

Spline Prism法を用いた長方形厚板 の振動解析について

VIBRATION OF THICK RECTANGULAR PLATES BY USING THE SPLINE PRISM METHOD

水澤富作*

高木信治**

BY TOMISAKU MIZUSAWA and SHINJI TAKAGI

This paper presents application of the spline prism method which is a semi-analytical model based on the three-dimensional elasticity theory to analyse vibration of both thin and thick rectangular plates. To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and the results are compared with those obtained by analytical method and by other numerical methods. Stable convergence and excellent accuracy are obtained using the higher-order spline prism models. The results of thick rectangular plates with several boundary conditions are also compared with those obtained by means of the Mindlin plate theory.

1. まえがき

板厚が増大するに従い、薄板理論では無視される横せん断変形、回転慣性や板厚方向の応力成分の影響が無視できなくなる。これらの影響を考慮するために、一次せん断変形理論で知られるReissner-Mindlin板理論^{1, 2)}、また厚さ方向の変位を高次の変位関数で仮定したLevinson-Murthy-Reddyの板理論^{3, 4)}やLo-Christensen-Wuの高次の板理論⁵⁾なども提案されている。ここで、Reissner-Mindlinの修正板理論では、たわみと独立な2つの回転角を仮定し、せん断修正係数を用いることにより横せん断変形の影響が考慮されている。また、高次の板理論では、厚さ方向に高次の変位(応力)関数を仮定することにより、板厚方向の影響が考慮されている⁶⁾。これまでに、修正板理論や高次の板理論に基づく種々の有限要素モデル⁷⁾が提案されてきているが、この方法を薄板問題に直接適用すると、ロッキング問題が生じてくる場合もある。さらに、3次元弾性理論に基づく厳密解法⁸⁾や、Rayleigh-Ritz法や有限要素法⁹⁾などの数値解析法を用いた等方性厚板の振動解析が行われている。しかしながら、厳密解法やRayleigh-Ritz法を用いた場合には、仮定する変位関数により境界条件の制約を受け、また有限要素法を適用した場合にも未知数の増大や解析値のバラツキなどに問題点が見うけられる。

一方、ZienkiewiczとTooら¹⁰⁾は、アイソパラメトリック要素の離散化概念と、一次元方向に変位をフーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である有限プリ

* 工博 大同工業大学助教授 工学部建設工学科 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

** 大同工業大学大学院生 工学研究科建設工学専攻 (〒457 名古屋市南区白水町40番地)

ズム法 (Finite Prism Method)を提案し、厚肉箱桁橋の曲げ解析などに適用している¹¹⁾。Cheungら¹²⁾と水澤¹³⁾は、この有限プリズム法を用いて扇形厚板の振動解析を行っている。Chongら¹⁴⁾は、この方法をサドル板の振動解析に適用している。また、大島ら¹⁵⁾や岸ら¹⁶⁾は、それぞれ繊維強化複合材の縦波動伝播速度問題や単筋鉄RC梁の位相速度問題を解析している。また、2方向に固有関数を仮定し、厚さ方向に有限要素法の離散化概念を適用した有限レイヤー法(Finite Layer Method)が、Cheungら¹⁷⁾により提案され、長方形厚板の振動解析に用いられている。しかしながら、低次の3次元有限帯板法を薄板問題に適用する場合には、ロッキング問題を回避するために、低減積分法や選択低減積分法を用いる必要がある。さらに、層状複合板の3次元解析では、厚い積層から薄い積層を統一的に取り扱え、また信頼性の高い解析手法が必要になってくる。

本研究では、薄板から厚板の振動問題を統一的に解析するために、3次元弾性理論に基づくSpline Prism法を提案する。この方法は、一方向に固有関数を仮定し、他の2方向にB-spline関数を用いた3次元帯板モデルである。また、このSpline次数を高めれば高次のプリズム要素モデルが導ける。本手法の解析精度や収束性に与えるSpline次数やプリズム要素数の影響について示し、またReissner-Mindlin理論や薄板理論による結果と比較検討している。相対する2辺が単純支持され他の2辺が任意の境界条件を持つ長方形厚板の振動特性に与える幅厚比や辺長比などの影響についても解析している。

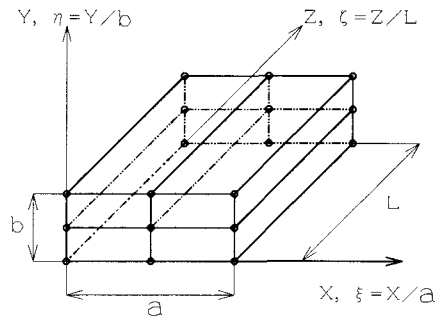


Fig. 1 Thick rectangular plate and co-ordinate systems

2. 解析手法

3次元弾性理論とポテンシャルエネルギー最小化原理を

用いて、Fig. 1に示すような3次元Spline Prism要素モデルを導く。このSpline Prism法は、2方向の変位にB-spline関数を仮定し、他の一方向に変位をフーリエ級数展開し、関数の直交性を利用して3次元問題を2次元問題に変換した半数値解析法である。このSpline関数の次数を高めることにより、任意の高次のSpline Prismモデルが定式化される。また、式の定式化にあたり、次式で表される無次元座標系を用いる。

$$\xi = X/a, \quad \eta = Y/b, \quad \zeta = Z/L \quad (1)$$

ここで、Fig. 1に示すように、aは厚板の幅、bは厚さ、Lは長さである。

プリズム要素におけるX, Y, Z方向の変位関数U, V, Wは、それぞれ次式で仮定される。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{\ell=1}^r \left\{ \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} A_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_{\ell}(\zeta) = \sum_{\ell=1}^r [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_A\}_{\ell} \\ V &= \sum_{\ell=1}^r \left\{ \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} B_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} Z_{\ell}(\zeta) = \sum_{\ell=1}^r [N]_{mn} Z_{\ell}(\zeta) \{\delta_B\}_{\ell} \\ W &= \sum_{\ell=1}^r \left\{ \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} C_{mn} N_{m,k}(\xi) N_{n,k}(\eta) \right\} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) = \sum_{\ell=1}^r [N]_{mn} \bar{Z}_{\ell}(\zeta) \{\delta_C\}_{\ell} \end{aligned} \quad (2)$$

