工学科 (〒980 仙台市青葉区荒巻字青葉)

\*\* 工博 東北大学教授 工学部土木工学科

\*\*\* 学士(工学) 川崎製鉄 エンジニアリング事業部建材技術部 (〒100 東京都千代田区内幸町 2-2-3)

表-1 はりと板の境界条件の違い

| 境界条件                     | はり                                                                                                  | 板 (x)                                                                                                                                                                                                                                        | 板 (y)                                                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 単純支持<br>simply supported | $w = 0,$<br>$M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$                                         | $w = 0,$<br>$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$                                                                                                                          | $w = 0,$<br>$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0$                                                                                                                          |
| 固定<br>clamped            | $w = 0,$<br>$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$                                                     | $w = 0,$<br>$\frac{\partial w}{\partial x} = 0$                                                                                                                                                                                              | $w = 0,$<br>$\frac{\partial w}{\partial y} = 0$                                                                                                                                                                                              |
| たわみ角の拘束され<br>た自由端 guided | $\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$<br>$V = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$             | $\frac{\partial w}{\partial x} = 0,$<br>$\bar{V}_x = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} = 0$                                                                     | $\frac{\partial w}{\partial y} = 0,$<br>$\bar{V}_y = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} = 0$                                                                     |
| 自由<br>free               | $M = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0,$<br>$V = -EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = 0$ | $M_x = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0,$<br>$\bar{V}_x = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} = 0$ | $M_y = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = 0,$<br>$\bar{V}_y = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} = 0$ |

二、三の解析例を通して、せん断力、不等曲げ、軸力等が板の座屈に及ぼす影響を明らかにし、実構造物では一般に不明確である板周辺の境界条件を正確に把握することの重要性を提示する。

## 2. 基礎理論

### (1) はりと板の境界条件の違い

ここでは、はりと板の境界条件の違いを整理することにより、板の境界条件を満足する変位関数をはりの場合の変位関数から転用する際の基本的アイデアを示す。いま、曲げ剛性  $EI$  のはりの中立軸を  $x$  軸とし、曲げ剛性  $D$  の矩形板の  $x, y$  軸方向の境界条件をまとめて示すと表-1<sup>a</sup>のようになる。ここで  $w$  はたわみを表わし、 $E$  および  $\nu$  はそれぞれヤング率とポアソン比である。 $M$  および  $V$  は各々曲げモーメントおよびせん断力であり、 $\bar{V}_x, \bar{V}_y$  はねじれモーメントの影響を含んだ板の等価せん断力である。ここで、板のたわみ  $w(x, y)$  を変数分離形で、

$$w(x, y) = f(x)g(y), \dots\dots\dots (1)$$

の形に仮定する。はりの場合は  $g(y) = 1$ 、すなわち  $w = f(x)$  で表わせる。いま、板の周辺境界条件として  $x = p$  で単純支持を設定すると、板のたわみ  $w(p, y)$  および曲げモーメント  $M_x(x = p)$  は、

$$w(p, y) = f(p)g(y) = 0, \dots\dots\dots (2-a)$$

$$M_x(x = p) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Bigg|_{x=p} = -D \{ f''(p)g(y) + \nu f(p)\ddot{g}(y) \} = 0, \dots\dots\dots (2-b)$$

と表わせる。ここで、 $(\prime) \equiv \frac{\partial(\quad)}{\partial x}$ 、 $(\ddot{\quad}) \equiv \frac{\partial^2(\quad)}{\partial y^2}$  を意味する。この式中  $g(y)$  および  $\ddot{g}(y)$  は任意であるため、結局

$$f(p) = f''(p) = 0, \dots\dots\dots (3)$$

となる。これははりの境界条件と一致するため、この境界条件の場合にははりの変位関数をそのまま板の場合にも用いることができる。同様に固定あるいはたわみ角を拘束した自由 (guided) 境界条件の場合もはりの場合の変位関数がそのまま使用できる。しかし、自由境界条件 ( $M_x = \bar{V}_x = 0$  at  $x = p$ ) の場合には、

$$\begin{aligned} f''(p)g(y) + \nu f(p)\ddot{g}(y) &= 0, & f'''(p)g(y) + (2 - \nu)f'(p)\dot{g}(y) &= 0, \\ \therefore f(p) = f'(p) = f''(p) = f'''(p) &= 0, \dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

となって、はりの場合の境界条件 ( $f''(p) = f'''(p) = 0$ ) とは異なるため、はりの変位関数は使えない。すなわち、はりの変位関数は板の自由境界条件の場合には直交関数とはならない<sup>6)</sup>。よって、板の場合には式 (1) の基本となる変位関数の形式からあらたに考え直す必要があると思われる。よって、本論文では自由端条件は扱えないもの<sup>b</sup>、それ以外の適用可能な境界条件を扱うこととし、はりの自由振動解から得られる変位関数をそのまま利用することを考える。

<sup>a</sup> 板曲げの有限変位理論によれば、自由辺の境界条件は  $\bar{V}_x = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right\} - (N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}) = 0$ ,  
 $\bar{V}_y = -D \left\{ \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right\} - (N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y}) = 0$  と表わされるが、式 (4) となることに変わりはない。ここで、 $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  はそれぞれ板の面内断面力としての  $x, y$  方向軸力およびせん断力である。

<sup>b</sup> ただし、一様圧縮応力載荷辺が単純支持条件の場合には、変位関数が式 (5-c) と形式的に一致する<sup>3)</sup>ため、自由端条件下での座屈荷重を近似的に求められる可能性はある。

