

衝撃荷重を受ける単純支持はりの応力波伝播解析

ANALYSIS OF STRESS WAVE PROPAGATIONS IN SIMPLY SUPPORTED BEAMS UNDER IMPACT LOADS

小林 治俊^{*}, 奥田 東吾^{**}, 園田恵一郎^{***}

By Harutoshi KOBAYASHI, Togo Okuda and Keiichiro SONODA

The paper describes an application of the method of eigenfunction expansions to the impact response analysis of simply supported beams of arbitrary depth with narrow rectangular cross-section on the basis of the theory of two dimensional elastodynamics. Main attention is focused upon the transverse normal stress wave propagations, which cannot be explained by the classical beam theory such as Euler or Timoshenko beam theory. The stresses and displacements at transient states and long time states are shown graphically and are compared with those due to the classical beam theories. The correctness of the present method is verified from the fact that the travel times of stress wave obtained by the present method are coincided with those predicted by the ray theory.

1. まえがき

衝撃荷重を受ける弾性体内の応力波伝播特性を究明することは、古くから動弾性論における主要な研究課題の一つであり、構造物の破壊現象に関連して現在においてもなお基礎的なデーターの集積に努力が必要とされる分野である。構造要素としてのはりを対象とした研究では、これまで古典はり（Eulerはり）理論やTimoshenkoはり理論に基づく解析が行われている（例えば、文献1, 2）。しかしながら、これらのはり理論は、はり軸方向への曲げ波あるいはせん断波の伝播は表現できるが、衝撃作用点より発生したはりの高さ方向の応力波がはり上下辺で反射を繰り返しながらはり軸方向へ伝播してゆく特性を表現することはできない。従って、古典はり理論やTimoshenkoはり理論による結果は、衝撃問題で最も重要な曲げ状態に入るまでの過渡状態での応力特性を明らかにしているとは言えない。このためには動弾性論に基づく解析を行わねばならない。はりを対象とした動弾性論に基づく研究の中で解析的に厳密な取扱いをしたものにAchenbach[3] Brock[4]による集中荷重を受ける無限帯板の研究、宇治橋・松浦[5]らによる高次修正はり理論を用いた単純支持はりの衝撃応答の研究がある。しかしながら、何れの研究もはり高さ方向の応力波伝播特性を明確にしているとは言い難い。

ところで、動弾性論に基づき衝撃問題を解析する場合、基礎方程式、境界条件等、時間に関係する変数を

* 工博 大阪市立大学助教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3丁目3の138)

** 工修 西日本旅客鉄道株式会社 鉄道本部 (〒530 大阪市北区大深町1の1)

*** 工博 大阪市立大学教授 工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3丁目3の138)

ラプラス変換したのち境界条件を規定してラプラス像空間における解を求め、それにラプラス逆変換を施して実時間に対応する解を求めるのが一般的であり、先のAchenbach, Brock, 宇治橋・松浦らの解析もこれに依っている。このラプラス逆変換を解析的に行うには、変換パラメータ $p=0$ および振動数方程式より定められる値 $p=\pm ip_m$ (i は虚数単位, p_m は m 次の固有値)の極において留数定理を適用する。逆変換したのち求められる解は、 $p=0$, $p=\pm ip_m$ に対応して、それぞれ準静的解と擾乱解となり、擾乱解は、自由振動問題から導かれる固有関数(モード関数)から成る無限級数で与えられることを多くの解析例が示している(例えば文献6)。一方、Williams[7]は、単純支持Eulerはりの動的応答解析において、得られた級数解を準静的解と擾乱解に分離させて級数の収束性を促進させることを提案し、その後この方法は多くの研究者により、はり、平板、殻などの動的応答解析に使用されている(例えば、文献8)。Reismann [9]は上記の2点に着目し、動弾性問題の基礎方程式を最初から固有関数展開法(モード解析)によって解析する定式化を行い、それを矩形厚板や円筒殻などの衝撃応答解析に適用している[10, 11]。しかし、数値例では変位、応力の長期応答を古典および修正平板理論や殻理論の結果と比較するにとどまり、とくに過渡状態での板厚方向の応力波伝播特性については言及していない。その後、固有関数展開法はWeaver-Pao[12]が内部点源による無限板の応答解析に適用しているが、Pao[13]が述べているように一般的とは言えない。しかし、対象とする問題の固有関数を求めることができれば、煩雑なラプラス逆変換は不要であり、構造物の動的応答解析で通常用いられるモード解析と同一の手順で解析を行える利点があり、もちろん結果はラプラス変換を介した解と一致する。筆者ら[14, 15]も本手法を用いて円版等の衝撃解析を行い、その有用性を確認している。

