

偏平シェル構造の複合非線形解析

Geometrical and Material Nonlinear Analysis of Shallow Shells

森田 千尋* 松田 浩** 崎山 毅*** 富重健一****川神雅秀*****

By C. Morita, H. Matsuda, T. Sakiyama, K. Tomishige and M. Kawakami

An approximate method is developed to study the geometrical and material nonlinear problems of shallow shells. First, the differential equation governing the geometrical and material nonlinearity of shallow shells is derived. The solutions are obtained by transforming the partial differential equations into integral equations and integrating them numerically. As applications of this method, three types shallow shells (EP, Cylindrical and HP) are analyzed.

1. まえがき

近年、建設工事の省力化・迅速化を目的として、鋼製あるいはプレストレストコンクリート（P C）製、最近では繊維強化プラスチック（F R P）製の埋設型枠を用いた工法が実用化されている。本研究は、鋼、P C、あるいは、レジンコンクリート（R E C）、ポリマー含浸コンクリート（P I C）、F R Pなどの高耐久性材などで製作された偏平シェル部材をプレキャスト埋設型枠として用い、現場打コンクリートとの組み合わせで構成される合成構造を開発するために、その基礎研究として偏平シェル部材の力学的特性を調べ、偏平シェル合成構造の実用化に資するための基礎データを得ることを最終目的としたものである。

シェル構造物の座屈解析および複合非線形挙動は古くから数多くの実験的および理論的な研究がなされている。例えば、Bushnell¹⁾は種々のシェル構造物の座屈問題についての広範囲に及ぶ研究を行なっている。F E Mによる解析は、Owenら²⁾、Rammら³⁾⁴⁾の数多くの研究などがある。また、三上ら⁵⁾⁶⁾は連続桁橋の変断面部分、アーチ部材、ラーメン隅角部などの面外曲率を有するフランジを円周方向面内荷重を受ける円筒パネルとみなした一連の研究を行っている。このようにシェル構造物に関しては多くの研究がなされてきて

-
- | | | | | |
|-------|----|-----------------------|----------|-----------------------|
| * | 工修 | 長崎大学助手 | 工学部構造工学科 | (〒852 長崎市文教町1-14) |
| ** | 工博 | 長崎大学助教授 | 工学部構造工学科 | (〒852 長崎市文教町1-14) |
| *** | 工博 | 長崎大学教授 | 工学部構造工学科 | (〒852 長崎市文教町1-14) |
| **** | 工修 | 川鉄テクノコンストラクション(株) | | (〒110 東京都台東区池之端2-9-7) |
| ***** | | 長崎大学海洋生産科学研究科博士課程大学院生 | | (〒852 長崎市文教町1-14) |

いるが、限界状態設計法を基本とした『鋼構造設計指針』においても、シェル構造物の設計に関しては検討すべき点が多く残されているといわれている。

シェル構造物はライズの高いものについて理論的に発展し、またライズが高い方が力学的に有利であるが、構造形によってはライズ高さの制約があり、ライズを低くしなければならない場合もある。ライズが低いと周辺の推力も大きくなり、支持構造を強くする必要がある。しかしながら、等分布満載荷重の荷重条件に限定すれば、平板にわずかのライズをもたせて偏平シェルにすることは力学的に非常に有利な構造となり、板に作用する応力は大部分が圧縮膜応力状態になり、周辺の比較的小さな曲げ応力を処理すればよく、したがって、平板に比べて経済的で、大スパン構造に適し、建築構造物の屋根などに多く用いられている。

地中構造物あるいは海洋構造物などには等分布荷重が作用する環境にある。前述したように等分布荷重作用時においては、面内応力は板全域にわたって圧縮であるので、曲げによる引張り応力は減少するから、コンクリートのひびわれ防止に面内応力自身が役立つことになる。すなわち、本研究は引張りに弱いというコンクリートの補強法として、機械的に緊張材に引張力を与えることで部材に圧縮力を生じさせる《プレストレス》から、荷重作用により板に圧縮力を作用させる《ポストストレス》的な点に着目して、合成シェル構造を開発することを意図したものである。本論文は、偏平シェル構造の力学的特性を調べるために、筆者らが既に提示した非弾性矩形板⁷⁾および偏平シェル⁸⁾⁹⁾の一離散化手法を幾何学および材料学的非線形性を考慮したいわゆる偏平シェル構造の複合非線形問題に拡張適用したものである。

2. 偏平シェルの基礎微分方程式

(1) 有限変形での変位－ひずみ関係式

第 n 荷重段階までに生じた全ひずみを $\{\varepsilon^n\}$ で表すと、有限変形を考慮した偏平曲面の変位とひずみの関係は次式で表される。

$$\{\varepsilon^n\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{pmatrix} - w \begin{pmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ 2k_{xy} \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここに、 k_{xx} 、 k_{yy} はそれぞれ x 、 y 方向の曲率、 k_{xy} はねじれ率で、偏平曲面の形状が $z = z(x, y)$ で表されるとすると、高次項を省略した形で近似的に次式で与えられる。

$$k_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad k_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \quad (2)$$

第 $(n+1)$ 荷重の増分荷重によって生ずるひずみ増分を $\{\Delta \varepsilon\}$ とし、そのときの全ひずみを $\{\varepsilon^{n+1}\}$ とすると、変位増分とひずみ増分の関係式は次式となる。

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\varepsilon^{n+1}\} - \{\varepsilon^n\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial w \partial \Delta w}{\partial x \partial x} \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial w \partial \Delta w}{\partial y \partial y} \\ \frac{\partial \Delta w \partial \Delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w \partial \Delta w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial w \partial \Delta w}{\partial y \partial x} \end{pmatrix} - \Delta w \begin{pmatrix} k_{xx} \\ k_{yy} \\ 2k_{xy} \end{pmatrix} - z \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ 2 \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (3)$$

ここに、 $\{\varepsilon^{n+1}\} = \{\varepsilon_x^{n+1} \quad \varepsilon_y^{n+1} \quad \gamma_{xy}^{n+1}\}^T$ 、 $\{\varepsilon^n\} = \{\varepsilon_x^n \quad \varepsilon_y^n \quad \gamma_{xy}^n\}^T$ 、 $\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \varepsilon_x \quad \Delta \varepsilon_y \quad \Delta \gamma_{xy}\}^T$ 。

さらに、式(3)で表される偏平曲面のひずみ成分 $\{\Delta \varepsilon\}$ を、次のように表す。

$$\{\Delta \varepsilon\} = \{\Delta \mathbf{e}\} + z \{\Delta \beta\} \quad (4)$$

ここに、 $\{\Delta \mathbf{e}\}$ は式(3)右辺第1, 2, 3項を $\{\Delta \beta\}$ は第4項を表す。

$$\{\Delta \mathbf{e}\} = \begin{Bmatrix} \Delta e_x \\ \Delta e_y \\ \Delta e_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta u}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta v}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \end{Bmatrix} - \Delta w \begin{Bmatrix} k_x \\ k_y \\ 2k_{xy} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

$$\{\Delta \beta\} = \begin{Bmatrix} \Delta \beta_x \\ \Delta \beta_y \\ \Delta \beta_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