ここで、 $[N]_{mn} = [N_{1,k}(\xi)N_{1,k}(\eta), N_{1,k}(\xi)N_{2,k}(\eta), \dots, N_{i_x,k}(\xi)N_{i_y,k}(\eta)]$, $\{\delta_A\}_{\ell} = \{A_{11}, A_{12}, \dots, A_{i_x i_y}\}_{\ell}^T$, $\{\delta_B\}_{\ell} = \{B_{11}, B_{12}, \dots, B_{i_x i_y}\}_{\ell}^T$, $\{\delta_C\}_{\ell} = \{C_{11}, C_{12}, \dots, C_{i_x i_y}\}_{\ell}^T$ である。また、 $i_x = k-1+M_x$, $i_y = k-1+M_y$, $Z_{\ell}(\zeta)$ と $\bar{Z}_{\ell}(\zeta)$ は、与えられた境界条件を満たした固有関数である。 $N_{m,k}(\xi)$ と $N_{n,k}(\eta)$ は、正規化されたB-spline関数

であり、 $k-1$ は、B-spline関数のSpline次数、 M_x と M_y はそれぞれxとy方向のプリズム要素の分割数である。 r は、固有関数の級数の項数である。式(2)をマトリックスで表すと、次式で与えられる。

$$\{d\} = \sum_{\ell=1}^r [S]_{mn}^{\ell} \{\Delta\}_{\ell} \quad (3)$$

ただし、 $\{d\} = \{U, V, W\}^T$ 、 $\{\Delta\}_{\ell} = \{\{\delta_A\}_{\ell}, \{\delta_B\}_{\ell}, \{\delta_C\}_{\ell}\}^T$ であり、 $[S]_{mn}^{\ell}$ は、

$$[S]_{mn}^{\ell} = \begin{bmatrix} [N]_{mn} Z_{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{mn} Z_{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{mn} \bar{Z}_{\ell} \end{bmatrix} \quad (4)$$

で与えられる。

次に、3次元弾性理論で定義される垂直及びせん断ひずみを無次元座標系で表せば、次式で与えられる。

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial U / \partial X \\ \partial V / \partial Y \\ \partial W / \partial Z \\ (\partial U / \partial Y) + (\partial V / \partial X) \\ (\partial V / \partial Z) + (\partial W / \partial Y) \\ (\partial W / \partial X) + (\partial U / \partial Z) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (1/a)(\partial U / \partial \xi) \\ (1/b)(\partial V / \partial \eta) \\ (1/L)(\partial W / \partial \zeta) \\ (1/b)(\partial U / \partial \eta) + (1/a)(\partial V / \partial \xi) \\ (1/L)(\partial V / \partial \zeta) + (1/b)(\partial W / \partial \eta) \\ (1/a)(\partial W / \partial \xi) + (1/L)(\partial U / \partial \zeta) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

また、式(2)を式(5)に代入すれば、次式の関係式で表される。

$$\{\varepsilon\} = [T] \{d\} = \sum_{\ell=1}^r [T] [S]_{mn}^{\ell} \{\Delta\}_{\ell} = \sum_{\ell=1}^r [B]_{mn}^{\ell} \{\Delta\}_{\ell} \quad (6)$$

ここで、 $[T]$ は式(5)より与えられる微分演算子マトリックスである。また $[B]_{\ell}$ はひずみマトリックスであり、次式で与えられる。

$$[B]_{mn} = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{n=1}^{i_y} \begin{bmatrix} (1/a)N_{m,k} N_{n,k} Z_{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & (1/b)N_{m,k} N_{n,k} Z_{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & (1/L)N_{m,k} N_{n,k} \bar{Z}_{\ell} \\ (1/b)N_{m,k} N_{n,k} Z_{\ell} & (1/a)N_{m,k} N_{n,k} Z_{\ell} & 0 \\ 0 & (1/L)N_{m,k} N_{n,k} Z_{\ell} & (1/b)N_{m,k} N_{n,k} \bar{Z}_{\ell} \\ (1/L)N_{m,k} N_{n,k} Z_{\ell} & 0 & (1/a)N_{m,k} N_{n,k} \bar{Z}_{\ell} \end{bmatrix} \quad (7)$$

ただし、 $N_{m,k} = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$ 、 $N_{n,k} = \partial N_{n,k}(\eta) / \partial \eta$ 、 $Z_{\ell} = \partial Z_{\ell}(\zeta) / \partial \zeta$ 、 $\bar{Z}_{\ell} = \partial \bar{Z}_{\ell}(\zeta) / \partial \zeta$ である。また、等方性、等質の3次元弾性体の構成式は、次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (8)$$

ここで、 $\{\sigma\} = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy} \ \tau_{yz} \ \tau_{zx}\}^T$ ，また弾性マトリックスは、次式で定義される。

$$[D] = D_0 \begin{pmatrix} 1 & D_1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & 1 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ D_1 & D_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_2 \end{pmatrix} \quad (9)$$

ここで、 $D_1 = \nu/(1-\nu)$ ， $D_2 = (1-2\nu)/2(1-\nu)$ ， $D_0 = E(1-\nu)/(1+\nu)/(1-2\nu)$ である。ただし、 E はヤング係数、 ν はポアソン比である。

したがって、等厚、等方性な長方形弾性体のひずみエネルギー、 U_p は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} U_p &= (abl/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{\sigma\}^T \{\varepsilon\} d\xi d\eta d\zeta = (abl/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= (abl/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\ell=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}^T \ell [B]^T_{mn} [D] [B]^s_{ij} \{\Delta\}_s d\xi d\eta d\zeta \\ &= (1/2) \sum_{\ell=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}^T \ell [K]_{\ell s} \{\Delta\}_s \end{aligned} \quad (10)$$

ただし、 $[K]_{\ell s}$ は、剛性マトリックスであり、次式で表される。

$$[K]_{\ell s} = (abl) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [B]^T_{mn} [D] [B]^s_{ij} d\xi d\eta d\zeta \quad (11)$$