本研究は、衝撃荷重を受ける両端単純支持はりを2次元動弾性論に基づき、固有関数展開法により解析を行ったものである。時間に関してステップ状の衝撃荷重が作用する場合の過渡状態での応力波の伝播特性を明かにすると共に、変位、応力の長期応答について古典はり理論による結果と比較する。その際、波線理論[16]による応力波の経路と走時を本解析結果と比較検討することにより、本解析結果の信頼性を確かめた。

2. 自由振動解析

まえがきで述べたように、本解析では最初に自由振動解析により固有関数を誘導しておく必要がある。座標系を図1のように採り、はりの形状は、スパン長 l で、はり高 h の単位幅の矩形断面とする。等方性平面応力状態を仮定すれば、物体力が存在しない場合、本問題の運動方程式は次式で与えられる[3]。

$$G[\nabla^2 \mathbf{U} + \mu \text{grad}(\text{div } \mathbf{U})] = \rho \ddot{\mathbf{U}} \quad (1)$$

ここに、 $\mathbf{U}=[u(x, t), v(x, t)]$ は変位ベクトル；
 $\mathbf{x}=(x, y)$ ； $\mu=(1+\nu)/(1-\nu)$ ； ρ , G , ν は
 各々物体の密度、せん断弾性係数、ポアソン比； ∇^2 はラプラシアン； $\ddot{}=\partial^2/\partial t^2$ ； t は時間。

応力・変位関係式は、

$$\sigma_x = \frac{2G}{1-\nu} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = \frac{2G}{1-\nu} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \nu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{xy} = G \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (2)$$

で表され、境界条件は次式で与えられる。

$$x=0, l \quad \text{で} \quad v = \sigma_x = 0 \quad (3)$$

$$y=\pm h/2 \quad \text{で} \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \quad (4)$$

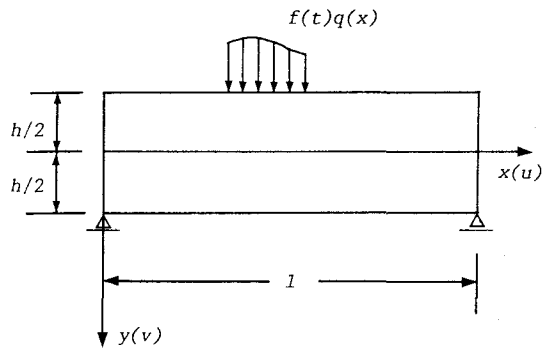


図1 座標系

固有円振動数 ω の調和振動,

$$U(\mathbf{x}, t) = U(\mathbf{x}) \exp(i\omega t) \quad (5)$$

を仮定すれば (i は虚数単位), 式(1)は時間項を省略した後, $U(\mathbf{x})$ に関する次式となる.

$$G [\nabla^2 U + \mu \operatorname{grad}(\operatorname{div} U)] = -\rho \omega^2 U \quad (6)$$

$U(\mathbf{x})$ は固有関数 $U(\mathbf{x})$, $V(\mathbf{x})$ を成分とするベクトルであり, 変位ポテンシャル $\phi_1(\mathbf{x})$, $\phi_2(\mathbf{x})$ を用いて,

$$U = \frac{\partial \phi_1}{\partial x} - \frac{\partial \phi_2}{\partial y}, \quad V = \frac{\partial \phi_1}{\partial y} + \frac{\partial \phi_2}{\partial x} \quad (7)$$

と表せば, 式(6)は次の波動方程式に変換される.

$$\nabla^2 \phi_i + (\omega/c_i)^2 \phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (8)$$

ここに, $c_1 = \sqrt{2G/(1-\nu)\rho}$, $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ は各々縦波と横波の速度である ($c_1 > c_2$).