表-2 境界条件 ( 後述の略記 *b.c. 12* は  $x, y$  方向の *b.c. No.* がそれぞれ 1, 2 であることを意味する。 )

| b.c. No. | 境界条件                                                                                        | 振動数方程式および係数                                                                                                                                                                              |
|----------|---------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1        | both sides simply supported,<br>$h_i(0) = h_i''(0) = 0,$<br>$h_i(\ell) = h_i''(\ell) = 0$   | $\beta_i = i\pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$<br>$c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = 0$                                                                                                            |
| 2        | both sides clamped,<br>$h_i(0) = h_i'(0) = 0,$<br>$h_i(\ell) = h_i'(\ell) = 0$              | $\cos(\beta_i) \cosh(\beta_i) - 1.0 = 0,$<br>$c_1 = 1, c_2 = -\frac{\sin(\beta_i) - \sinh(\beta_i)}{\cos(\beta_i) - \cosh(\beta_i)},$<br>$c_3 = -1, c_4 = -c_2$                          |
| 3        | clamped and simply supported,<br>$h_i(0) = h_i'(0) = 0,$<br>$h_i(\ell) = h_i''(\ell) = 0$   | $\sin(\beta_i) \cosh(\beta_i) - \cos(\beta_i) \sinh(\beta_i) = 0,$<br>$c_1 = 1, c_2 = -\frac{\sin(\beta_i) + \sinh(\beta_i)}{\cos(\beta_i) + \cosh(\beta_i)},$<br>$c_3 = -1, c_4 = -c_2$ |
| 4        | clamped and guided,<br>$h_i(0) = h_i'(0) = 0,$<br>$h_i'(\ell) = h_i'''(\ell) = 0$           | $\tan(\beta_i) + \tanh(\beta_i) = 0,$<br>$c_1 = 1, c_2 = \frac{\cos(\beta_i) - \cosh(\beta_i)}{\sin(\beta_i) + \sinh(\beta_i)},$<br>$c_3 = -1, c_4 = -c_2$                               |
| 5        | simply supported and guided,<br>$h_i(0) = h_i''(0) = 0,$<br>$h_i'(\ell) = h_i'''(\ell) = 0$ | $\beta_i = \left(\frac{2i-1}{2}\right)\pi, \quad i = 1, 2, 3, \dots,$<br>$c_1 = 1, c_2 = c_3 = c_4 = 0,$                                                                                 |
| 6        | both sides guided,<br>$h_i'(0) = h_i'''(0) = 0,$<br>$h_i'(\ell) = h_i'''(\ell) = 0$         | $\beta_i = i\pi, \quad i = 0, 1, 2, \dots,$<br>$c_2 = 1, c_1 = c_3 = c_4 = 0$                                                                                                            |

## (2) 境界条件および変位関数の仮定

はりの自由振動モードを利用した板の変位関数<sup>5)</sup>は、面外たわみ  $w(x, y)$  の形を

$$w(x, y) = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} f_m(x) g_n(y), \quad \dots \dots \dots (5-a)$$

$$\begin{cases} f_m(x) = h_i(z) \text{ for } i = m, \quad z = x, \quad \ell = a, \\ g_n(y) = h_i(z) \text{ for } i = n, \quad z = y, \quad \ell = b, \end{cases} \quad \dots \dots \dots (5-b)$$

$$h_i(z) = c_1 \sin\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_3 \sinh\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right) + c_4 \cosh\left(\frac{\beta_i z}{\ell}\right), \quad \dots \dots \dots (5-c)$$

とにおいて  $x, y$  方向とも共通の変位関数で表わす。ここで  $t$  は矩形板の板厚、 $a, b$  はそれぞれ  $x, y$  方向の辺長である。また、 $m, n$  はそれぞれ  $x, y$  方向への半波の数を表わし、 $b_{mn}$  はこの級数の各々の座屈モードに対応する未知の振幅倍率である。 $c_1, \dots, c_4$  および  $\beta_i$  は表-2に示す様な種々の境界条件に対応した振動数方程式から決定される係数である。なお、以後 *b.c. 12* などの略式表現を用いるが、これは  $x$  方向 ( $x = 0, a$  の辺) の境界条件および  $y$  方向 ( $y = 0, b$  の辺) の境界条件がそれぞれ表-2の境界条件 1, 2 であることを意味する。

## (3) 作用外力の表現

図-1に示す二軸方向の不等曲げ、軸力、せん断を全て表現できる応力関数  $\Phi$ <sup>7)</sup> は、 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_a$  をそれぞれ板厚に関して一様に作用する  $x$  方向作用応力、 $y$  方向作用応力、作用せん断応力として、

$$\Phi = \sigma_{x2} \left[ \omega \cdot xy - \frac{1}{6b} (\alpha_x y^3 - 3by^2) \left\{ \gamma_x + (1 - \gamma_x) \frac{x}{a} \right\} - \frac{\kappa}{6a} (\alpha_y x^3 - 3ax^2) \left\{ \gamma_y + (1 - \gamma_y) \frac{y}{b} \right\} \right], \quad \dots (6)$$

で表わせる。ここで  $\alpha_x, \alpha_y$  はそれぞれ  $x, y$  方向の縁曲げ応力と軸方向応力の割合を表わす係数、 $\gamma_x, \gamma_y$  は不等

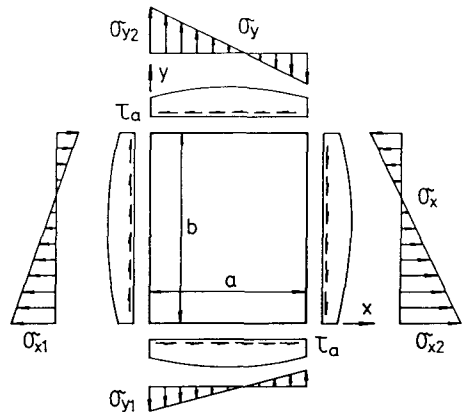


図-1 板パネルに作用する応力

曲げの比,  $\omega$  は縁曲げ応力とせん断応力の比,  $\kappa$  は  $x$  と  $y$  方向の作用応力の比を示し,

$$\alpha_x, \alpha_y = \begin{cases} 0 & \text{uniform normal stress,} \\ 2 & \text{pure bending,} \\ < 2 & \text{bending and compression,} \\ > 2 & \text{bending and tension,} \end{cases} \quad \begin{aligned} \gamma_x &\equiv \sigma_{x1}/\sigma_{x2}, \\ \gamma_y &\equiv \sigma_{y1}/\sigma_{y2}, \\ \omega &\equiv \tau_a/\sigma_{x2}, \\ \kappa &\equiv \sigma_{y2}/\sigma_{x2}, \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (7)$$

のパラメータで定義できる. この時, 各応力は次の様に表わされる.