(2) 弾塑性状態での応力ひずみ-関係

平面応力状態が近似的に成立するものとし、 x , y 方向の直応力 σ_{xx} , σ_{yy} , および x y 面内のせん断応力 σ_{xy} のみを考える。弾塑性状態での増分形で表された応力 $\{\Delta \sigma\}$ とひずみ $\{\Delta \varepsilon\}$ の関係は、弾性域ではHookeの法則に、塑性域ではPrandtl-Reuss式に従うものとする次式で与えられる。ここに、 $\{\Delta \sigma\} = \{\Delta \sigma_{xx} \Delta \sigma_{yy} \Delta \sigma_{xy}\}^T$ である。

$$\{\Delta \sigma\} = \frac{E}{1-\nu^2} [a_{ij}] \{\Delta \varepsilon\} = \frac{E}{1-\nu^2} [a_{ij}] (\{\Delta \mathbf{e}\} + z \{\Delta \beta\}) \quad (7)$$

$$\text{ここに、} [a_{ij}] = \begin{Bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{Bmatrix} - \frac{1}{d} \begin{Bmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{Bmatrix} \quad (8)$$

$a = \bar{\sigma}_{xx} + \nu \bar{\sigma}_{yy}$, $b = \bar{\sigma}_{yy} + \nu \bar{\sigma}_{xx}$, $c = (1-\nu) \bar{\sigma}_{xy}$, $d = a \bar{\sigma}_{xx} + b \bar{\sigma}_{yy} + 2c \bar{\sigma}_{xy}$, $\bar{\sigma}_{xx}$, $\bar{\sigma}_{yy}$ および $\bar{\sigma}_{xy}$ は偏差応力で、次式で与えられる。

$$\bar{\sigma}_{xx} = \frac{1}{3} (2\sigma_{xx} - \sigma_{yy}), \quad \bar{\sigma}_{yy} = \frac{1}{3} (2\sigma_{yy} - \sigma_{xx}), \quad \bar{\sigma}_{xy} = \sigma_{xy} \quad (9)$$

(3) 弾塑性状態でのモーメント-変形関係

式(7)を用いて、モーメント $\{\Delta \mathbf{M}\} = \{\Delta M_x \Delta M_y \Delta M_{xy}\}^T$ と応力 $\{\Delta \sigma\}$ の関係は次式で表される。

$$\{\Delta \mathbf{M}\} = \int_A z \{\Delta \sigma\} dA \quad (10)$$

ΔM_x を例にとると、

$$\begin{aligned} \Delta M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \Delta \sigma_{xx} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \{ z (a_{11} \Delta e_x + a_{12} \Delta e_y + a_{13} \Delta e_{xy}) + z^2 (a_{11} \Delta \beta_x + a_{12} \Delta \beta_y + a_{13} \Delta \beta_{xy}) \} dz \\ &= Fh (\bar{\Phi}_{11} \Delta e_x + \bar{\Phi}_{12} \Delta e_y + \bar{\Phi}_{13} \Delta e_{xy}) + D (\bar{\Phi}_{11} \Delta \beta_x + \bar{\Phi}_{12} \Delta \beta_y + \bar{\Phi}_{13} \Delta \beta_{xy}) \end{aligned} \quad (11)$$

ここに、

$$\bar{\Phi}_{ij} = \frac{1}{h^2} \int_{-h/2}^{h/2} a_{ij} z dz \quad (12)$$

$$\bar{\Phi}_{ij} = \frac{12}{h^3} \int_{-h/2}^{h/2} a_{ij} z^2 dz \quad (13)$$

$F = \frac{Eh}{1-\nu^2}$: 伸び剛度, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$: シェルの曲げ剛度, E : 弾性係数, ν : ポアソン比, G : せん断弾性係数,

ΔM_y および ΔM_{xy} についても同様に求められ、それらをまとめて記すと次のように書き表せる。

$$\{\Delta \mathbf{M}\} = Fh[\bar{\Phi}_{1j}] \{\Delta \mathbf{e}\} + D[\bar{\Phi}_{1j}] \{\Delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (14)$$

$$\{\Delta \boldsymbol{\beta}\} = \frac{1}{D}[\bar{\Psi}_{1j}] \{\Delta \mathbf{M}\} - \frac{Fh}{D}[\bar{\Psi}_{1j}] \{\Delta \mathbf{e}\} \quad (15)$$

$$\text{ここに,} \quad [\bar{\Psi}_{1j}] = [\bar{\Phi}_{1j}]^{-1} \quad (16) \quad [\bar{\Psi}_{1j}] = [\bar{\Phi}_{1j}][\bar{\Phi}_{1j}]^{-1} \quad (17)$$

(4) 弾塑性状態での面内力-変形関係

面内力 $\{\Delta \mathbf{N}\} = \{\Delta N_x \Delta N_y \Delta N_{xy}\}^T$ と応力 $\{\Delta \boldsymbol{\sigma}\}$ の関係式は次式で表される。

$$\{\Delta \mathbf{N}\} = \int_A \{\Delta \boldsymbol{\sigma}\} dA \quad (18)$$

例えば, ΔN_x を例にとると,

$$\begin{aligned} \Delta N_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \Delta \sigma_{xx} dz = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} \{ (a_{11}\Delta e_x + a_{12}\Delta e_y + a_{13}\Delta e_{xy}) + z(a_{11}\Delta \beta_x + a_{12}\Delta \beta_y + a_{13}\Delta \beta_{xy}) \} dz \\ &= F(\bar{\Phi}_{11}\Delta e_x + \bar{\Phi}_{12}\Delta e_y + \bar{\Phi}_{13}\Delta e_{xy}) + Fh(\bar{\Phi}_{11}\Delta \beta_x + \bar{\Phi}_{12}\Delta \beta_y + \bar{\Phi}_{13}\Delta \beta_{xy}) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\text{ここに,} \quad \bar{\Phi}_{1j} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} a_{1j} dz \quad (20)$$

同様に, 面内力 ΔN_y および ΔN_{xy} と変形の関係も表すことができ, それらをまとめて書くと, 次のように表される。

$$\{\Delta \mathbf{N}\} = F[\bar{\Phi}_{1j}] \{\Delta \mathbf{e}\} + Fh[\bar{\Phi}_{1j}] \{\Delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (21)$$

$$\{\Delta \mathbf{e}\} = \frac{1}{F}[\bar{\Psi}_{1j}] \{\Delta \mathbf{N}\} - h[\bar{\Psi}_{1j}] \{\Delta \boldsymbol{\beta}\} \quad (22)$$

$$\text{ここに,} \quad [\bar{\Psi}_{1j}] = [\bar{\Phi}_{1j}]^{-1} \quad (23) \quad [\bar{\Psi}_{1j}] = [\bar{\Phi}_{1j}][\bar{\Phi}_{1j}]^{-1} \quad (24)$$

(5) 基礎微分方程式

直交座標系において, 曲面板のせん断力を Q_y, Q_x , ねじりモーメントを M_{xy} , 曲げモーメントを M_y, M_x , たわみ角を θ_y, θ_x , たわみを w , 曲面板の中央面上の x, y 方向の面内変位成分を u, v , 面内力を N_{xy}, N_y, N_x , および曲面板に作用する x, y, z 方向の外力を q_x, q_y, q_z と定義する。曲面の x, y 方向の曲率を k_x, k_y , ねじれ率を k_{xy} とし, これらがあまり小さくなく, 投影形状が矩形的の曲面板を考えると, 有限変形の影響を考慮した変厚偏平シェルの非弾性曲げの基礎微分方程式は次式のように表せる。ここに, 式中の $\Delta N_c, \Delta w_{xc}, \Delta w_{yc}, \Delta w_{xyc}$ は各荷重増分段階で収束計算するものである。

$$\frac{\partial \Delta N_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial y} - k_x \Delta Q_x + \Delta q_x = 0 \quad (25-1)$$