次に, はり両端の単純支持条件が満足するよう,

$$\phi_1(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_1(y) \sin \alpha x, \quad \phi_2(\mathbf{x}) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_2(y) \cos \alpha x, \quad \alpha = m\pi/l \quad (9)$$

とおき, 式(7)に代入すれば $Y_i(y)$ に関する2階の微分方程式(10)が得られ, その解は式(11)で与えられる.

$$\frac{d^2 Y_i}{dy^2} - \lambda_i^2 Y_i = 0, \quad \lambda_i^2 = \alpha^2 - (\omega/c_i)^2 \quad (i=1, 2) \quad (10)$$

$$Y_1(y) = A_1 \cosh \lambda_1 y + B_1 \sinh \lambda_1 y, \quad Y_2(y) = A_2 \sinh \lambda_2 y + B_2 \cosh \lambda_2 y \quad (11)$$

上式において, A_i , B_i に関与する項は各々 x 軸に関する対称, 逆対称変形問題に対応する.

ここで, はり上下辺の自由境界条件を適用すれば, 振動数方程式および積分定数間の関係を次のように決定できる.

(1) 対称問題

$$\tanh \theta_1 / \tanh \theta_2 = 4\beta^2 \theta_1 \theta_2 / (\beta^2 + \theta_2^2)^2 \quad (12a)$$

$$A_2/A_1 = 2\beta \theta_1 \sinh \theta_1 / (\beta^2 + \theta_2^2) \sinh \theta_2 \quad (12b)$$

(2) 逆対称問題

$$\tanh \theta_1 / \tanh \theta_2 = (\beta^2 + \theta_2^2)^2 / 4\beta^2 \theta_1 \theta_2 \quad (13a)$$

$$B_2/B_1 = 2\beta \theta_1 \cosh \theta_1 / (\beta^2 + \theta_2^2) \cosh \theta_2 \quad (13b)$$

ただし,

$$\beta = \alpha h/2, \quad \theta_i = \lambda_i h/2 \quad (i=1, 2) \quad (14)$$

以上の取扱いは, λ_i^2 が正, すなわち $\alpha c_i > \omega$ の場合であるが, λ_i^2 の正負は式(10)からも分かるように, (1) $0 < \omega < \alpha c_2$, (2) $\alpha c_2 < \omega < \alpha c_1$, (3) $\alpha c_1 < \omega$ の3通りの大小関係に依存する. したがって, これらの場合に依じて式(10)から式(13)までの式形を変える必要があるが, 詳細は文献[17]に記したので省略する. 振動数方程式(12a), (13a)より固有円振動数 ω_{1mn} が求められ, これに対応する固有関数 $U_{1mn}(\mathbf{x}) [= U_{1mn}(\mathbf{x}), V_{1mn}(\mathbf{x})]$ が決定する. ただし, $1=1, 2$ はそれぞれ対称・逆対称問題に対応し, $m, n=1, 2, 3, \dots$ はモード次数である.

固有関数の直交性は, 相反作用の定理を適用すれば次のように得られる.

$$\int_R U_{1mn}(\mathbf{x}) U_{1st}(\mathbf{x}) dR = \delta_{ms} \delta_{nt} N_{1mn}^2 \quad (15)$$