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -\frac{\sigma_{x2}}{b}(\alpha_x y - b) \left\{ \gamma_x + (1 - \gamma_x) \frac{x}{a} \right\}, \quad \dots\dots\dots (8-a)$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = -\frac{\sigma_{y2}}{a}(\alpha_y x - a) \left\{ \gamma_y + (1 - \gamma_y) \frac{y}{b} \right\}, \quad \dots\dots\dots (8-b)$$

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = -\tau_a + \frac{\sigma_{x2}}{2ab}(\alpha_x y^2 - 2by)(1 - \gamma_x) + \frac{\sigma_{y2}}{2ab}(\alpha_y x^2 - 2ax)(1 - \gamma_y). \quad \dots\dots\dots (8-c)$$

よって, 作用モーメント  $M$  および軸力  $N$  は,

$$M_x = -t \int_0^b \sigma_x \left(y - \frac{b}{2}\right) dy = \frac{\alpha_x}{2} M_{x2} \left\{ \gamma_x + (1 - \gamma_x) \frac{x}{a} \right\}, \quad \dots\dots\dots (9-a)$$

$$N_x = \frac{t}{b} \int_0^b \sigma_x dy = -\frac{t\sigma_{x2}}{2}(\alpha_x - 2) \left\{ \gamma_x + (1 - \gamma_x) \frac{x}{a} \right\}, \quad \dots\dots\dots (9-b)$$

$$M_y = -t \int_0^a \sigma_y \left(x - \frac{a}{2}\right) dx = \frac{\alpha_y}{2} M_{y2} \left\{ \gamma_y + (1 - \gamma_y) \frac{y}{b} \right\}, \quad \dots\dots\dots (9-c)$$

$$N_y = \frac{t}{a} \int_0^a \sigma_y dx = -\frac{t\sigma_{y2}}{2}(\alpha_y - 2) \left\{ \gamma_y + (1 - \gamma_y) \frac{y}{b} \right\}, \quad \dots\dots\dots (9-d)$$

と表わされる. ここで,  $M_{x2} = b^2 t \sigma_{x2} / 6$ ,  $M_{y2} = a^2 t \sigma_{y2} / 6$  である.

#### (4) 座屈方程式の誘導

矩形板の座屈方程式はエネルギー法を用いて算出する. 座屈点近傍でのひずみエネルギー増分  $\Delta U$  および外力増分  $\Delta T$ <sup>8)</sup> は,

$$\Delta U = \frac{D}{2} \int_0^b \int_0^a \left[ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - (1 - \nu) \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy, \quad \dots\dots (10-a)$$

$$\Delta T = \frac{t}{2} \int_0^b \int_0^a \left\{ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx dy, \quad \dots\dots\dots (10-b)$$

で表わされる. ここで, 級数を掛け合わせる順番が結果に影響しない様に, エネルギー増分の表示を  $x, y$  に関して対称な形に修正している. 上式(10)に式(5)のたわみおよび式(8)の応力を代入して整理すると最終的に,

$$\Delta U = J_1, \quad \Delta T = \left( \frac{M_{x2}}{D} \right) J_2, \quad \dots\dots\dots (11)$$

の形に表わせる. 座屈モーメント  $(M_{x2})_{cr} / D$  は上式の  $\Delta U = \Delta T$  なるうちの最小の荷重値として求められることから,

$$\frac{\partial(M_{x2}/D)}{\partial b_{mn}} = \frac{J_2 \left( \frac{\partial J_1}{\partial b_{mn}} \right) - J_1 \left( \frac{\partial J_2}{\partial b_{mn}} \right)}{J_2^2} = 0, \quad \dots\dots\dots (12)$$

の条件を課すと, 結局

$$\frac{\partial \Delta U}{\partial b_{mn}} - \frac{\partial \Delta T}{\partial b_{mn}} = 0, \quad \dots\dots\dots (13)$$

を解けばよいことになる. 式(5)のたわみ  $w(x, y)$  をより具体的に示すと

$$w(x, y) = t \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} b_{mn} \left\{ c_{x1} \sin \left( \frac{\beta_{xm} x}{a} \right) + c_{x2} \cos \left( \frac{\beta_{xm} x}{a} \right) + c_{x3} \sinh \left( \frac{\beta_{xm} x}{a} \right) + c_{x4} \cosh \left( \frac{\beta_{xm} x}{a} \right) \right\} \cdot \left\{ c_{y1} \sin \left( \frac{\beta_{yn} y}{b} \right) + c_{y2} \cos \left( \frac{\beta_{yn} y}{b} \right) + c_{y3} \sinh \left( \frac{\beta_{yn} y}{b} \right) + c_{y4} \cosh \left( \frac{\beta_{yn} y}{b} \right) \right\}, \quad \dots\dots\dots (14)$$