$$\frac{\partial \Delta N_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta N_{xy}}{\partial x} - k_y \Delta Q_y + \Delta q_y = 0 \quad (25-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta Q_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta Q_y}{\partial y} + \left(k_x + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Delta N_x + \left(k_y + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \Delta N_y + \left(2k_{xy} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \Delta N_{xy} \\ + N_x \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} + \Delta N_c + \Delta q_x = 0 \end{aligned} \quad (25-3)$$

$$\frac{\partial \Delta M_x}{\partial x} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial y} - \Delta Q_x = 0 \quad (25-4)$$

$$\frac{\partial \Delta M_y}{\partial y} + \frac{\partial \Delta M_{xy}}{\partial x} - \Delta Q_y = 0 \quad (25-5)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\psi}_{11} \Delta M_x + \bar{\psi}_{12} \Delta M_y + \bar{\psi}_{13} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\bar{\psi}_{11} \Delta e_x + \bar{\psi}_{12} \Delta e_y + \bar{\psi}_{13} \Delta e_{xy}) \quad (25-6)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial y} = \frac{1}{D} (\bar{\psi}_{21} \Delta M_x + \bar{\psi}_{22} \Delta M_y + \bar{\psi}_{23} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\bar{\psi}_{21} \Delta e_x + \bar{\psi}_{22} \Delta e_y + \bar{\psi}_{23} \Delta e_{xy}) \quad (25-7)$$

$$\frac{\partial \Delta \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \Delta \theta_y}{\partial x} = \frac{1}{D} (\bar{\psi}_{31} \Delta M_x + \bar{\psi}_{32} \Delta M_y + \bar{\psi}_{33} \Delta M_{xy}) - \frac{Fh}{D} (\bar{\psi}_{31} \Delta e_x + \bar{\psi}_{32} \Delta e_y + \bar{\psi}_{33} \Delta e_{xy}) \quad (25-8)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta \theta_x = \frac{1}{\kappa G h} \Delta Q_x \quad (25-9)$$

$$\frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta \theta_y = \frac{1}{\kappa G h} \Delta Q_y \quad (25-10)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial x} - k_x \Delta w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial x} + \Delta w_{xc} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{11} \Delta N_x + \bar{\psi}_{12} \Delta N_y + \bar{\psi}_{13} \Delta N_{xy}) - h (\bar{\psi}_{11} \Delta \beta_x + \bar{\psi}_{12} \Delta \beta_y + \bar{\psi}_{13} \Delta \beta_{xy}) \quad (25-11)$$

$$\frac{\partial \Delta v}{\partial y} - k_y \Delta w + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \Delta w_{yc} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{21} \Delta N_x + \bar{\psi}_{22} \Delta N_y + \bar{\psi}_{23} \Delta N_{xy}) - h (\bar{\psi}_{21} \Delta \beta_x + \bar{\psi}_{22} \Delta \beta_y + \bar{\psi}_{23} \Delta \beta_{xy}) \quad (25-12)$$

$$\frac{\partial \Delta u}{\partial y} + \frac{\partial \Delta v}{\partial x} - 2k_{xy} \Delta w + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y} + \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \Delta w_{xyc} = \frac{1}{F} (\bar{\psi}_{31} \Delta N_x + \bar{\psi}_{32} \Delta N_y + \bar{\psi}_{33} \Delta N_{xy}) - h (\bar{\psi}_{31} \Delta \beta_x + \bar{\psi}_{32} \Delta \beta_y + \bar{\psi}_{33} \Delta \beta_{xy}) \quad (25-13)$$

$$\Delta N_c = \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x^2} \Delta N_x + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial y^2} \Delta N_y + \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial x \partial y} \Delta N_{xy}$$

$$\Delta w_{xc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial x} \right)^2, \quad \Delta w_{yc} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Delta w}{\partial y} \right)^2, \quad \Delta w_{xyc} = \frac{\partial \Delta w}{\partial x} \frac{\partial \Delta w}{\partial y}$$

3. 基礎微分方程式の解析的近似解

式(25-1)～(25-13)の偏微分方程式を次の無次元量：

$$\{X_1, X_2\} = \{Q_y, Q_x\} a^2 / [D_0(1-\nu^2)], \quad \{X_3, X_4, X_5\} = \{M_{xy}, M_y, M_x\} a / [D_0(1-\nu^2)], \quad \{X_6, X_7\} = \{\theta_y, \theta_x\}, \quad (26)$$

$$\{X_8, X_9, X_{10}\} = \{w, v, u\} / a, \quad \{X_{11}, X_{12}, X_{13}\} = \{N_{xy}, N_y, N_x\} a^2 / [D_0(1-\nu^2)], \quad \eta = x/a, \quad \zeta = y/b.$$

を用いて無次元化すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \Delta X_{11}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial \Delta X_{13}}{\partial \eta} - \bar{k}_x \Delta X_2 + \Delta q_x = 0 \quad (27-1)$$

$$\frac{\partial \Delta X_{12}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial \Delta X_{11}}{\partial \eta} - \bar{k}_y \Delta X_1 + \Delta q_y = 0 \quad (27-2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta X_1}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial \Delta X_2}{\partial \eta} - I [\bar{\psi}_{11} X_{13} + \bar{\psi}_{21} X_{12} + \bar{\psi}_{31} X_{11}] \Delta X_5 - I [\bar{\psi}_{12} X_{13} + \bar{\psi}_{22} X_{12} + \bar{\psi}_{32} X_{11}] \Delta X_4 - I [\bar{\psi}_{13} X_{13} + \bar{\psi}_{23} X_{12} + \bar{\psi}_{33} X_{11}] \Delta X_3 \\ + (\bar{k}_x + \bar{w}_x) \Delta X_{13} + (\bar{k}_y + \bar{w}_y) \Delta X_{12} + 2(\bar{k}_{xy} + \bar{w}_{xy}) \Delta X_{11} + \Delta q_z + \Delta \bar{N}_c + \Delta \bar{R} = 0 \end{aligned} \quad (27-3)$$

$$\frac{\partial \Delta X_3}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial \Delta X_5}{\partial \eta} - \mu \Delta X_2 = 0 \quad (27-4)$$

$$\frac{\partial \Delta X_4}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial \Delta X_3}{\partial \eta} - \mu \Delta X_1 = 0 \quad (27-5)$$

$$\mu \frac{\partial \Delta X_7}{\partial \eta} = I [\bar{\psi}_{11} \Delta X_5 + \bar{\psi}_{12} \Delta X_4 + \bar{\psi}_{13} \Delta X_3] - R_1 \quad (27-6)$$

$$\frac{\partial \Delta X_6}{\partial \eta} = I [\bar{\Psi}_{21} \Delta X_6 + \bar{\Psi}_{22} \Delta X_4 + \bar{\Psi}_{23} \Delta X_3] - R_2 \quad (27-7)$$

$$\frac{\partial \Delta X_7}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial \Delta X_6}{\partial \eta} = I [\bar{\Psi}_{31} \Delta X_6 + \bar{\Psi}_{32} \Delta X_4 + \bar{\Psi}_{33} \Delta X_3] - R_3 \quad (27-8)$$

$$\frac{\partial \Delta X_8}{\partial \eta} + \Delta X_7 = K \Delta X_2 \quad (27-9)$$

$$\frac{\partial \Delta X_8}{\partial \zeta} + \mu \Delta X_6 = \mu K \Delta X_1 \quad (27-10)$$

$$\mu \frac{\partial \Delta X_{10}}{\partial \eta} = L_1 [\bar{\Psi}_{11} \Delta X_{13} + \bar{\Psi}_{12} \Delta X_{12} + \bar{\Psi}_{13} \Delta X_{11}] - \mu K \Delta X_2 (K X_2 - X_7) - \mu \Delta X_7 (X_7 - K X_2) + \bar{K}_{xy} \Delta X_8 - S_2 \quad (27-11)$$