ここに、 δ_{ms} , δ_{nt} は Kronecker のデルタ、 N_{lmn} はノルムであり、積分は物体全体(R)に行う。

3. 衝撃応答解析

はりの上辺に衝撃荷重 $q(x)f(t)$ が作用する場合を考える。本問題の基礎方程式、はり両端および下辺の境界条件は自由振動解析の場合と同じであり、上辺の境界条件のみが新たに次のよう規定される。

$$y = -h/2 \text{ で } \sigma_y = -q(x)f(t), \quad \tau_{xy} = 0 \quad (16)$$

式(1)の解は慣性力の影響を無視した解 $f(t)u^s(x)$ (準静的解)と考慮した解 $u^d(x, t)$ (擾乱解)の和に採る

$$u(x, t) = f(t)u^s(x) + u^d(x, t) \quad (17)$$

ここに $u^s(x)$ は、

$$G[\nabla^2 u^s + \mu \text{grad}(\text{div } u^s)] = 0 \quad (18)$$

を満足する荷重 $q(x)$ による解(付録参照)であり、一方擾乱解 $u^d(x, t)$ は未定の時間関数 $Q_{lmn}(t)$ と固有関数により次のように置く。

$$u^d(x, t) = \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{lmn}(t) U_{lmn}(x) \quad (19)$$

式(17), (19)を式(1)に代入し、式(6)および式(18)を考慮して式を変形すれば、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{lmn}(t) + \omega_{lmn}^2 Q_{lmn}(t)] U_{lmn}(x) = -\ddot{f}(t) u_1^s(x) \quad (20)$$

を得る。上式両辺に $U_{lst}(x)$ を掛け積分し、固有関数の直交性を利用すれば $Q_{lmn}(t)$ に関する微分方程式、

$$\ddot{Q}_{lmn}(t) + \omega_{lmn}^2 Q_{lmn}(t) = -\ddot{f}(t) Z_{lmn} \quad (21)$$

が得られ、係数 Z_{lmn} は次式で与えられる。

$$Z_{lmn} = \frac{-1}{N_{lmn}^2} \int_R u_1^s(x) U_{lmn}(x) dR \quad (22)$$

$Q_{lmn}(t)$ に関する式(21)の解は、次の周知のDuhamel積分形で与えられる。

$$Q_{lmn}(t) = Q_{lmn}(0) \cos \omega_{lmn} t + \frac{1}{\omega_{lmn}} \dot{Q}_{lmn}(0) \sin \omega_{lmn} t + \frac{Z_{lmn}}{\omega_{lmn}} \int_0^t \ddot{f}(\tau) \sin[\omega_{lmn}(t - \tau)] d\tau \quad (23)$$

積分定数 $Q_{lmn}(0)$, $\dot{Q}_{lmn}(0)$ は次のように求められる。いま衝撃を受ける前のはりは静止しているものとすれば、初期条件は、

$$u(x, 0) = \dot{u}(x, 0) = 0 \quad (24)$$

であり、これより、

$$u^d(x, 0) = -f(0)u^s(x), \quad \dot{u}^d(x, 0) = -\dot{f}(0)u^s(x) \quad (25)$$

上式に式(19)を代入した後、両辺に $U_{lst}(x)$ を掛け積分し、固有関数の直交性を利用すれば、次のように決定できる。

$$Q_{lmn}(0) = -f(0)Z_{lmn}, \quad \dot{Q}_{lmn}(0) = -\dot{f}(0)Z_{lmn}$$

4. 数値計算例

部分等分布荷重 q が、はりの上辺中央部に載荷幅 c で時間に関してステップ状に作用する場合($f(t) = H(t)$)

：ステップ関数)を、はり高スパン比 $h/l=0.3$ 、
 載荷幅比 $c/l=0.4$ 、ポアソン比 $\nu=0.3$ として数
 値計算を全て倍精度で行った。振動数方程式(12a)、
 (13a)はRegula-Falsi 法により数値的に解き、固有
 値 $\Omega (= \omega h/c_2)$ を求めた。図2にその固有値分布を
 示している。なお、衝撃応答解析で使用した級数の
 項数は、静的解の固有関数展開及び擾乱解の収束性
 と後述する応答解における応力波の到達時刻を本解
 析結果と波線理論[16]によるそれとを比較検討した
 結果、 $m=119$ 、 $n=500$ とし、問題の対称性より m は
 奇数項すなわち $m=1, 3, 5, \dots$ を採用した。