となる. 式(13)に式(14)と(8)を代入してまとめると,

$$\begin{aligned}
\Psi \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} & \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \beta_{xm}^2 \beta_{xi}^2 I_x(e_{22}) I_y(f_{00}) + \nu \beta_{xm}^2 \beta_{yj}^2 I_x(e_{20}) I_y(f_{02}) \right. \\
& + \alpha^2 \beta_{yn}^2 \beta_{yj}^2 I_x(e_{00}) I_y(f_{22}) + \nu \beta_{xi}^2 \beta_{yn}^2 I_x(e_{02}) I_y(f_{20}) + 2(1-\nu) \beta_{xm} \beta_{xi} \beta_{yn} \beta_{yj} I_x(e_{11}) I_y(f_{11}) \Big\} \\
& - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} b_{ij} \left\{ 6\gamma_x \beta_{xm} \beta_{xi} I_x(e_{11}) I_y(f_{00}) + 6(1-\gamma_x) \frac{1}{a} \beta_{xm} \beta_{xi} I_x(x \cdot e_{11}) I_y(f_{00}) \right. \\
& - 6\alpha_x \gamma_x \frac{\alpha}{a} \beta_{xm} \beta_{xi} I_x(e_{11}) I_y(y \cdot f_{00}) - 6\alpha_x (1-\gamma_x) \frac{\alpha}{a^2} \beta_{xm} \beta_{xi} I_x(x \cdot e_{11}) I_y(y \cdot f_{00}) \\
& + 6\kappa \gamma_y \alpha^2 \beta_{yn} \beta_{yj} I_x(e_{00}) I_y(f_{11}) - 6\kappa \alpha_y \gamma_y \frac{\alpha}{b} \beta_{yn} \beta_{yj} I_x(x \cdot e_{00}) I_y(f_{11}) \\
& + 6\kappa (1-\gamma_y) \frac{\alpha^2}{b} \beta_{yn} \beta_{yj} I_x(e_{00}) I_y(y \cdot f_{11}) - 6\kappa \alpha_y (1-\gamma_y) \frac{\alpha}{b^2} \beta_{yn} \beta_{yj} I_x(x \cdot e_{00}) I_y(y \cdot f_{11}) \\
& - 6\omega \alpha [\beta_{xm} \beta_{yj} I_x(e_{10}) I_y(f_{01}) + \beta_{xi} \beta_{yn} I_x(e_{01}) I_y(f_{10})] \\
& - 6\kappa (1-\gamma_y) \frac{\alpha}{b} [\beta_{xm} \beta_{yj} I_x(x \cdot e_{10}) I_y(f_{01}) + \beta_{xi} \beta_{yn} I_x(x \cdot e_{01}) I_y(f_{10})] \\
& + 3\kappa \alpha_y (1-\gamma_y) \frac{\alpha^2}{a^2} [\beta_{xm} \beta_{yj} I_x(x^2 \cdot e_{10}) I_y(f_{01}) + \beta_{xi} \beta_{yn} I_x(x^2 \cdot e_{01}) I_y(f_{10})] \\
& - 6(1-\gamma_x) \frac{\alpha}{a} [\beta_{xm} \beta_{yj} I_x(e_{10}) I_y(y \cdot f_{01}) + \beta_{xi} \beta_{yn} I_x(e_{01}) I_y(y \cdot f_{10})] \\
& \left. + 3\alpha_x (1-\gamma_x) \frac{\alpha^2}{a^2} [\beta_{xm} \beta_{yj} I_x(e_{10}) I_y(y^2 \cdot f_{01}) + \beta_{xi} \beta_{yn} I_x(e_{01}) I_y(y^2 \cdot f_{10})] \right\} \\
& = 0, \dots\dots\dots (15)
\end{aligned}$$

として座屈方程式が得られる。ここで縦横比  $\alpha \equiv a/b$ ，かつ

$$\Psi \equiv 1 / \left( \frac{M_{x2}}{D} \right), \dots\dots\dots (16)$$

で定義する。また、例えば、

$$\begin{aligned}
I_x(e_{11}) & \equiv \int_0^a \left[ \sin\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right), \cos\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right), \sinh\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right), \cosh\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right) \right] [E_{11}] \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right) \\ \cos\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right) \\ \sinh\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right) \\ \cosh\left(\frac{\beta_{xm}x}{a}\right) \end{array} \right\} dx, \\
I_y(y^2 \cdot f_{01}) & \equiv \int_0^b y^2 \cdot \left[ \sin\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right), \cos\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right), \sinh\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right), \cosh\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right) \right] [F_{01}] \left\{ \begin{array}{l} \sin\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right) \\ \cos\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right) \\ \sinh\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right) \\ \cosh\left(\frac{\beta_{yn}y}{b}\right) \end{array} \right\} dy,
\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}
E_{00} & \equiv \{c_{x1}, c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}\}^T [c_{x1}, c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}], & E_{11} & \equiv \{-c_{x2}, c_{x1}, c_{x4}, c_{x3}\}^T [-c_{x2}, c_{x1}, c_{x4}, c_{x3}], \\
E_{22} & \equiv \{-c_{x1}, -c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}\}^T [-c_{x1}, -c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}], & E_{20} & \equiv \{-c_{x1}, -c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}\}^T [c_{x1}, c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}], \\
E_{02} & \equiv \{c_{x1}, c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}\}^T [-c_{x1}, -c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}], & E_{10} & \equiv \{-c_{x2}, c_{x1}, c_{x4}, c_{x3}\}^T [c_{x1}, c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}], \\
E_{01} & \equiv \{c_{x1}, c_{x2}, c_{x3}, c_{x4}\}^T [-c_{x2}, c_{x1}, c_{x4}, c_{x3}],
\end{aligned}$$

なる記号を用いており、マトリクス  $F_{00}, \dots, F_{22}$  についても同様である。マトリクスの第一下添え字は  $f_m(x)$  あるいは  $g_n(y)$  の、第二下添え字は  $f_i(x)$  あるいは  $g_j(y)$  の微分回数に対応している。

##### (5) 数値計算法

座屈基礎方程式 (15) は、次の様に簡略化してマトリクス表示することができる。

$$\Psi \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [C] b_{ij} - \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} [D] b_{ij} = 0.$$

これより、上式が nontrivial な解を持つための条件として、

$$\det [\Psi [I] - [C]^{-1} [D]] = 0, \dots\dots\dots (17)$$

を計算すればよい。ここで、 $[I]$  は単位行列である。この様に座屈解析はマトリクス  $[C]^{-1} [D]$  の固有値を求める問題に帰着する。

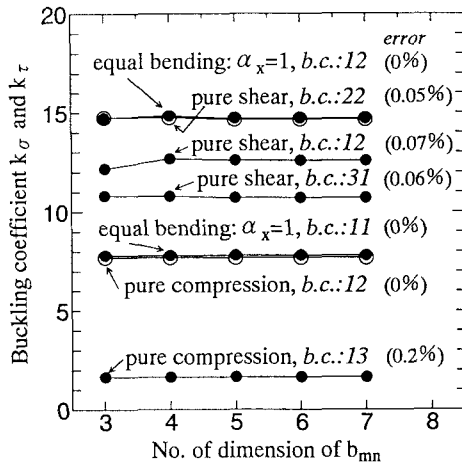


図-2  $b_{mn}$  採用次数と数値解の収束 (縦横比  $\alpha = 1.0$ )