また、運動エネルギー、 T は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} T &= (\rho \omega^2 abl/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{U^2 + V^2 + W^2\} d\xi d\eta d\zeta \\ &= (\rho \omega^2 abl/2) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \sum_{\ell=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}^T \ell [S]^T_{mn} [S]^s_{ij} \{\Delta\}_s d\xi d\eta d\zeta \\ &= (\omega^2/2) \sum_{\ell=1}^r \sum_{s=1}^q \{\Delta\}^T \ell [M]_{\ell s} \{\Delta\}_s \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、質量マトリックス、 $[M]_{\ell s}$ は、

$$[M]_{\ell s} = (\rho abl) \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [S]^T_{mn} [S]^s_{ij} d\xi d\eta d\zeta \quad (13)$$

で示される。ただし、 ρ は長方形厚板の密度であり、 ω は円振動数(rad/sec)である。

次に、 x -軸に垂直な厚板の境界面($\xi = \xi_{ic}$)で任意の幾何学的境界条件を考慮するために、仮想バネ法¹⁸⁾を用いる。すなわち、 $\xi = \xi_{ic}$ の境界面で、変位 U, V, W に対応する仮想バネ係数、 α, β, δ を導入すれば、これらのバネによるひずみエネルギー、 U_b は、次式で与えられる。ただし、 N_c は境界辺の数である。

$$U_b = (bL/2) \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 \{\alpha U^2 + \beta V^2 + \delta W^2\} d\eta d\zeta \quad |\xi = \xi_{ic} \quad (14)$$

したがって、板の全ポテンシャルエネルギー、 Π は、

$$\Pi = U_p + U_s - T \quad (15)$$

で与えられる。ポテンシャルエネルギー最小の原理を用いると、次式の基礎方程式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \{\Delta\}^T} = \sum_{l=1}^r \sum_{s=1}^q ([K]_{ls} - \omega^2 [M]_{ls}) \{\Delta\}_s = 0 \quad (16)$$

また、剛性マトリックス $[K]_{ls}$ と質量マトリックス $[M]_{ls}$ は、それぞれ次式で表される。

$$[K]_{ls} = \begin{bmatrix} [K_{uu}] & [K_{uv}] & [K_{uw}] \\ [K_{vu}] & [K_{vv}] & [K_{vw}] \\ [K_{wu}] & [K_{wv}] & [K_{ww}] \end{bmatrix}_{ls}, \quad [M]_{ls} = \begin{bmatrix} [M_{uu}] & 0 & 0 \\ 0 & [M_{vv}] & 0 \\ 0 & 0 & [M_{ww}] \end{bmatrix}_{ls} \quad (17)$$

これらのマトリックスの大きさは、 $3 \times (k-1+M_x) \times (k-1+M_y) \times r$ で表される。ただし、 $k-1$ は Spline 関数の次数であり、 M_x と M_y はプリズム要素の分割数である。この場合のサブマトリックス $[K_{ij}]_{ls}$, $[M_{ij}]_{ls}$ (Appendix 参照) は、Gauss の数値積分公式より求めている。また、Spline 次数を高めることにより、高次のプリズム要素が定式化できる。

ここで、 z 軸に垂直な相対する 2 辺がダイヤフラムタイプの単純支持条件（すなわち、 $z=0, L; U=V=\partial W/\partial z=0$ ）を仮定すれば、この場合のはりの固有関数は、次式で与えられる。

$$Z_l(\xi) = \sin(l\pi\xi), \quad \bar{Z}_l(\xi) = \cos(l\pi\xi); \quad l=1, 2, \dots, r \quad (18)$$

したがって、固有関数の直交性により、級数の連成項が消えるので、式 (16) は次式のようになる。

$$\sum_{l=1}^r ([K]_{ll} - \omega^2 [M]_{ll}) \{\Delta\}_l = 0 \quad (19)$$

各級数項に対して、式 (19) の固有値計算を行えば、振動数及び振動モード形状が求められる。このサブマトリックス $[K]_{rr}$ と $[M]_{rr}$ の大きさは、 $3 \times (k-1+M_x) \times (k-1+M_y)$ になる。一方、従来の 9 節点アイソパラメトリック要素を用いた有限プリズム法¹³⁾の未知数は、 $3 \times (2M_x+1) \times (2M_y+1)$ で与えられるので、プリズム要素の分割数が増大するにつれて、本手法の未知数の大きさが有限プリズム法と比較して半分以下になる。

3. 数値計算例及び考察

Spline Prism 法の有用性を示すために、相対する 2 辺が単純支持され他の 2 辺で任意の境界条件をもつ長方形厚板の振動解析を行い、解の収束性や精度に与える Spline 次数とプリズム要素の分割数の影響について検討し、また種々の境界条件を持つ厚板の振動特性に与える幅厚比、 b/a や辺長比、 L/a の影響について示す。さらに、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮した Mindlin 板理論を用いて求めた結果と比較検討している。ただし、本数値計算例では、 $\nu=0.3$ 、厚さ方向と幅方向のプリズム要素の分割数は同一とし、また Gauss の数値積分では、厳密積分法を採用している。なお、計算結果は振動数パラメータ、 $n^* = \omega L^2 \sqrt{\rho b/D}$ を用いて表している。ここで、 $D = Eb^3/12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性である。

Table 1 には、2 つの相対する 2 辺がそれぞれ単純支持及び自由の境界条件 (SS-FF) を持つ正方形厚板 ($L/a=1.0$, $b/a=0.2$, $\nu=0.3$) の振動数パラメータ、 $n^* = \omega L^2 \sqrt{\rho b/D}$ に与える Spline 次数、 $k-1$ とプリズム要素の分割数、 $M_x=M_y$ の影響が示されている。また、Fig. 2-a), b) は、それぞれこの場合の 1 次と 5 次の振動数パラメータの収束状態を示している。ここで、 $k-1$ は 2 次から 4 次まで変化させ、またプリズムの分割数は 2 から 12 まで変えている。また、Table 1 には比較のために、Mindlin 板理論 (MPT) の結果^{19, 21)} も示

Table. 1 Convergence study of frequency parameters, $n^* = \omega L^2 \sqrt{\rho b/D}$ of a square thick plate with the boundary condition of SS-FF: $b/a=0.2$, $L/a=1.0$, $\nu=0.3$