応答計算結果のはじめに古典はり理論では表せない
 応力 σ_y の中央点($x/l=0.5, y=0$)での時間的変
 動を図3に示した。なお、時間刻みは $\Delta\tau=0.01$ と
 している。横軸は無次元時間 $\tau (=tc_1/h)$ を表して
 おり、縦波がはり高だけ進むのに要する時間が1で
 ある。応答曲線が不連続的に変動している箇所は特
 徴的な応力波の波面が到達したことを示している。
 波線理論を用いれば、この応力波の種類、伝播経路
 (波線)、到達時刻(走時)を幾何学的考察により
 説明できる。図中①～⑧を付した応力変動に対応す
 る応力波の伝播経路のうちの幾つかを同図に示した。
 ①は、載荷中央点(a点)で発生した縦波(P波)の波面
 が最初に着目点に到達する場合の応答であり($\tau_1=$
 0.5)、この応力波が到達するまでは応力は生じない、
 すなわち無応答である。②は、載荷両端部(b点)で
 発生した縦波の波面が到達する場合の応答である(
 $\tau_2=0.833$)。③、④は、a、b点から発生した横波
 (S波)の波面がそれぞれ①、②の場合と同じ経路で
 到達する応答である($\tau_3=0.845$ 、 $\tau_4=1.409$)。⑤
 以後の応答は、はり下辺あるいははり両端からの反
 射波の影響を受ける応答である。まず⑤は、a点か
 ら発生した縦波が下辺中点(c点)で反射され再び縦波
 となってその波面が到達する応答である($\tau_5=1.5$)。⑥、⑦、⑧はb点から発生した応力波がはり下辺に斜め入射した後、斜め反射されその波面が到達する応答である($\tau_6=1.641$ 、 $\tau_7=2.008$ 、 $\tau_8=2.382$)。周知のように、境界での斜め入射波は縦波と横波の2種類の波の組合せとして反射するので、反射後着目点に到達する応力波の種類は縦波と横波の速度の違いに依存する。⑥、⑦、⑧の波線はこれを示している。

ここで、縦波と横波をP, S、はりの上辺、下辺そして端部をU, L, E、載荷中央、載荷端部そして下辺中点をa, b, cと記せば、上で述べた応力変動に対する応力波の伝播経路は、①= P_u^a 、②= P_u^b 、③= S_u^a 、④= S_u^b 、⑤= $P_u^a P_L^c$ 、⑥= $P_u^b P_L$ 、⑦= $P_u^b S_L$ 、⑧= $S_u^b P_L$ と記すことが出来るであろう。同様に、⑨から⑬の応力変動に対応する応力波の伝播経路と到達時刻は、次のように表される。⑨= $P_u^a P_L^c P_u^a$ ($\tau_9=2.5$)、⑩= $S_u^a S_L^c$ ($\tau_{10}=2.535$)、⑪= $P_u^b P_L P_u$ ($\tau_{11}=2.587$)、⑫= $P_u^b P_E$ ($\tau_{12}=2.713$)、⑬= $S_u^b S_L$ ($\tau_{13}=2.775$)、