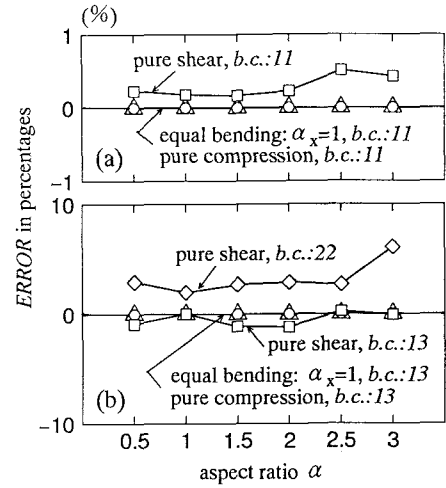


図-3 数値解の誤差と縦横比の関係

### (6) 座屈係数について

一般に座屈係数  $k$  は、

$$\sigma = k \times \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{t}{b}\right)^2 = k \times D \frac{\pi^2}{b^2 t},$$

より与えられ、よって曲げ応力の場合には

$$k_\sigma \equiv \frac{(\sigma_{x2})_{cr} b^2 t}{D} \frac{1}{\pi^2} = \frac{6}{\Psi \pi^2} = k_{\sigma x2}, \dots \dots \dots (18)$$

を基本座屈係数とする。一方  $\sigma_x$  は、 $\alpha_x \neq 2$  の時、曲げ応力と一様圧縮の軸方向応力の成分に分解されるため、それらの座屈係数を  $k_{\sigma bx}, k_{\sigma nx}$  とすると、

$$k_{\sigma bx2} = \frac{\alpha_x}{2} k_\sigma, \quad k_{\sigma bx1} = \gamma_x k_{\sigma bx2}, \quad k_{\sigma nx2} = \left(\frac{2-\alpha_x}{2}\right) k_\sigma, \quad k_{\sigma nx1} = \gamma_x k_{\sigma nx2},$$

で表わされる。同様に、 $y$  方向についても

$$k_{\sigma by2} = \frac{\alpha_y}{2} k_\sigma, \quad k_{\sigma by1} = \gamma_y k_{\sigma by2}, \quad k_{\sigma ny2} = \left(\frac{2-\alpha_y}{2}\right) k_\sigma, \quad k_{\sigma ny1} = \gamma_y k_{\sigma ny2},$$

となる。せん断については、

$$k_\tau \equiv \frac{(\tau_a)_{cr} b^2 t}{D} \frac{1}{\pi^2} = \frac{6\omega}{\Psi \pi^2}, \dots \dots \dots (19)$$

で表わされる  $k_\tau$  をせん断座屈係数とする。なお、公式集などの文献ではそのほとんどが曲げと一様圧縮を区別しておらず、基本座屈係数  $k_\sigma$  を用いた表示になっている。

## 3. 精度検証および解析例

### (1) $b_{mn}$ の採用次数と数値解の収束

図-2は、パネル縦横比  $\alpha = 1.0$  の板の  $x$  軸方向に等曲げ、せん断あるいは一軸圧縮を受ける板について、種々の境界条件における  $b_{mn}$  の採用次数と数値解との関係を表わしたものである。境界条件および荷重条件の如何に関わらず、 $b_{mn}$  の採用次数は 5 ( $m = 1 \sim 5, n = 1 \sim 5$ ) で充分であることが解り、以後の解析は全てこの次数を標準として行なっている。図中の  $error$  は  $b_{mn}$  の採用次数 7 を正解とおいた場合の、採用次数 5 の場合の誤差を示したものであり、座屈解は境界条件あるいは荷重条件によらず充分な精度で収束していることが解る。

一方、図-3はパネル縦横比を変化させて、 $b_{mn} = 5$  の場合の数値解とその収束値 (種々の荷重および境界条件によって異なる) の間の誤差  $ERROR$  を示したものである。等曲げあるいは純圧縮の場合には境界条件および縦横比によらずやはり 5 次で良好な精度を有している。しかし、せん断を受ける場合には縦横比が大きくな

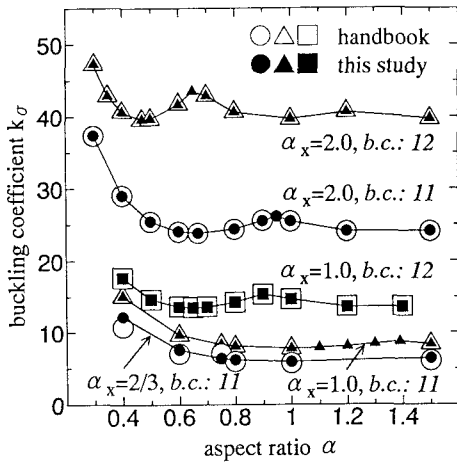


図-4 解析解との比較（曲げと軸方向力）

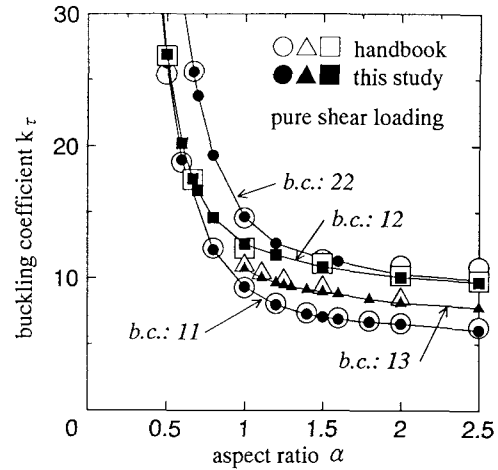


図-5 解析解との比較（せん断力）

る、あるいは境界条件が高次の座屈モードを誘発するに従って誤差が大きくなるため、それだけ高次の  $b_{mn}$  が要求されることを示している。また、特にせん断荷重を受ける場合には  $b_{mn}$  の採用次数を上げると座屈モードが微妙に変化したり、最低次の座屈モードがすり代わる場合があることに注意されたい。ここでは同じと思われる座屈モードに対応した座屈荷重を追跡して図-3の関係を求めている。