		Mode					
r	k-1	$M_x=M_y$	1st	2nd	3rd	4th	5th
2	2	9.0364	14.335	24.545	32.502	45.791	
	4	9.0088	14.195	24.387	29.590	45.542	
	6	9.0036	14.147	24.378	29.340	45.529	
	8	9.0021	14.132	24.376	29.290	45.527	
	10	9.0016	14.127	24.376	29.275	45.526	
	12	9.0014	14.125	24.375	29.269	45.526	
1	3	9.0308	14.261	24.453	32.390	45.607	
	2	9.0084	14.250	24.381	29.574	45.538	
	4	9.0025	14.139	24.375	29.306	45.526	
	6	9.0015	14.126	24.375	29.270	45.526	
	8	9.0013	14.124	24.375	29.265	45.526	
	10	9.0012	14.123	24.375	29.264	45.526	
4	12	9.0012	14.123	24.375	29.263	45.526	
	2	9.0052	14.146	24.375	29.394	45.526	
	4	9.0015	14.125	24.375	29.270	45.526	
	6	9.0012	14.123	24.375	29.264	45.526	
	MPT	8.9774	14.080	*	29.096	*	
2	2	31.861	36.813	53.906	57.455	65.517	
	4	31.517	36.327	50.395	56.377	64.709	
	6	31.488	36.230	50.072	56.269	64.621	
	8	31.479	36.197	49.989	56.248	64.611	
	10	31.476	36.185	49.960	56.242	64.607	
	12	31.474	36.179	49.948	56.240	64.605	
2	3	31.609	36.481	53.808	57.036	65.052	
	2	31.512	36.421	50.355	56.361	64.701	
	4	31.483	36.214	50.029	56.243	64.606	
	6	31.475	36.182	49.952	56.239	64.604	
	8	31.475	36.182	49.939	56.238	64.604	
	10	31.473	36.174	49.936	56.238	64.603	
4	12	31.473	36.174	49.935	56.238	64.603	
	2	31.498	36.232	50.190	56.253	64.608	
	4	31.475	36.181	49.954	56.238	64.604	
	6	31.473	36.174	49.937	56.238	64.603	
	MPT	31.215	35.891	49.447	*	*	

MPT is the result calculated by the Mindlin plate theory¹⁹⁾.

* These are cross-sectional deformed modes which are missed by the Mindlin plate theory.

してある。これより、プリズム要素の分割数を増大すると、高次の振動モードも含めて一定値への様な収束性が示され、またSpline次数を高めると少ない分割数でも安定した収束値が得られている。せん断修正係数 $\pi^2/12$ を用いたMindlin板理論による結果と比較すると、やや大きな数値が示されている。最初の3つの振動モードのスパン中央($\xi=0.5$)での断面変形モード形状をFig. 3に示してある。これより、2次元板理論では表せない非対称面変形モードが3次のモードに生じてくる。

次に、本手法を薄板に適用した場合の数値安定性について検討する。Table 2には、前問題で幅厚比を $b/a=0.01$ に取った場合の振動数パラメータ, $n^* = \omega L^2 \sqrt{\rho b/D}$ の収束性に与えるSpline次数や要素の分割数の影響

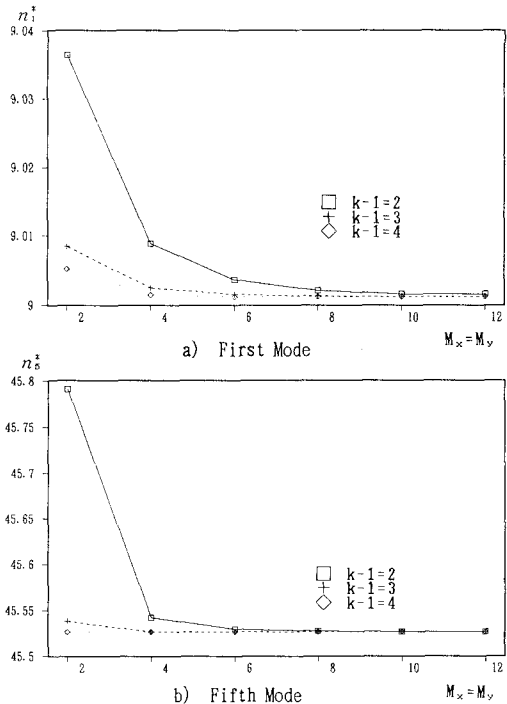
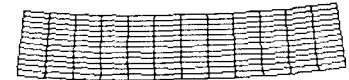
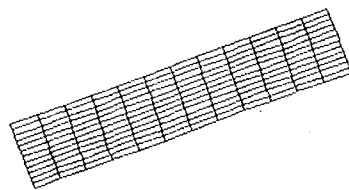


Fig. 2 The effect of the degree of spline functions on convergence study of the frequency parameters, $n^* = \omega L^2 \sqrt{\rho b/D}$ for the first and fifth modes of square thick plate with SS-FF; $b/a=0.2$ and $L/a=1.0$



a) First Mode



b) Second Mode



c) Third Mode

Fig. 3 The first three mode shapes of cross-section at the midspan for thick plate with SS-FF; $b/a=0.2$ and $L/a=1.0$

Table. 2 Convergence study of frequency parameters, n^* = $\omega L^2 \sqrt{\rho b/D}$ of a square thin plate with the boundary condition of SS-FF: $b/a=0.01$, $L/a=1.0$, $\nu=0.3$