$$\frac{\partial \Delta X_9}{\partial \eta} = L_1 [\bar{\Psi}_{21} \Delta X_{13} + \bar{\Psi}_{22} \Delta X_{12} + \bar{\Psi}_{23} \Delta X_{11}] - \mu K \Delta X_1 (K X_1 - X_6) - \mu \Delta X_6 (X_6 - K X_1) + \bar{K}_{xy} \Delta X_8 - S_2 \quad (27-12)$$

$$\frac{\partial \Delta X_{10}}{\partial \zeta} + \mu \frac{\partial \Delta X_9}{\partial \eta} = L_1 [\bar{\Psi}_{31} \Delta X_{13} + \bar{\Psi}_{32} \Delta X_{12} + \bar{\Psi}_{33} \Delta X_{11}] - \mu K \Delta X_1 (K X_2 - X_7) - \mu \Delta X_6 (X_7 - K X_2) - \mu K \Delta X_2 (K X_1 - X_6) - \mu \Delta X_7 (X_6 - K X_1) + 2 \bar{K}_{xy} \Delta X_8 - S_3 \quad (27-13)$$

ここに,

$$\bar{W}_x = b \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \bar{W}_y = b \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \bar{W}_{xy} = b \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}, \Delta R = R_1 X_{13} + R_2 X_{12} + R_3 X_{11}, R_1 = \mu \frac{12a}{h} [\bar{\Psi}_{11} \Delta c_x + \bar{\Psi}_{12} \Delta c_y + \bar{\Psi}_{13} \Delta c_{xy}]$$

$$S_1 = \mu \left[h (\bar{\Psi}_{11} \Delta \beta_x + \bar{\Psi}_{12} \Delta \beta_y + \bar{\Psi}_{13} \Delta \beta_{xy}) + \Delta W_{xc} \right], S_2 = \mu \left[h (\bar{\Psi}_{21} \Delta \beta_x + \bar{\Psi}_{22} \Delta \beta_y + \bar{\Psi}_{23} \Delta \beta_{xy}) + \Delta W_{yc} \right], S_3 = \mu \left[h (\bar{\Psi}_{31} \Delta \beta_x + \bar{\Psi}_{32} \Delta \beta_y + \bar{\Psi}_{33} \Delta \beta_{xy}) + \Delta W_{xyc} \right]$$

a, b : 偏平シェルの矩形Baseの辺長, $\mu = b/a$, $I = I(x, y) = D_0/D(x, y)$, $L_1 = (\mu/12) (h_0/a)^2 [h_0/h(x, y)]$, $K = [(1+\nu)/5] (h_0/a)^2 [h_0/h(x, y)]$, $\{\Delta \bar{q}_x, \Delta \bar{q}_y, \Delta \bar{q}_z\} = \{\Delta q_x/q_0, \Delta q_y/q_0, \Delta q_z/q_0\} \mu a^3 q_0 / [D_0(1-\nu^2)]$, h_0 : 基準シェルの厚, $\Delta \bar{N}_c = \mu a^3 N_0 / [D_0(1-\nu^2)] (\Delta N_c/N_0)$, D_0 : 基準曲げ剛度, N_0 : 基準面内力, q_0 : 基準荷重強度.

文献⁷⁾⁸⁾⁹⁾と同様に偏平シェルの無次元化された基礎式(27-1)~(27-13)を積分方程式に変換後, 積分方程式を数値積分することにより, 偏平シェルの矩形baseの縦横の等分割線の交点に関する離散解 ΔX_{Pij} は次式となる.

$$\Delta X_{Pij} = \sum_t \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{Pt} [\Delta X_{tk0} - \Delta X_{tkj} (1 - \delta_{ki})] + \sum_{\alpha=0}^j \beta_{j\alpha} B_{Pt} [\Delta X_{t0\alpha} - \Delta X_{t1\alpha} (1 - \delta_{\alpha j})] \right. \\ \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} C_{Pt} \Delta X_{t\alpha k} (1 - \delta_{ki} \delta_{\alpha j}) \right\} - \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} [\gamma_{P3} (\Delta R + \Delta N_c + \Delta q_z) + \gamma_{P2} \Delta q_y + \gamma_{P1} \Delta q_x] \\ - \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} (\gamma_{P6} R_{1k\alpha} + \gamma_{P7} R_{2k\alpha} + \gamma_{P8} R_{3k\alpha}) - \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} (\gamma_{P11} S_{1k\alpha} + \gamma_{P12} S_{2k\alpha} + \gamma_{P13} S_{3k\alpha}) \quad (28)$$

ここに, γ_{Pt} , A_{Pt} , B_{Pt} , C_{Pt} , $R_{pk\alpha}$ ($p=1-13$, $t=1-13$) : APPENDIX [I]参照.

式(28)で表された任意点(i, j)における諸量 ΔX_{Pij} は, 境界边上の諸量 ΔX_{rfo} , ΔX_{soe} のみを用いて表すことができ, 次式(29)のようになる. 式(29)を用いて偏平シェル構造の弾塑性有限変形解析を行うことができる. 数値計算例では4辺単純支持(移動不可)を主に取り扱っている, その場合の積分定数および境界条件を図1に示す. 図(a)は全体部分を, 図(b)は対称性を考慮して1/4部分を対象としたものである. 他の境界条件の場合も同様に行うことができる(文献[9]参照).

$$\Delta X_{Pij} = \sum_{d=1}^{10} \left\{ \sum_{f=0}^i a_{Pijfd} \Delta X_{rfo} + \sum_{\alpha=0}^j b_{Pij\alpha d} \Delta X_{soe} \right\} + \Delta q_{Pij} \quad (29)$$

a_{Pijfd} , $b_{Pij\alpha d}$, Δq_{Pij} : APPENDIX [II]参照.

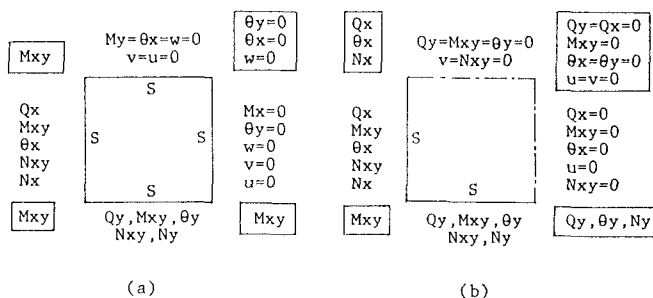


図1 積分定数と境界条件 (周辺単純支持 (移動不可))

4. 数値計算例

数値計算例として本論文で用いた偏平シェルは、降伏応力 $\sigma_F = 2800 \text{ kg/cm}^2$ 、弾性係数 $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ 、ポアソン比 $\nu = 0.3$ 、偏平シェルの矩形Baseの辺長 $a = 10 \text{ m}$ 、ライズ高 $H = 0.25 \text{ m}$ で、等分布荷重を満載するものとする。また、シェル厚は表1に示すように、 $h = 0.4 \text{ m}$ 、 0.32 m 、 0.2 m の3種類とし、それぞれS1, S2, S3と略称することとする。