## (2) 既存の解析解と数値解の比較

図-4では  $x$  軸方向のみに等曲げと軸力 ( $\gamma_x = 1.0, \omega = 0.0, \kappa = 0.0$ ) を受ける板において、曲げ応力と軸方向応力の割合  $\alpha_x$  および境界条件が変化する場合に対して、既存の解析解<sup>1)</sup>と数値解を比較した。この他にも  $\alpha_x = 2.0, b.c.: 13$  の数値解は既存の解析解に対して極めて良い一致を示したが、 $\alpha_x = 2.0, b.c.: 11$  の結果と図上で重なるためここでは割愛し表示していない。純曲げ荷重を受ける場合であるため、圧縮辺の境界条件（単純支持）が座屈荷重をほぼ決定し、同じ強度特性を示すためである。図-5ではせん断外力に対する座屈強度について、同様に境界条件を変化させて解析解と数値解を比較し、良好な一致をみている。これらの結果、本数値解法は境界あるいは荷重条件によらず十分な精度で適用可能であることを確認した。

## (3) 種々の境界および荷重条件における座屈荷重の対比

図-6は  $b.c.: 11$  および  $b.c.: 12$  条件下で  $x$  軸方向の不等曲げとせん断 ( $\alpha_x = 2.0, \kappa = 0.0, \omega = 0.2$ ) を受ける板の座屈荷重計算例である。計算では不等曲げの割合を変化 ( $0.0 \leq \gamma_x \leq 1.0$ ) させて、縦横比  $\alpha$  と座屈係数  $k_\sigma$  の関係を調べている。不等曲げによって、二次的な放物線状のせん断応力が発生し、一様分布せん断応力とともに作用することになる。座屈荷重は相対二辺の非載荷辺が固定された  $b.c.: 12$  条件の方が四辺単純支持の  $b.c.: 11$  条件での値よりも約 1.5 倍高い値を示すが、 $b.c.: 11$  で最も安全側の低い座屈荷重を与える等曲げ載荷 ( $\gamma_x = 1.0$ ) は  $b.c.: 12$  の場合には反対に危険側の高い座屈荷重を与える。また、この場合の安全側である最も低い座屈荷重は不等曲げの割合の最も大きい  $\gamma_x = 0.0$  の場合に得られる。

この結果に対する考察を以下に述べる。不等曲げの作用した板には付加せん断応力が発生するが、このせん断による座屈では、圧縮辺だけでなく四辺の境界条件が影響する。単純支持辺などの拘束の小さい辺が圧縮を受ける場合、曲げのモードにより座屈する方が座屈荷重は小さい。事実、曲げ座屈強度はその圧縮辺の境界条件でほぼ決ってしまう。従って、この場合は等曲げである  $\gamma_x = 1.0$  の時に最も小さい荷重で座屈する。

一方、固定辺などの拘束の大きい辺が圧縮される条件下では、圧縮辺の曲げ座屈は起こりにくく、それよりも二辺固定、二辺単純支持境界条件下でのせん断座屈の方が起こりやすい。さらに、不等曲げの割合が大きいほど生じるせん断力も大きいため、座屈荷重はせん断のモードに支配される様になり、よって  $\gamma_x = 0.0$  の場合に最も低い座屈荷重が得られることになる。これは、曲げに対しては圧縮辺の境界条件が、せん断に対しては四辺の境界条件が座屈荷重に大きく影響をおよぼすことを端的に表わした例である。よって、このことから解析対象のパネル周辺での境界条件の影響をより正確に把握する必要があることが示唆される。特に、設計を念頭においた