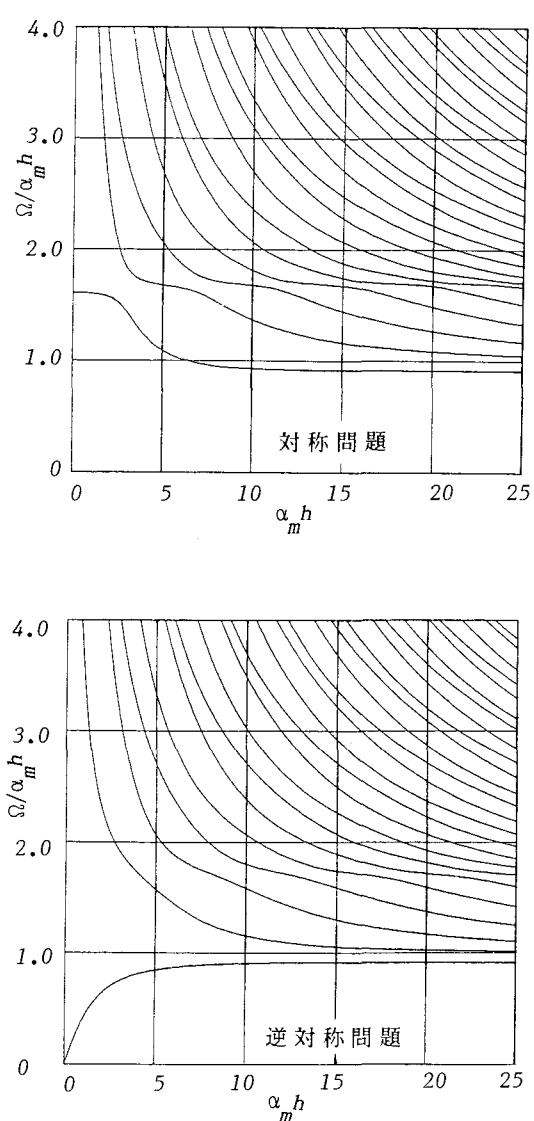


図2 固有値 $\Omega (= \omega h/c_2)$ の分布

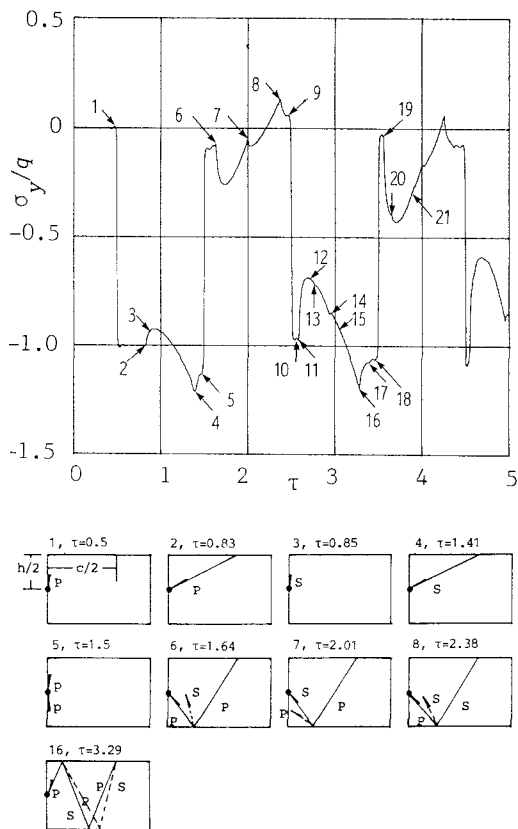


図3 はり中央点の応力 σ_y の初期応答曲線と
応力波の経路

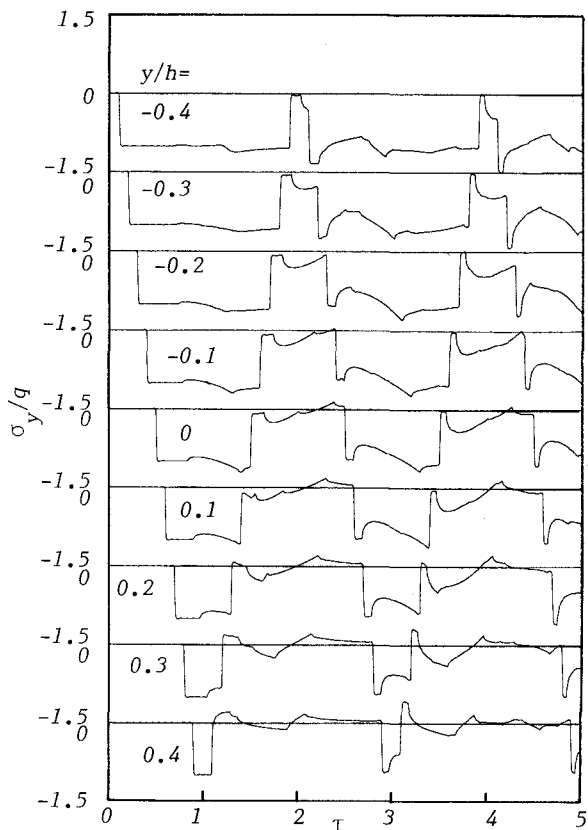


図4 中央断面の応力 σ_y の初期応答曲線

⑭ = $P_U^b P_L S_U$ ($\tau_{14} = 2.940$), ⑮ = $P_U^b P_E P_L$ ($\tau_{15} = 3.060$), ⑯ = $P_U^b S_L P_U$, および $S_U^b P_L P_U$ ($\tau_{16} = 3.294$), ⑰ = $S_U^b P_E$ ($\tau_{17} = 3.412$), ⑱ = $P_U^a P_L^c P_U^a P_L^c$ ($\tau_{18} = 3.5$), ⑲ = $P_U^b P_L P_U P_L$ ($\tau_{19} = 3.563$), ⑳ = $S_U^b P_L S_U$, および $P_U^b S_L S_U$ ($\tau_{20} = 3.651$), ㉑ = $P_U^b S_E$ ($\tau_{21} = 3.879$). もちろん, 本数値結果による応力波の到達時刻は波線理論によるものと全く一致した. なお, ⑯⑳の応答は, 応力波の経路と種類は違うがその到達時刻が同じである2つの応力波が同時に入射する場合である. このように時刻が経つほど応力波の種類, 経路などが複雑にはなるが, $\tau > 4$ の時間領域においても, 詳細な応力波の伝播経路を考えることにより応力変動の説明が出来るものと思われる. 以上のように本数値結果が波線理論による応力波の到達時刻を的確に捕らえていることは, 本解析手法の妥当性と数値計算結果の信頼性を示唆するものと言える. 