表1 偏平シェルの断面形状

	S1	S2	S3
H/h	0.625	0.781	1.25
h (m)	0.40	0.32	0.20

数値解析においては、偏平シェルの曲面形状をEPシェル、円筒シェルおよびHPシェルの3種類とし、上記シェル厚の3パラメータについて解析を行った。偏平シェルは対称性を考慮して1/4部分を対象とし、横縦方向の分割数 m, n を4とし、板厚方向の分割数 n_z を20として解析した。複合非線形挙動を追跡するために、微小変位増分により計算を進め、変位の増分量は、中央点のたわみが 0.003 m 程度としている。また、各荷重ステップにおいては、収束計算を行い、相対たわみの誤差を 10^{-4} とし、塑性域の判定は図心点の応力により判定を行った。なお、解析結果に用いた荷重パラメータ $\bar{q}$ および変位パラメータ W_{av} は、それぞれ次式で表される量である。

$$\bar{q} = q \frac{a^4}{64 E h^2 H^2} \quad (30)$$

$$W_{av} = \frac{1}{ab} \int_0^a \int_0^b \frac{w}{h} dx dy \quad (31)$$

(1) 偏平EPシェル

図2(a)に示すような偏平EPシェルの荷重-変位曲線を同図(b)に示す。点線は幾何学的非線形性のみを考慮した場合の解析結果で、実線は材料非線形性も考慮した場合の複合非線形解析結果である。図中×印はLeicesterによる級数解¹⁰⁾である。また●印は初期降伏荷重である。点線で表された本解析法による幾何学的非線形解析結果は、Leicesterの解とほぼ一致しており、シェル厚が最も薄いS3においては飛び移り現象が生じ、snap-throughおよびsnap-backの荷重値もLeicesterの値とほぼ等しい値が得られた。複合非線形解析によって得られた結果をまとめると以下になる。シェル厚にかかわらず、初期降伏後は塑性変形が進行し極限荷重に達する。極限荷重に達すると耐荷力は急激に減少し、終局状態へと至る。また、極限荷重は幾何学的非線形解析におけるsnap-through値以下であり、本解析で用いた程度のシェル厚の場合は、飛び移り座屈が生じる前に、塑性変形によって耐力を失うことがわかる。

図2(b)の縦軸はシェル厚等によって無次元化した荷重パラメータ $\bar{q}$ を用いている。したがって、シェル厚の違いによるEPシェルの弾塑性挙動を明らかにするため、荷重 q を縦軸に用いた荷重-変位曲線を図2(c)に示す。初期降伏荷重はシェル厚が薄い方から順に現れ、S1とS2の場合はあまりたわみが生じることな

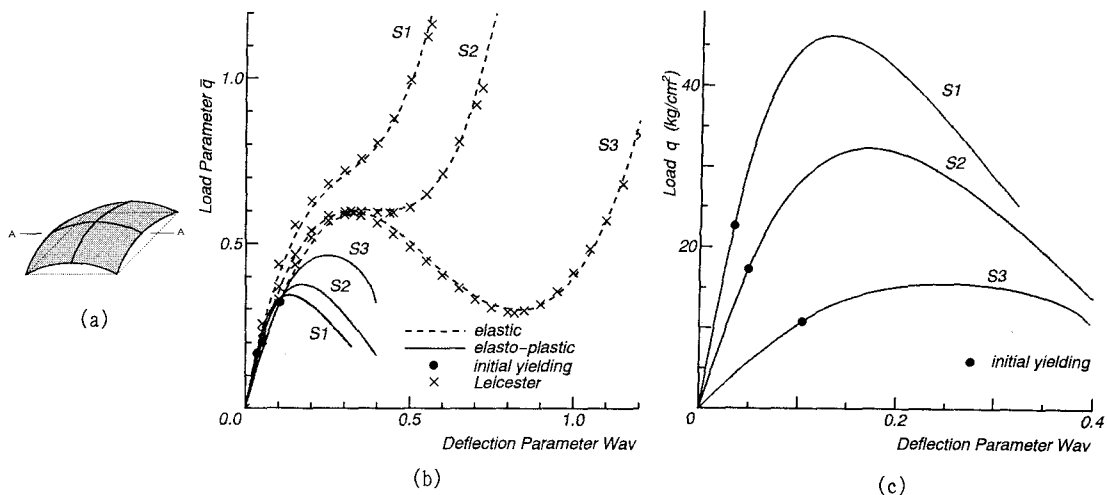


図2 偏平EPシェルの複合非線形解析結果

く初期降伏し, snap-throughのような荷重-変位曲線を示す. シェル厚がS1の半分のS3の場合は, 比較的大きくたわんだ後に初期降伏し, 初期降伏後は耐力はあまり増加せず, たわみが大きくなる.

図3にはS1の場合の代表的な荷重段階での塑性域の進行図を示す. 同図(a)はシェルの上面, 図(c)はシェルの下面, 図(b)は図2(a)のA-A断面における塑性域の分布を示している. 塑性域はシェル上面の中央部から放射状に拡大していき, 上面はほぼ全域にわたって塑性化する. シェル下面では隅角部より中央部に向かって塑性域が進行し, 荷重の増加に伴って中央部に塑性域が現れる.

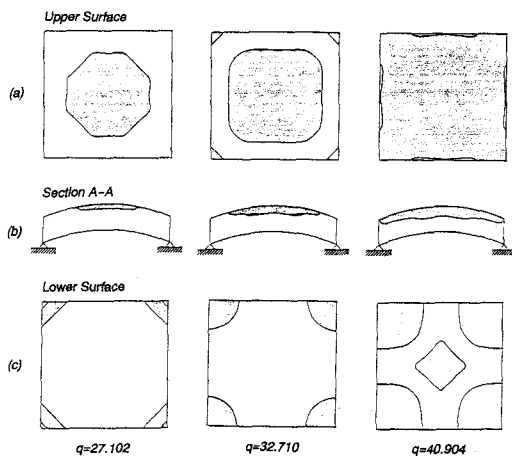


図3 塑性域の進行図 (EP_Shell1)

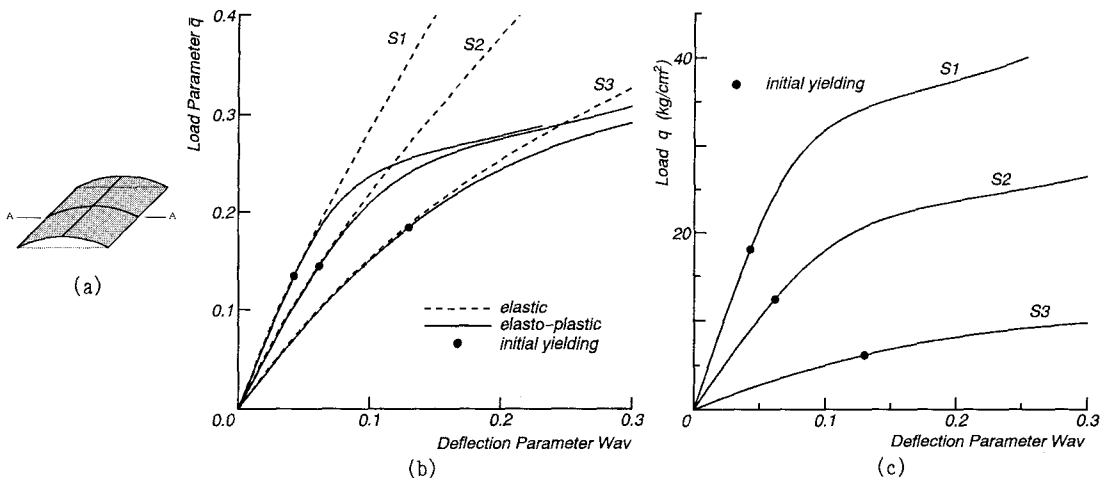


図4 偏平円筒シェルの複合非線形解析結果

(2) 偏平円筒シェル

次に図4 (a)に示すような偏平円筒シェルに等分布荷重が満載される場合の複合非線形解析結果の荷重－変位曲線を図4 (b)に示す。点線は本解析法による幾何学的非線形解析結果で、実線は複合非線形解析結果である。偏平円筒シェルにおいてはシェル厚が最も薄いS3の場合でも、この境界条件および荷重条件においては飛び移り現象は生じなかった。また複合非線形解析結果においては、初期降伏後、荷重の増加とともにたわみは急激に増加し、飛び移り現象は現れない。