r	k-1	$M_x=M_y$	Mode				
			1st	2nd	3rd	4th	5th
1	2	8	9.6408	16.183	37.976	90.118	203.14
		10	9.6355	16.162	37.315	82.556	168.21
		12	9.6327	16.146	37.006	78.960	151.62
	3	2	9.6557	16.216	40.088	103.74	487.69
		4	9.6335	16.185	37.521	92.494	236.88
		6	9.6298	16.137	36.914	79.048	167.85
	4	8	9.6292	16.125	36.733	76.054	141.74
		10	9.6289	16.121	36.689	75.376	135.54
		12	9.6287	16.118	36.674	75.211	134.00
	4	2	9.6297	16.187	37.133	93.075	233.00
		4	9.6294	16.127	36.848	78.020	163.67
		6	9.6290	16.122	36.690	75.611	140.12
2	3	8	9.6288	16.119	36.672	75.184	134.24
		10	9.6286	16.116	36.664	75.137	133.45
		12	9.6284	16.114	36.657	75.122	133.34
	4	MPT ^{1*)}	9.6279	16.109	36.644	*	*
		CPT ^{2*)}	9.6314	16.135	36.726	*	*
	2	8	38.996	46.964	71.971	123.66	232.09
		10	38.963	46.849	71.326	117.07	200.08
		12	38.945	46.790	71.019	113.99	185.05
	3	2	39.099	47.086	74.293	138.35	538.47
		4	38.950	46.934	71.923	127.06	267.63
		6	38.926	46.742	71.084	114.93	201.40
	4	8	38.918	46.701	70.728	111.83	177.28
		10	38.915	46.687	70.639	111.02	171.18
		12	38.913	46.680	70.606	110.80	169.96
4	2	2	38.931	46.942	71.687	127.63	265.90
		4	38.920	46.703	70.960	114.54	198.63
		6	38.915	46.686	70.633	111.33	176.38
	3	8	38.914	46.680	70.600	110.77	169.87
		10	38.912	46.675	70.584	110.69	168.99
		12	38.911	46.670	70.571	110.66	168.86
	4	MPT ^{1*)}	38.908	46.661	70.545	*	*
		CPT ^{2*)}	38.945	46.738	70.740	*	*

* These are cross-sectional deformed modes which are missed by both the Mindlin plate theory and thin plate theory.

次と4次の振動数パラメータの収束状態を示している。これより、薄板では、低次のSplineモデルを用いると収束性があまり良くないが、高次のプリズム要素を用いれば、高次のモードの振動数まで、安定した収束性が得られている。またその収束値は、Mindlin板理論や薄板理論によって求められた値^{2*)}と良く一致している。他の境界条件を持った場合についても検討を行っているが、同様な結果が得られている。

Table 3には、周辺単純支持された正方形板($L/a=1.0$, $b/a=0.1$, $\nu=0.3$, $E=1.0$, $\rho=1.0$)の円振動数 ω (rad/sec)の解析精度が示されている。比較のために、3次元弾性理論に基づく厳密解法⁸⁾や有限レイヤー法¹⁷⁾による結果も示してある。これより、Srinivasらの厳密解⁸⁾と非常に良く一致した結果が得られている。以上の解析結果より、高次のSpline Prism法を用いれば、薄板から厚板まで統一的に数値安定性の高い解析が可能である。

Table 4には、種々の境界条件を持つ正方形厚板($\nu=0.3$, $L/a=1.0$)の振動数パラメータに与える幅厚比、 b/a の影響が示されている。また、Mindlin板理論を用いて解析した結果も示してある。これより、幅厚比が増大するにつれて、2次元板理論では表せない断面変形モードが低次の振動モードにも現れてきている。ま

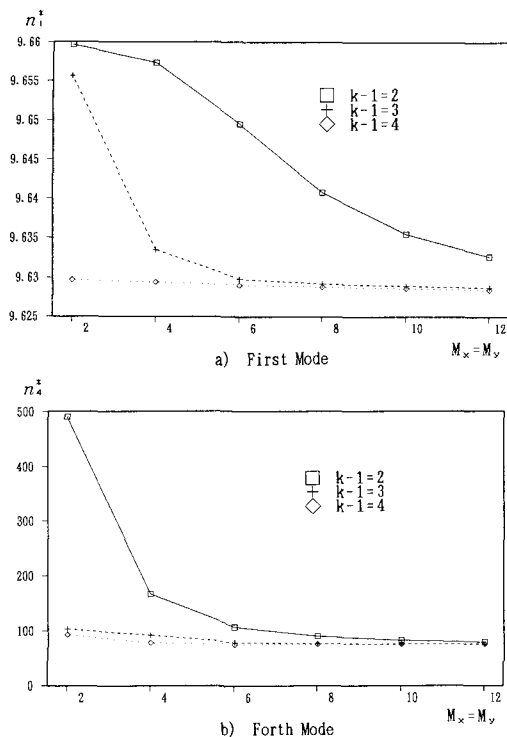


Fig. 4 The effect of the degree of spline functions on convergence study of the frequency parameters, n^* for the first and 4th modes of square thin plate with SS-FF: $b/a=0.01$ and $L/a=1.0$

が示されている。 Fig. 4-a), b)は、それぞれ1

た、板厚が大きくなると、Spline Prism法の値はMindlin板理論による結果より、やや大きな値が示されて

いる。厚板の曲げモードの振動数に関しては、Mindlin板理論によっても、2%以内の精度で3次元弾性理論による解と一致している。さらに、Table 5には、3次元Spline Prism法と Mindlin板理論を用いて、自由の境界条件を含む正方形厚板の振動数パラメータに与える幅厚比の影響が示されている。これより、曲げ振動モードの振動数パラメータは、高次の振動数までよく一致している。また、Fig. 5には、正方形厚板の1次の振動数パラメータ、 $n\pi_1$ に与える幅厚比と境界条件の影響が示されている。これより、幅厚比の増大とともに振動数が減少し、また両端固定の場合が一番大きく減少している。

Table 6とFig. 6には、2つの相対する2辺がそれぞれ単純支持と自由の場合の振動数パラメータに与える辺長比、 L/a の影響が示されている。ただし、幅厚比は0.1に仮定し、また比較のために、Mindlin板理論による結果も示してある。これより、辺長比の増大とともに、振動数パラメータが大きくなり、またMindlin板理論による値とも良く一致した結果が得られている。

4. あとがき

3次元弾性体である厚板の振動解析では、周辺単純支持の場合に解析解が求められているが、他の境界条

Table. 3 Comparison of accuracy of natural frequencies(rad/sec) of simply supported square plate(SS-SS): $k=1=4$, $M_x=M_y=12$, $L=1.0$, $\nu=0.3$, $a=1.0$, $h=0.1$, $E=1.0$, and $\rho=1.0$