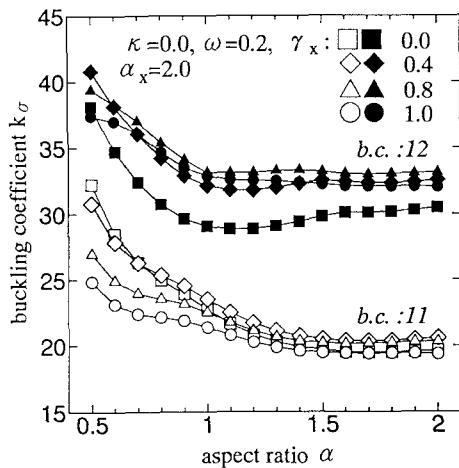


図-6 不等曲げとせん断を受ける板の座屈 ;  $b.c.:11, 12$

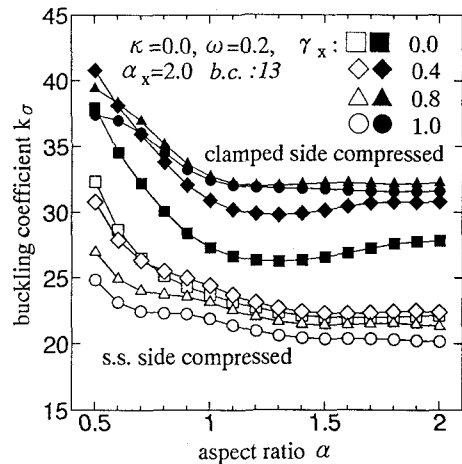


図-7 不等曲げとせん断を受ける板の座屈 ;  $b.c.:13$

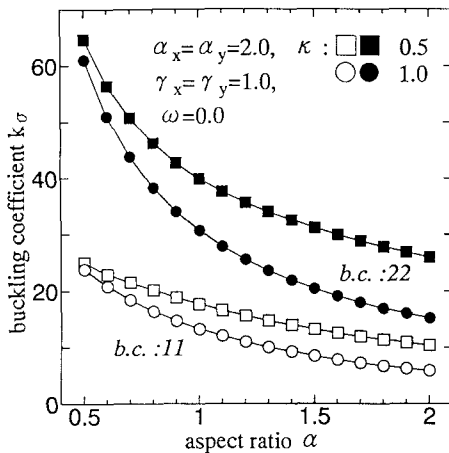


図-8 二軸曲げを受ける板の座屈 ;  $b.c.:11, 22$

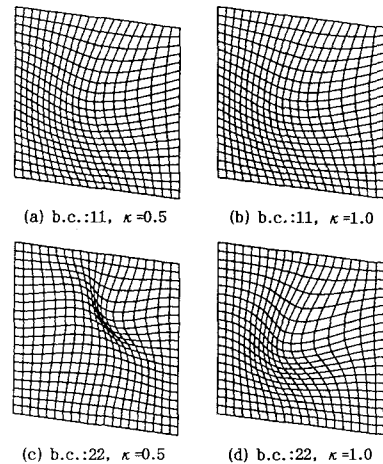


図-9 二軸曲げを受ける板の座屈モード ;  $\alpha = 1.0$

強度曲線構築等の場合には上記特性を十分考慮する必要がある。

同様の議論は図-7に示す  $b.c.:13$  の場合にもあてはまる。圧縮される辺の境界条件が単純支持と固定で異なる場合には、その違いが座屈強度および  $\gamma_x$  の影響の仕方に如実に現われている。すなわち、固定辺が圧縮される場合には  $\gamma_x = 0.4$  と  $0.0$  の間で不等曲げの影響により座屈荷重が顕著に低下するのに対し、単純支持辺圧縮の場合には大きな差とはならない。

#### (4) 2軸曲げ

最後に、図-8は  $x, y$  二方向に等曲げ ( $\alpha_x = \alpha_y = 2.0, \gamma_x = \gamma_y = 1.0, \omega = 0.0$ ) を受ける、いわゆる二軸曲げの場合に対する若干の解析例であるが、 $b.c.:11$  および  $b.c.:22$  の境界条件に対する座屈強度を比較している。このケースでは軸方向応力やせん断応力は作用せず、 $x$  と  $y$  方向の曲げ応力の比  $\kappa$  のパラメータを  $0.5, 1.0$  の2種類に変化させた。座屈強度は縦横比  $\alpha$  の増加に伴って、比較的単調な減少曲線を呈するという特性が明らかになった。また、図-9に示す座屈モードでは  $b.c.:22$  の  $\kappa = 0.5$  と  $1.0$  の場合に異なるモードとなることが認められた。

#### 4. まとめおよび結論

- 1) はりの自由振動解より得られる変位関数は、板の自由境界条件の場合には直交関数とはならないが、その他の境界条件にはそのまま適用可能であるという利点は大きい。この自由振動解としての変位関数を使用することにより、種々の境界および荷重条件を統一的に考慮可能な弾性矩形板の線形座屈解析法を示した。同一の変位関数を直角二方向に共通して用いることにより理論の簡略化が促進され、また解析精度の検証という点からも変位関数が明確で、誤差評価が容易であるという利点が十分期待できる。
- 2) 境界あるいは荷重条件が変化する場合に対しても、 $b_{mn}$  の採用次数はほとんどの場合 5 で十分な精度を保証することを数値的に検証した。しかし、せん断を受ける場合には縦横比が大きくなる、あるいは境界条件が高次の座屈モードを誘発するに従って誤差が大きくなるため、それだけ高次の  $b_{mn}$  が必要となる。等曲げ、軸方向力およびせん断力を受ける板において、荷重パラメータおよび境界条件が変化する場合に対して、既存の解析解と数値解を比較し、本数値解法が十分な精度で適用可能であることを確認した。
- 3) 曲げによる板の座屈強度にはその圧縮辺の境界条件が、せん断による場合にはその四辺全ての境界条件が大きく影響する。この例として、不等曲げおよびせん断を受ける板では、圧縮辺の境界条件による拘束が大きい場合等曲げよりも不等曲げの方が、圧縮辺の境界条件による拘束が小さい場合、不等曲げより等曲げの方が安全側の座屈係数を与えることがある。よって、境界条件の影響をより正確に把握することが設計を考える上でも重要な意味を持つ。
- 4) 第二の数値例として二軸曲げの座屈強度特性を概観した。座屈強度はパネル縦横比の増加に伴って、比較的単調な減少曲線を呈するという特性が明らかになった。

#### 補遺 I 解析解との数値比較

図-4,5,に示した座屈強度の解析解と数値解の比較を数値で以下の表に示す。数値例として、同様な解析例の一つの参考となれば幸いである。数値解の (5) は  $b_{mn} = 5$  での結果という意味である。

表-3 等曲げおよび一様軸方向応力； $\alpha_x = 1.0$ ， $b.c.:11$

| 縦横比 $\alpha$ | 0.4    | 0.6   | 0.75  | 0.8   | 1.0   | 1.5   |
|--------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 解析解          | 15.1   | 9.7   | 8.4   | 8.1   | 7.8   | 8.4   |
| 数値解 (5)      | 15.151 | 9.743 | 8.368 | 8.132 | 7.812 | 8.368 |
| 数値解 (7)      | 15.152 | 9.744 | 8.368 | 8.132 | 7.812 | 8.368 |

表-4 等曲げおよび一様軸方向応力； $\alpha_x = 2/3$ ， $b.c.:11$

| 縦横比 $\alpha$ | 0.4    | 0.6   | 0.75  | 0.8   | 1.0   | 1.5   |
|--------------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 解析解          | 10.8   | 7.1   | 7.1   | 6.0   | 5.8   | 6.1   |
| 数値解 (5)      | 12.237 | 7.598 | 6.448 | 6.250 | 5.964 | 6.448 |
| 数値解 (7)      | 12.239 | 7.599 | 6.449 | 6.251 | 5.965 | 6.449 |