図4 (c)には縦軸に荷重 q をとった場合の荷重－変位曲線を示す。 $h=0.2\text{m}$ のS3に比べて、シェル厚が2倍のS1は4倍以上の耐荷力を有することがわかる。

図5には図3と同様な塑性域の進行図を示す。円筒シェルの場合もシェル上面の中央部から降伏し始め、上面はほぼ全域にわたり塑性化してしまう。

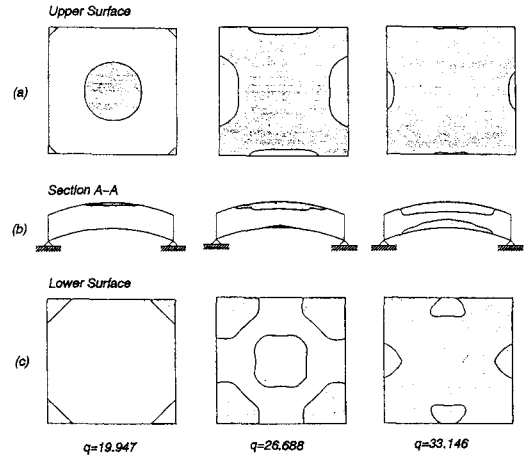


図5 塑性域の進行図 (円筒_Shell)

(3) 偏平HPシェル

次に図6 (a)に示すような偏平HPシェルに等分布荷重が満載される場合の複合非線形解析を行った。図6 (b)に荷重－変位曲線を示す。点線は本解析法による幾何学的非線形解析結果であり、実線は複合非線形解析結果である。偏平HPシェルにおいても偏平円筒シェルの場合と同様に、この境界条件および荷重条件においては飛び移り現象は生じない。

図6 (c)には縦軸に荷重 q をとった場合の荷重－変位曲線を示す。HPシェルの場合には円筒シェルと同じような挙動を示すが、円筒シェルよりも大きな耐力を示すことがわかる。

図7には図3と同様な塑性域の進行図を示す。EPおよび円筒シェルの場合と異なり、シェル下面より塑性域が進行していることがわかる。

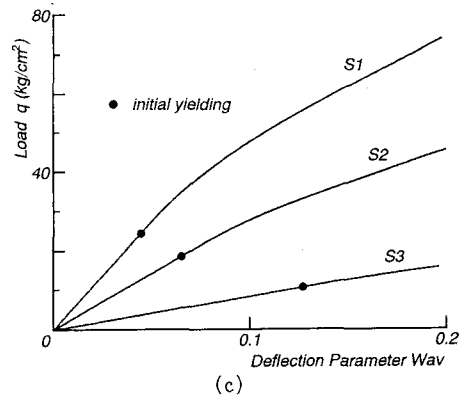
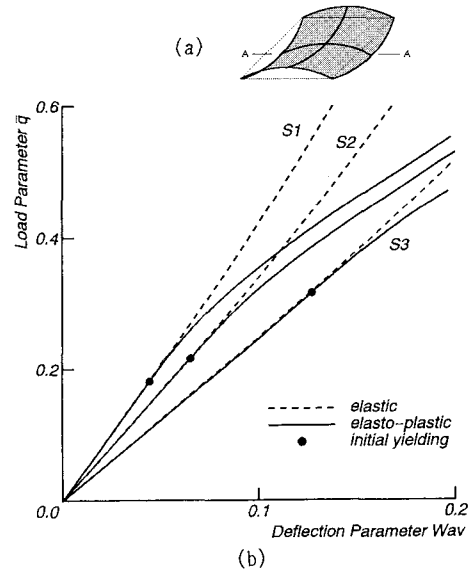


図6 偏平HPシェルの複合非線形解析結果

(4) 種々の形状をした偏平シェルの複合非線形特性

以上、2曲率面をもつEPシェル、HPシェル、および、1曲率面をもつ円筒シェルについて数値解析を行った。それらの荷重－変位曲線の結果をシェル厚 $h=0.4\text{m}$ の場合についてまとめたものが図8である。図8には、支持条件を移動可能とした場合の解析結果も点線で図示している。移動不可の場合の解析結果は、偏平シェルの形状によりその弾塑性挙動が大きく異なり、EPシェルの場合には、圧縮力が卓越するので塑

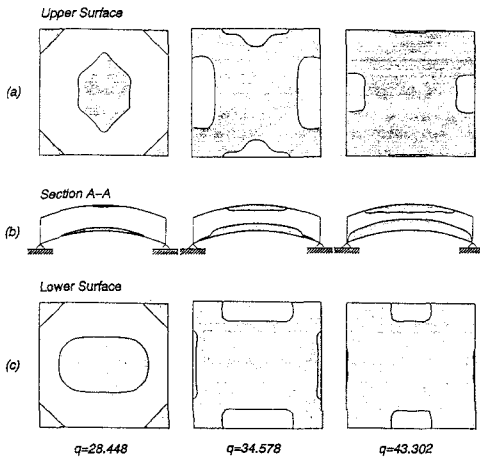


図7 塑性域の進行図 (HP_Shell)

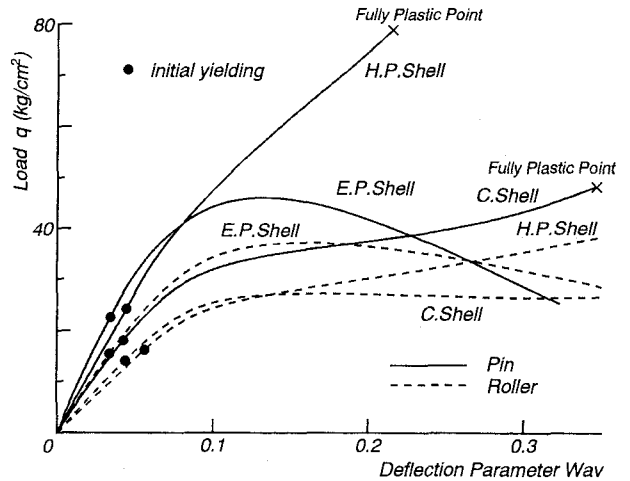


図8 種々の偏平シェルの複合非線形解析結果

性域が進行していくが、円筒、H P シェルの場合ではさほど面内力は卓越しておらず、塑性域は全断面塑性となり終局状態となる。また、H P シェルの場合には、面内力 N_x 、 N_y がそれぞれ圧縮力と引張力となり、たわみはあまり大きくならずに終局状態へと至っている。

本論文の数値解析例では、等方性の材料からなる周辺支持（移動不可）の偏平シェルを主に取り扱った。等方性材料からなる偏平シェルの場合には、周辺支持を移動不可とすることにより、移動可能な偏平シェル¹¹⁾（文献9）で報告）と比較するとH P シェルといえども高い剛性を有することがわかる。

このように支持条件の差異、すなわち極く小さな支承線の変位によって力学的特性が大きく変化するので、実構造物との対応で考えるとき、これを着目した計算、あるいは、これに着目した構造処理をする必要がある。また、有効幅を十分に考慮した計算も必要となってくるものと考えられる。