(l,m)	Methods	Mode							
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
1, 1	Present method	0.0919	0.4385	0.7401	3.1317	3.2044	5.6885	6.2172	6.3626
	Exact method ^{*)}	0.0919	0.4385	0.7401	3.1317	3.2044	5.6885	6.2172	6.3625
	FLM	0.0920	0.4385	0.7401	3.1443	3.2174	5.7261	6.3194	6.4520
1, 2	Present method	0.2197	0.6933	1.1674	3.1774	3.3493	5.5917	6.2404	6.5320
	Exact method ^{*)}	0.2197	0.6937	1.1673	3.1774	3.3493	5.5917	6.2403	6.5320
	FLM	0.2200	0.6934	1.1674	3.1900	3.3626	5.6355	6.3422	6.6164
2, 2	Present method	0.3376	0.8770	1.4729	3.2225	3.4840	5.5284	6.2634	6.6687
	Exact method ^{*)}	0.3376	0.8770	1.4749	3.2224	3.4840	5.5284	6.2634	6.6687
	FLM	0.3381	0.8770	1.4749	3.2348	3.4978	5.5750	6.3649	6.7513
1, 3	Present method	0.4117	0.9806	1.6438	3.2522	3.5691	5.4967	6.2788	6.7498
	Exact method ^{*)}	0.4117	0.9806	1.6438	3.2522	3.5691	5.4966	6.2787	6.7497
	FLM	0.4123	0.9805	1.6440	3.2643	3.5832	5.5445	6.3800	6.8319
2, 3	Present method	0.5171	1.1180	1.8691	3.2963	3.6908	5.4598	6.3017	6.8611
	Exact method ^{*)}	0.5171	1.1180	1.8690	3.2963	3.6908	5.4598	6.3017	6.8611
	FLM	0.5179	1.1180	1.8692	3.3083	3.7053	5.5090	6.4025	6.9430

FLM is the result solved by Cheung et al.¹⁷⁾ using the finite layer method with ten layer elements, and (l,m) is the number of half waves in the x- and z-direction, respectively.

Table 4. The effect of b/a on the frequency parameters, $n\pi=\omega L^2\sqrt{\rho b/D}$ of a square thick plate; $L/a=1.0$, $\nu=0.3$, $k=1=4$, $M_x=M_z=12$

Boundary conditions	b/a	Mode							
		1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
SS-CC	0.01	29.40	55.09	70.58	95.74	102.4	131.6	141.1	157.1
		MPT	28.92	54.67	69.19	94.36	102.0	128.7	139.8
		CPT	28.95	54.74	69.33	94.59	102.2	129.1	154.8
	0.1	26.86	49.38	59.80	79.52	87.39	102.6	113.1	113.7
		MPT	26.64	49.06	59.12	78.68	86.72	101.2	*
	0.2	22.63	40.30	45.38	56.90	59.50	60.52	66.69	72.01
		MPT	22.31	39.76	44.47	*	58.36	*	65.57
	0.4	15.87	27.36	28.41	28.49	30.10	37.21	38.25	42.04
		MPT	15.50	27.52	26.70	*	33	36.08	*
	0.6	11.95	19.01	19.78	20.18	20.33	25.50	26.26	26.59
		MPT	11.59	*	19.55	19.56	*	25.62	*
SS-CS	0.01	23.35	51.33	57.99	85.23	99.84	112.0	132.6	139.2
		MPT	23.63	51.62	58.57	85.97	100.1	112.9	133.4
		CPT	23.65	51.67	58.65	86.13	100.3	113.2	
	0.1	22.47	47.29	52.46	74.57	76.42	94.01	110.1	113.7
		MPT	22.38	47.06	52.09	74.00	*	93.06	109.1
	0.2	19.86	38.22	39.33	41.97	57.62	59.33	66.33	66.96
		MPT	19.67	*	38.86	41.33	56.67	*	65.25
	0.4	14.87	19.12	27.12	27.70	28.59	33.48	36.40	36.85
		MPT	14.59	*	26.51	26.97	*	35.83	*
	0.6	11.51	12.75	19.55	20.09	20.19	22.00	22.32	23.67
		MPT	11.22	*	19.52	19.50	*	22.00	*

MPT and CPT are the results calculated by the Mindlin plate theory¹⁸⁾ and classical thin plate theory²⁰⁾, respectively.
* These are cross-sectional deformed modes which are missed by the Mindlin plate theory.

件に対しては、あまり多く報告がなされていない。本研究では、3次元弾性理論に基づくSpline Prism法を用いて、等方性長方形厚板の振動解析を行い、本手法の数値安定性や長方形厚板の振動特性について検討を行った。また、横せん断変形や回転慣性の影響を考慮したMindlin 板理論による数値解と比較検討も行った。本研究で得られた主な結果を列記すれば、次のようになる。

(1). 高次のSpline Prismモデルを用いれば、少ないプリズム要素数でも高次の振動数まで安定した収束性が得られ、また解析精度の高い結果が得られている。

(2). 高次プリズムモデルを用いれば、薄板問題にも適用でき、厚板から薄板まで統一的に振動解析を行うことができる。

(3). Mindlin 板理論より求めた結果と比較して、本手法による結果は、幅厚比の増大とともにやや大きな値を示している。

(4). 厚板の振動モード形状は、曲げモード、面内モードと断面変形モードからなり、板厚が大きくなるにしたがい、厚さ方向の断面変形モードと面内モードが卓越して来る。

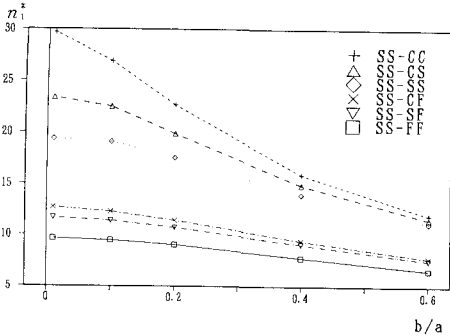


Fig. 5 The effect of the thickness ratio, b/a on the first frequency parameter, n^* of square thick plate with several boundary conditions; $L/a=1.0$, $k=1=4$ and $M_x=M_y=12$

Table 5. The effect of b/a on the frequency parameters, $n^*=\omega L^2\sqrt{\rho b/D}$ of a square thick plate; $L/a=1.0$, $\nu=0.3$, $k=1=4$, $M_x=M_y=12$