表-5 等曲げおよび一様軸方向応力； $\alpha_x = 1.0$ ， $b.c.:12$

| 縦横比 $\alpha$ | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.65   | 0.7    | 0.8    | 0.9    | 1.0    | 1.2    | 1.4    |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 解析解          | 17.7   | 14.7   | 13.7   | 13.6   | 13.7   | 14.3   | 15.4   | 14.7   | 13.7   | 13.7   |
| 数値解 (5)      | 17.684 | 14.720 | 13.660 | 13.550 | 13.640 | 14.284 | 15.404 | 14.720 | 13.660 | 13.640 |
| 数値解 (6)      | 17.681 | 14.720 | 13.659 | 13.549 | 13.640 | 14.284 | 15.403 | 14.720 | 13.659 | 13.640 |

表-6 純曲げ;  $\alpha_x = 2.0$ , b.c.:11

| 縦横比 $\alpha$ | 0.3    | 0.4    | 0.5    | 0.6    | 0.67   | 0.8    | 0.9    | 1.0    | 1.2    | 1.5    |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 解析解          | 37.4   | 29.1   | 25.5   | 24.1   | 23.9   | 24.4   | 25.6   | 25.5   | 24.1   | 24.1   |
| 数値解 (5)      | 37.462 | 29.101 | 25.529 | 24.122 | 23.881 | 24.470 | 25.577 | 25.529 | 24.122 | 24.122 |
| 数値解 (6)      | 37.452 | 29.099 | 25.528 | 24.122 | 23.881 | 24.470 | 25.576 | 25.528 | 24.122 | 24.112 |

表-7 純曲げ;  $\alpha_x = 2.0$ , b.c.:12

| 縦横比 $\alpha$ | 0.3    | 0.35   | 0.4    | 0.47   | 0.5    | 0.6    | 0.7    | 0.8    | 1.0    | 1.2    | 1.5    |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| 解析解          | 47.3   | 43.0   | 40.7   | 39.6   | 39.7   | 41.8   | 43.0   | 40.7   | 39.7   | 40.7   | 39.7   |
| 数値解 (5)      | 47.332 | 42.974 | 40.682 | 39.634 | 39.733 | 41.761 | 42.974 | 40.682 | 39.733 | 40.682 | 39.733 |
| 数値解 (6)      | 47.211 | 42.894 | 40.626 | 39.597 | 39.701 | 41.741 | 42.894 | 40.626 | 39.701 | 40.626 | 39.701 |

表-8 純せん断, b.c.:11

| 縦横比 $\alpha$ | 0.3    | 0.5    | 0.6    | 0.8    | 1.0   | 1.2   | 1.4   | 1.6   | 1.8   | 2.0   | 2.5   | 3.0   |
|--------------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 解析解          | 63.3   | 25.4   | 18.8   | 12.3   | 9.3   | 8.1   | 7.4   | 7.0   | 6.8   | 6.6   | 6.3   | 6.1   |
| 数値解 (5)      | 64.456 | 26.243 | 18.985 | 12.159 | 9.343 | 7.999 | 7.301 | 6.920 | 6.701 | 6.561 | 6.070 | 5.863 |
| 数値解 (7)      | 64.349 | 26.198 | 18.958 | 12.142 | 9.329 | 7.988 | 7.291 | 6.911 | 6.692 | 6.549 | 6.042 | 5.847 |

表-9 純せん断, b.c.:12

| 縦横比 $\alpha$ | 0.33   | 0.4    | 0.5    | 0.67   | 1.0    | 1.5    | 2.0    | 2.5   | 3.0   |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|-------|
| 解析解          | 55.53  | 40.00  | 26.80  | 17.50  | 12.28  | 11.12  | 10.21  | 9.81  | 9.61  |
| 数値解 (5)      | 54.594 | 39.640 | 26.893 | 17.527 | 12.594 | 10.841 | 10.049 | 9.695 | 9.609 |
| 数値解 (6)      | 54.371 | 39.473 | 26.884 | 17.513 | 12.585 | 10.799 | 10.022 | 9.686 | 9.500 |

表-10 純せん断, b.c.:13

| 縦横比 $\alpha$ | 1.0    | 1.11   | 1.25  | 1.5   | 2.0   | 3.0   |
|--------------|--------|--------|-------|-------|-------|-------|
| 解析解          | 10.98  | 10.38  | 9.85  | 9.31  | 8.43  | 7.96  |
| 数値解 (5)      | 10.729 | 10.040 | 9.492 | 8.973 | 8.133 | 7.595 |
| 数値解 (6)      | 10.723 | 10.035 | 9.488 | 8.964 | 8.099 | 7.588 |

表-11 純せん断, b.c.:22

| 縦横比 $\alpha$ | 0.4    | 0.5    | 0.67   | 1.0    | 1.5    | 2.0    | 2.5   |
|--------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| 解析解          | 67.81  | 43.84  | 25.65  | 14.58  | 11.40  | 10.96  | 10.85 |
| 数値解 (5)      | 61.735 | 41.175 | 25.604 | 14.668 | 11.476 | 10.294 | 9.878 |
| 数値解 (6)      | 61.696 | 41.013 | 25.592 | 14.661 | 11.465 | 10.253 | 9.871 |

## 参考文献

- 1) Ed. by CRC Japan: *Handbook of Structural Stability*, Part 3, plates, Corona Pub. Co. LTD., 1971.
- 2) 土木学会編: 構造力学公式集, 10 章, 1986.
- 3) 小堀 為雄・吉田 博: 鋼構造設計理論, 森北出版, 5 章, 1977.
- 4) Timoshenko, S.P. and Woinowsky-krieger, S.: *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., Chap.6, McGRAW-HILL, 1959.
- 5) たとえば 西岡 隆: 構造振動解析, 培風館, pp.85, 1987.
- 6) Marguerre, K. and Woernle H-T.: *Elastic Plates*, pp.103-104, Blaisdell Pub. Co., 1969.
- 7) Nakazawa, M., Iwakuma, T. and Kuranishi, S.: Elastic buckling strength and post-buckling behavior of a panel under unequal bending and shear, *Structural Eng./Earthquake Eng., Proc. JSCE*, Vol.8, No.1, pp.11s-20s, 1991.
- 8) Timoshenko, S.P. and Gere, J.M.: *Theory of Elastic Stability*, 2nd ed., Chap.8-9, McGRAW-HILL, 1981.

( 1992 年 9 月 21 日 受付)