5. あとがき

本論文は、偏平シェルの弾塑性有限変形解析のための一離散化数値解析法を提示したものである。数値計算においては、応力-ひずみ関係は、弾性域ではHookeの法則に、塑性域ではPrandtl-Reuss式に従うものとし、降伏判定にはvon-Misesの降伏条件式を用いた。また厚さ方向には断面を細分割して解析した。

本解析法は、積分方程式の数値解法であるため、境界要素法と同様に、最終的に解くべきマトリックスの次元を低減できる。また、(29)式の係数 a_{pijfd} 、 b_{pijfd} 、 Δq_{pij} の計算に本解析法では時間が主にかかるが、これらの係数は独立に計算できるため、トランスピューターなどの並列計算機を用いるとかなり計算時間を低減できるものと思われる。

2曲率面をもつE P およびH P シェル、1曲率面をもつ円筒シェルに対して、弾塑性有限変形解析を行った結果、移動可能な周辺支持の偏平シェルと比較するとH P シェルといえども高い剛性を有することがわかった。したがって、実構造物との対応で考えるとき、支持条件の差異、すなわち極く小さな支承線の変位によって力学的特性が大きく変化するので、これを着目した計算、あるいは、これに着目した構造処理をする必要がある。

本論文では、移動不可なる周辺単純支持の境界条件について主に数値解析を行ったが、他の境界条件の場合についても境界条件を変更するだけで同様に解析することができる。しかしながら、本論文では特定の荷重条件を取り扱っているため、初期不整の影響によるシェル構造物特有の鋭い変化は示されていない。今後

は、種々の荷重条件および境界条件をもつ偏平シェルに対して初期不整をも考慮した座屈安定性に対する弾塑性有限変位解析を行う予定である。

謝 辞

本研究は文部省科学研究費・奨励研究（Ａ）（平成４年度）の補助を受けたことを付記し、ここに謝意を表します。また、研究を遂行するにあたり、新日本技研（株）佐々木道夫博士およびショーボンド建設（株）吉田弘様より数々の御助言を賜りました。厚く御礼申し上げます。

Appendix [1]

$$\begin{aligned}
 A_{P1} &= Y_{P3}, & B_{P1} &= 0, & C_{P1k\alpha} &= Y_{P3}\bar{k}_y + \mu(Y_{P5} + K_{k\alpha}Y_{P10}) - \mu Y_{P12}K_{k\alpha}(K_{k\alpha}\lambda_{1k\alpha} - \lambda_{6k\alpha}) - \mu Y_{P13}K_{k\alpha}(K_{k\alpha}\lambda_{2k\alpha} - \lambda_{7k\alpha}), \\
 A_{P2} &= 0, & B_{P2} &= \mu Y_{P3}, & C_{P2k\alpha} &= Y_{P1}\bar{k}_x + \mu Y_{P4} + K_{k\alpha}Y_{P9} - \mu Y_{P11}K_{k\alpha}(K_{k\alpha}\lambda_{2k\alpha} - \lambda_{7k\alpha}) - \mu Y_{P13}K_{k\alpha}(K_{k\alpha}\lambda_{1k\alpha} - \lambda_{6k\alpha}), \\
 A_{P3} &= Y_{P4}, & B_{P3} &= \mu Y_{P5}, & C_{P3k\alpha} &= I_{k\alpha}[(Y_{P6} + \lambda_{13k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{13k\alpha} + (Y_{P7} + \lambda_{12k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{23k\alpha} + (Y_{P8} + \lambda_{11k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{33k\alpha}], \\
 A_{P4} &= Y_{P5}, & B_{P4} &= 0, & C_{P4k\alpha} &= I_{k\alpha}[(Y_{P6} + \lambda_{13k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{12k\alpha} + (Y_{P7} + \lambda_{12k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{22k\alpha} + (Y_{P8} + \lambda_{11k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{32k\alpha}], \\
 A_{P5} &= 0, & B_{P5} &= \mu Y_{P4}, & C_{P5k\alpha} &= I_{k\alpha}[(Y_{P6} + \lambda_{13k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{11k\alpha} + (Y_{P7} + \lambda_{12k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{21k\alpha} + (Y_{P8} + \lambda_{11k\alpha}Y_{P3})\bar{\psi}_{31k\alpha}], \\
 A_{P6} &= Y_{P7}, & B_{P6} &= \mu Y_{P8}, & C_{P6k\alpha} &= -\mu Y_{P10} + \mu Y_{P12}(K_{k\alpha}\lambda_{1k\alpha} - \lambda_{6k\alpha}) + \mu Y_{P13}(K_{k\alpha}\lambda_{2k\alpha} - \lambda_{7k\alpha}), \\
 A_{P7} &= Y_{P8}, & B_{P7} &= \mu Y_{P6}, & C_{P7k\alpha} &= -\mu Y_{P9} + \mu Y_{P11}(K_{k\alpha}\lambda_{2k\alpha} - \lambda_{7k\alpha}) + \mu Y_{P13}(K_{k\alpha}\lambda_{1k\alpha} - \lambda_{6k\alpha}), \\
 A_{P8} &= Y_{P10}, & B_{P8} &= Y_{P9}, & C_{P8k\alpha} &= Y_{P11}k_x + Y_{P12}k_y + 2Y_{P13}k_{xy}, \\
 A_{P9} &= Y_{P12}, & B_{P9} &= \mu Y_{P13}, & C_{P9k\alpha} &= 0, \\
 A_{P10} &= Y_{P13}, & B_{P10} &= \mu Y_{P11}, & C_{P10k\alpha} &= 0, \\
 A_{P11} &= Y_{P1}, & B_{P11} &= \mu Y_{P2}, & C_{P11k\alpha} &= L_{1k\alpha}[Y_{P11}\bar{\psi}_{13k\alpha} + Y_{P12}\bar{\psi}_{23k\alpha} + Y_{P13}\bar{\psi}_{33k\alpha}] - Y_{P3}(2\bar{k}_{xy} + \bar{w}_{xy}), \\
 A_{P12} &= Y_{P2}, & B_{P12} &= 0, & C_{P12k\alpha} &= L_{1k\alpha}[Y_{P11}\bar{\psi}_{12k\alpha} + Y_{P12}\bar{\psi}_{22k\alpha} + Y_{P13}\bar{\psi}_{32k\alpha}] - Y_{P3}(2k_y + \bar{w}_y), \\
 A_{P13} &= 0, & B_{P13} &= \mu Y_{P1}, & C_{P13k\alpha} &= L_{1k\alpha}[Y_{P11}\bar{\psi}_{11k\alpha} + Y_{P12}\bar{\psi}_{21k\alpha} + Y_{P13}\bar{\psi}_{31k\alpha}] - Y_{P3}(2\bar{k}_x + \bar{w}_x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \rho_{11} &= -\beta_{13}k_x, & \rho_{1,11} &= \beta_{11}, & \rho_{1,13} &= \mu\beta_{13}, & \rho_{21} &= -\beta_{13}k_y, & \rho_{2,11} &= \mu\beta_{13}, & \rho_{2,12} &= \beta_{11}, & \rho_{31} &= \beta_{11}, & \rho_{32} &= \mu\beta_{13}, \\
 \rho_{33} &= -\beta_{13}l_{13}(\bar{\psi}_{1313}\lambda_{1313} + \bar{\psi}_{2313}\lambda_{1213} + \bar{\psi}_{3313}\lambda_{1113}), & \rho_{34} &= -\beta_{13}l_{13}(\bar{\psi}_{1213}\lambda_{1313} + \bar{\psi}_{2213}\lambda_{1213} + \bar{\psi}_{3213}\lambda_{1113}) \\
 \rho_{35} &= -\beta_{13}l_{13}(\bar{\psi}_{1213}\lambda_{1313} + \bar{\psi}_{2213}\lambda_{1213} + \bar{\psi}_{3213}\lambda_{1113}), & \rho_{3,11} &= \beta_{13}(2\bar{k}_{xy} - \bar{w}_{xy}), & \rho_{3,12} &= \beta_{13}(k_y - \bar{w}_y), \\
 \rho_{3,13} &= \beta_{13}(\bar{k}_x - \bar{w}_x), & \rho_{42} &= -\mu\beta_{13}, & \rho_{43} &= \beta_{11}, & \rho_{24} &= \mu\beta_{13}, & \rho_{51} &= -\mu\beta_{13}, & \rho_{53} &= \mu\beta_{13}, & \rho_{54} &= \beta_{11}, & \rho_{63} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{1313}, \\
 \rho_{64} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{1213}, & \rho_{65} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{1113}, & \rho_{67} &= -\mu\beta_{13}, & \rho_{73} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{2313}, & \rho_{74} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{2213}, \\
 \rho_{75} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{2113}, & \rho_{76} &= \beta_{11}, & \rho_{83} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{3313}, & \rho_{84} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{3213}, & \rho_{85} &= -\beta_{13}l_{13}\bar{\psi}_{3113}, & \rho_{86} &= \mu\beta_{13}, \\
 \rho_{87} &= \beta_{11}, & \rho_{92} &= -\beta_{13}K_{13}, & \rho_{97} &= \beta_{13}, & \rho_{98} &= \beta_{13}, & \rho_{10,1} &= -\mu\beta_{13}K_{13}, & \rho_{10,6} &= \mu\beta_{13}, & \rho_{10,8} &= \beta_{11}, \\
 \rho_{11,2} &= \mu\beta_{13}K_{13}(K_{13}\lambda_{213} - \lambda_{713}), & \rho_{11,7} &= -\mu\beta_{13}(K_{13}\lambda_{213} - \lambda_{713}), & \rho_{11,8} &= -\beta_{13}k_x, & \rho_{11,10} &= \mu\beta_{13}, \\
 \rho_{11,11} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{1313}, & \rho_{11,12} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{1213}, & \rho_{11,13} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{1113}, \\
 \rho_{12,1} &= \mu\beta_{13}K_{13}(K_{13}\lambda_{113} - \lambda_{613}), & \rho_{12,6} &= -\mu\beta_{13}(K_{13}\lambda_{113} - \lambda_{613}), & \rho_{12,8} &= -\beta_{13}k_x, & \rho_{12,9} &= \beta_{11}, \\
 \rho_{12,11} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{2313}, & \rho_{12,12} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{2213}, & \rho_{12,13} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{2113}, \\
 \rho_{13,1} &= \mu\beta_{13}K_{13}(K_{13}\lambda_{213} - \lambda_{713}), & \rho_{13,2} &= \mu\beta_{13}K_{13}(K_{13}\lambda_{113} - \lambda_{613}), & \rho_{13,6} &= \mu\beta_{13}(K_{13}\lambda_{213} - \lambda_{713}), \\
 \rho_{13,7} &= -\mu\beta_{13}(K_{13}\lambda_{113} - \lambda_{613}), & \rho_{13,8} &= -2\beta_{13}k_{xy}, & \rho_{13,9} &= \mu\beta_{13}, & \rho_{13,10} &= \beta_{11}, \\
 \rho_{13,11} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{3313}, & \rho_{13,12} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{3213}, & \rho_{13,13} &= -\beta_{13}L_{113}\bar{\psi}_{3113}, \\
 \text{その他 } \rho_{tP} &= 0, & \beta_{13} &= \beta_{11}\beta_{13}
 \end{aligned}$$