中央断面($x = l/2$)の σ_y の時間的変動を着目点を変えて描いたものが図4である. はり上辺中央で発生した縦波の波頭がはり下辺へと進行すると共に下辺で反射され, さらに上辺へと進行する様子が読み取れる. その後は上・下辺で反射を繰り返すが, 荷重端部やはり両端からの応力波の影響を受け応答波形に乱れがでてくる. なお, 値としては小さいが, 引張り応力が発生していることは興味深い.

次に, 応力 σ_x の応答を検討するため, 図5に中央断面での初期応答曲線を示した. はり上辺, 下辺での応答については, 古典はり理論およびTimoshenkoはり理論の結果も併せて示している. なお, Timoshenkoは

り理論でのせん断修正係数 κ は Cowper [12] による $\kappa = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$ を用いた。本解析による応答曲線の変動点が着目点により異なるのは、はり高方向への応力波の伝播によるものであるが、断面のゆがみを考慮しない古典はり理論や Timoshenko はり理論では応力波の伝播は着目断面内では同じ応答を示すことがこの応答図からも明かである。衝撃を受けた後のごく初期に、はり上辺で僅かであるが引張応力が発生していることは、衝撃時の表面破壊現象に関連して注目すべきであろう。荷重端から発生した縦波の波頭が到達した ($\tau = 2/3 = 0.667$) ものと考えられるが、本数値計算によれば、 $\tau = 0.65$ において $\sigma_x = 0.009q$ となっており、応答が早く始まっている。その原因の一つとしては、はり上辺では級数の収束がはり内部よりも遅いことが上げられ、さらに項数を増やす必要があるだろう。他の応答の開始時刻や変動点を与える時刻は σ_y と同様に波線理論により説明できるが省略する。Euler はりでは衝撃後直ち応答が始まり、Timoshenko はりの応答は遅れて始まるが、その後の応答は平面はりの応答曲線を中心とした応答曲線となっている。