Boundary conditions	b/a	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
SS-CF	0.01	12.67	32.94	41.65	62.83	72.08	90.44	102.7	111.6
	MPT	12.68	33.01	41.65	62.88	72.24	90.43	102.8	111.6
	CPT	12.69	33.07	41.70	63.01	72.40	90.61		
	0.1	12.27	30.52	38.73	56.04	63.11	68.54	78.88	86.44
	MPT	12.25	30.39	38.61	55.74	62.65	*	78.43	85.77
	0.2	11.40	25.96	33.11	34.27	45.15	49.10	53.00	59.54
	MPT	11.35	25.71	32.83	*	44.62	48.37	*	*
	0.4	9.396	17.13	18.36	23.62	26.40	29.72	30.07	31.20
	MPT	9.308	*	18.04	23.22	*	29.46	*	30.46
	0.6	7.728	11.41	13.62	17.43	17.73	19.77	20.68	21.75
	MPT	7.626	*	13.33	*	17.37	*	20.30	21.28
SS-FF	0.01	9.629	16.12	36.67	38.91	46.68	70.61	75.21	87.84
	MPT	9.628	16.11	36.64	38.91	46.66	70.54	75.10	87.82
	CPT	9.631	16.14	36.73	38.95	46.74	70.74		
	0.1	9.446	15.40	33.91	36.44	42.89	48.76	62.34	66.41
	MPT	9.439	15.38	33.84	36.33	42.76	*	62.08	66.14
	0.2	9.001	14.12	24.38	29.26	31.47	36.17	45.53	49.94
	MPT	8.977	14.08	*	29.10	31.21	35.89	*	49.45
	0.4	7.780	11.32	12.18	21.19	22.72	22.76	25.33	28.09
	MPT	7.721	11.24	*	20.95	22.34	*	24.98	*
	0.6	6.600	8.120	9.015	15.18	15.90	17.16	18.40	18.70
	MPT	6.520	*	8.941	*	15.69	16.80	18.50	*

MPT and CPT are the results calculated by the Mindlin plate theory¹⁹⁾ and classical thin plate theory²⁰⁾, respectively.

* These are cross-sectional deformed modes which are missed by the Mindlin plate theory.

Table 6. The effect of L/a on the frequency parameters, $n^*=\omega L^2\sqrt{\rho b/D}$ of a rectangular thick plate(SS-FF); $b/a=0.1$, $\nu=0.3$, $k=1=4$, $M_x=M_y=12$

Aspect ratio	L/a	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
0.5		9.109	10.72	15.58	23.26	28.13	31.70	32.32	32.93
	MPT	9.083	10.69	15.52	23.12	*	31.43	*	32.66
0.75		9.372	12.96	23.63	35.01	38.41	39.47	41.51	49.18
	MPT	9.360	12.94	23.57	34.84	38.23	*	41.32	48.90
1.0		9.446	15.40	33.91	36.44	42.89	48.76	62.34	66.41
	MPT	9.439	15.38	33.84	36.33	42.76	*	62.08	66.14
1.25		9.466	18.02	37.13	46.60	47.28	56.28	77.38	80.12
	MPT	9.461	18.00	37.06	46.52	47.18	*	77.13	79.81
1.5		9.467	20.76	37.49	51.84	61.81	62.35	81.98	94.53
	MPT	9.464	20.74	37.44	51.76	61.71	*	81.75	94.28
1.75		9.463	23.58	37.68	56.62	67.25	79.61	83.13	103.1
	MPT	9.461	23.57	37.64	56.55	*	79.49	82.96	102.8
2.0		9.458	26.47	37.78	61.60	71.22	83.87	100.0	109.7
	MPT	9.456	26.45	37.76	61.54	*	83.73	99.89	109.5

MPT is the result calculated by the Mindlin plate theory¹⁹⁾.

* These are cross-sectional deformed modes which are missed by the Mindlin plate theory.

(5). 厚板の振動数パラメータに与える幅厚比、辺長比や境界条件の影響について検討してみたが、幅厚比の増大とともに、振動数パラメータがほぼ直線的に減少し、拘束条件が大きい場合ほど大きく減少している。また、辺長比が1より小さくなると、その影響が顕著に見られる。今後、本手法の複合層状板の解析への適用についても検討して行きたい。

最後に、本研究は大同工業大学研究援助金及び平成4年度科学研究費（一般研究（C））の援助を受けて行ったもので、ここに関係各位に謝意を表します。

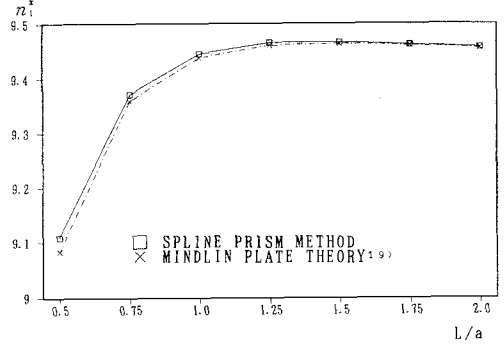


Fig. 6 Comparison of the first frequency parameter, n^* calculated by the present method and the Mindlin plate theory for the thick rectangular plate with SS-FF; $b/a=0.1$, $k=4$ and $M_x=M_y=12$

APPENDIX

式(17)で与えられるサブ剛性マトリックスは、それぞれ次式で与えられる。

$$[K_{uu}] = (bLD_o/a) \left\{ I_{mi} J_{nj} A_1 + D_2(a/b)^2 I_{mi} J_{nj} A_1 + D_2(a/L)^2 I_{mi} J_{nj} A_2 \right\}$$

$$[K_{uv}] = (bLD_o/a) \left\{ D_1(a/b) I_{mi} J_{nj} A_1 + D_2(a/b) I_{mi} J_{nj} A_1 \right\}$$

$$[K_{uw}] = (bLD_o/a) \left\{ D_1(a/L) I_{mi} J_{nj} A_3 + D_2(a/L) I_{mi} J_{nj} A_4 \right\}$$

$$[K_{vu}] = (bLD_o/a) \left\{ D_1(a/b) I_{mi} J_{nj} A_1 + D_2(a/b) I_{mi} J_{nj} A_1 \right\}$$

$$[K_{vv}] = (bLD_o/a) \left\{ (a/b)^2 I_{mi} J_{nj} A_1 + D_2 I_{mi} J_{nj} A_1 + D_2(a/L)^2 I_{mi} J_{nj} A_2 \right\}$$

$$[K_{vw}] = (bLD_o/a) \left\{ D_1(a/b)(a/L) I_{mi} J_{nj} A_3 + D_2(a/b)(a/L) I_{mi} J_{nj} A_4 \right\}$$

$$[K_{wu}] = (bLD_o/a) \left\{ D_1(a/L) I_{mi} J_{nj} A_3 + D_2(a/L) I_{mi} J_{nj} A_4 \right\}$$

$$[K_{ww}] = (bLD_o/a) \left\{ D_1(a/b)(a/L) I_{mi} J_{nj} A_3 + D_2(a/b)(a/L) I_{mi} J_{nj} A_4 \right\}$$

$$[K_{ww}] = (bLD_o/a) \left\{ (a/L)^2 I_{mi} J_{nj} A_7 + D_2(a/b)^2 I_{mi} J_{nj} A_8 + D_2 I_{mi} J_{nj} A_8 \right\}$$