Appendix [II]

$$\begin{aligned}
 a_{pijfd} &= \sum_{t=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pt} [a_{tkofd} - a_{tkjfd}(1-\delta_{ki})] + \sum_{\alpha=0}^j \beta_{j\alpha} B_{pt} [a_{to\alpha fd} - a_{ti\alpha fd}(1-\delta_{\alpha j})] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} C_{ptk\alpha} a_{tk\alpha fd}(1-\delta_{ki}\delta_{\alpha j}) \right\} \\
 b_{pijgd} &= \sum_{t=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pt} [b_{tkogd} - b_{tkjgd}(1-\delta_{ki})] + \sum_{\alpha=0}^j \beta_{j\alpha} B_{pt} [b_{to\alpha gd} - b_{ti\alpha gd}(1-\delta_{\alpha j})] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} C_{ptk\alpha} b_{tk\alpha gd}(1-\delta_{ki}\delta_{\alpha j}) \right\} \\
 q_{pij} &= \sum_{t=1}^{13} \left\{ \sum_{k=0}^i \beta_{ik} A_{pt} [q_{tko} - q_{tkj}(1-\delta_{ki})] + \sum_{\alpha=0}^j \beta_{j\alpha} B_{pt} [q_{to\alpha} - q_{ti\alpha}(1-\delta_{\alpha j})] \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} C_{ptk\alpha} q_{tk\alpha}(1-\delta_{ki}\delta_{\alpha j}) \right\} - \sum_{k=0}^i \sum_{\alpha=0}^j \beta_{ik} \beta_{j\alpha} A_{p1} \overline{q_{k\alpha}}
 \end{aligned}$$

参考文献

- 1) Bushnell, D. : Buckling of shells - Pitfall for designers, AIAA Journal, Vol.19, pp.1183-1226, 1974.
- 2) Dinis, L.M. and Owen, D.R.J. : Elasto-viscoplastic and elasto-plastic large deformation analysis of thin plates and shells, Int. J. Num. Mech. Engng., Vol.18, pp.591-607, 1982.
- 3) Ramm, E. and Sättele J.M. : Elasto-plastic large deformation shell analysis using degenerated elements, Symp. on Nonlinear Finite Element Analysis of Shells, ASME - Winter Annual Meeting, Washington D.C. November, 1981.
- 4) Ramm, E. : Ultimate load and stability analysis of reinforced concrete shells, IABSE Colloquium DELFT, Computational Mechanics of Concrete Structures - Advances and Applications, pp.145-159, 1987.
- 5) 三上市蔵・矢部幸男：初期たわみを有する弾性円筒パネルの円周方向面内力による非線形挙動，構造工学論文集，Vol.31A, pp.209-222, 1985.
- 6) 三上市蔵・辻省悟：終局強度を超えた円筒パネルの弾塑性有限変位挙動の解析，構造工学論文集，Vol.37A, pp.209-222, 1991.
- 7) Matsuda, H. and Sakiyama, T. : An analysis of elasto-plastic bending of rectangular plate, Proc. of JSCE No.392/1-9, 1988,
- 8) Matsuda, H., Morita, C. and Sakiyama, T. : An approximate method of shallow shells with variable thickness, Computers & Structures, Vol.42, No.6, pp.989-996, 1992.
- 9) 松田浩，森田千尋，崎山毅，鶴田健，若菜啓孝：偏平シェル構造の弾性曲げ解析，構造工学論文集，Vol.38A, pp.31-42, 1992.
- 10) Leicester, R. H. : Finite Deformations of Shallow Shells, Proc. of ASCE, Vol.94, No.EM6, pp.1409-1423, 1968.
- 11) 坪井善勝：建築学大系 9 - I 建築弾塑性学，彰国社，1972.

(1992年9月21日受付)