また、サブ質量マトリックスは、次式で表される。

$$[M_{uu}] = (abL\rho) \left\{ I_{mi} J_{nj} A_1 \right\}, \quad [M_{vv}] = (abL\rho) \left\{ I_{mi} J_{nj} A_1 \right\}$$

$$[M_{ww}] = (abL\rho) \left\{ I_{mi} J_{nj} A_8 \right\}。ただし、I_{mi} と J_{nj} は、次式で示される。$$

$$I_{mi} = \int_0^1 N_{m,k}^{(t)}(\xi) N_{n,k}^{(u)}(\xi) d\xi, \quad J_{nj} = \int_0^1 N_{n,k}^{(t)}(\eta) N_{m,k}^{(u)}(\eta) d\eta$$

ここで、 t, u は、それぞれ導関数の次数である。また A_i は次式で定義される。

$$A_1 = \int_0^1 Z_t(\xi) Z_p(\xi) d\xi, \quad A_2 = \int_0^1 \dot{Z}_t(\xi) \dot{Z}_p(\xi) d\xi, \quad A_3 = \int_0^1 Z_t(\xi) \ddot{Z}_p(\xi) d\xi$$

$$A_4 = \int_0^1 \dot{Z}_t(\xi) \ddot{Z}_p(\xi) d\xi, \quad A_5 = \int_0^1 \ddot{Z}_t(\xi) Z_p(\xi) d\xi, \quad A_6 = \int_0^1 \ddot{Z}_t(\xi) \dot{Z}_p(\xi) d\xi$$

$$A_7 = \int_0^1 \bar{Z} \epsilon(\zeta) \dot{\bar{Z}} p(\zeta) d\zeta, \quad A_8 = \int_0^1 \bar{Z} \epsilon(\zeta) \bar{Z} p(\zeta) d\zeta$$

ただし、 $\cdot$ は導関数である。

参考文献

1. Reissner, E.: The effects of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. J. Appl. Mech., Vol. 67, pp. 69-77, 1945.
2. Mindlin, R.D.: Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic, elastic plates. J. Appl. Mech., Vol. 73, pp. 31-38, 1951.
3. Levinson, M.: An accurate simple theory of the static and dynamics of elastic plates. Mech. Res. Commun., Vol. 7, pp. 343-350, 1980.
4. Reddy, J.N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates. J. Appl. Mech., Vol. 45, pp. 745-752, 1984.
5. Lo, K.H., Christensen, R.M. and Wu, E.M.: A high-order theory of plate deformation—Part I—Homogeneous plates. J. Appl. Mech., Vol. 44, pp. 663-668, 1977.
6. 平島、根岸：数種の平板理論の動的特性（自由振動と分散特性）に関する研究。土木学会論文報告集，No. 333, pp. 21-34, 1983.
7. Hinton, E. and Owen, D.R.J.: Finite element software for plates and shells. Pineridge Press, Swansea, 1984.
8. Srinivas, S., Joga Rao, C.V. and Rao, A.K.: An exact analysis for vibration of simply-supported homogeneous and laminated thick rectangular plates. J. Sound Vib., Vol. 12, pp. 187-199, 1970.
9. McGee, O.G. and Leissa, A.W.: Three-dimensional free vibrations of thick skewed cantilevered plates. J. Sound Vib., Vol. 144, pp. 305-322, 1991.
10. Zienkiewicz, O.C. and Too, J.J.M.: The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes. Proc. Inst. Civil Engrs, Vol. 53, pp. 147-172, 1972.
11. 水澤、梶田：離散化帯板モデルと構造解析への適用に関する考察。大同工業大学紀要，Vol. 25, pp. 67-83, 1991.
12. Cheung, M.S. and Cheung, Y.K.: Static and dynamic analysis of thin and thick sectorial plates by the finite strip method. Comput. Struct., Vol. 14, pp. 79-88, 1981.
13. Mizusawa, T.: Vibration of thick annular sector plates using semi-analytical methods. J. Sound Vib., Vol. 150, pp. 245-259, 1991.
14. Chong, K.P., Cheung, Y.K. and Tham, L.G.: Free vibration of formed sandwich panel. J. Sound Vib., Vol. 81, pp. 575-582, 1982.
15. 大島、能町：有限ブリズム法による繊維強化複合材の縦波伝播速度の研究。土木学会論文報告集，No. 297, pp. 47-57, 1980.
16. 岸、松岡、能町：有限ブリズム法を用いた単鉄筋RC梁の位相速度分布曲線とモード分布。構造工学論文集，Vol. 35A, pp. 785-793, 1989.
17. Cheung, Y.K. and Chakrabarti, S.: Free vibration of thick, layered rectangular plates by a finite layer method. J. Sound Vib., Vol. 21, pp. 277-284, 1972.

18. Mizusawa, T. et. al.: Vibration of skew plates by using B-spline functions. J. Sound Vib., Vol. 62, pp. 301-308, 1979.
19. 水澤: 長方形Mindlin板の振動解析へのSpline帯板法の適用について. 日本鋼構造協会構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 16, pp. 209-214, 1992.
20. Leissa, A.W.: The vibration of rectangular plates. J. Sound Vib., Vol. 31, pp. 257-293, 1973.
21. Mizusawa, T.: Vibration of rectangular Mindlin plates by the spline strip method. J. Sound and Vib. (in press).

(1992年 9月21日受付)