図6は、はり上・下辺中央点での σ_x の長期応答曲線を表している。応答のピーク値はいずれの理論によってもほぼ同じであり、静的応答値の約2倍となっている。これは、分布荷重が幅広く載荷された場合であるので、応力 σ_x にはせん断変形による影響はそれほど現れていない。平面はりと Timoshenko はりの一次固有周期はほぼ等しく応答位相もほぼ等しい結果となっているが、Euler はりの場合は両者に比べて周期が短いため応答にずれが出ている。

図7、図8に $y=0$ 断面のせん断応力 τ_{xy} の初期および長期応答曲線を表している。応力 σ_x の応答と同様に、本解析は応力波の伝播現象を正確に表しているが、古典はり理論はそれを表現できて

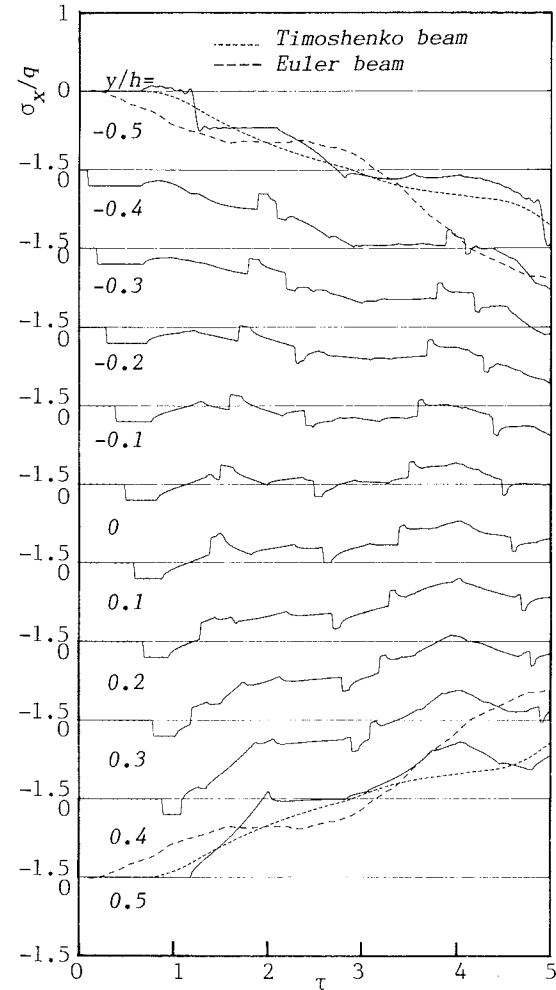


図5 中央断面の応力 σ_x の初期応答曲線

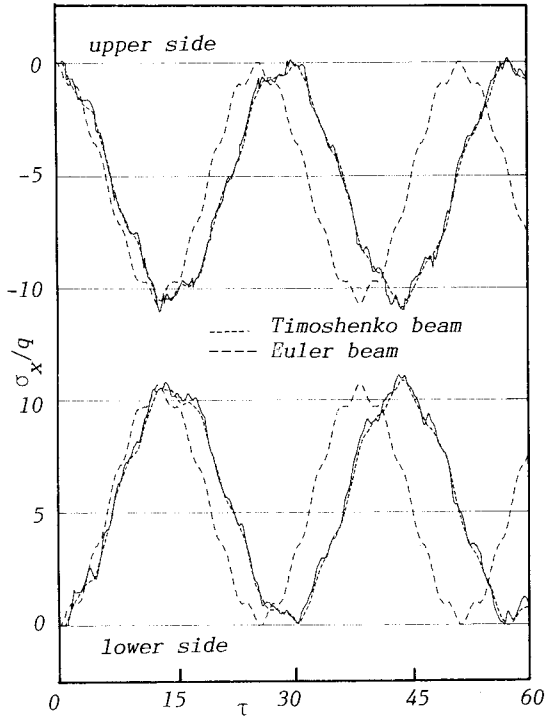


図6 上・下辺中央の応力 σ_x の長期応答曲線

いない。

最後に、図9に中央点の変位 v の長期応答曲線を、EulerおよびTimoshenkoはり理論と比較して示している。Eulerはりの応答ピーク値と他のそれとの差はせん断変形の影響であり、Eulerはりの応答のずれなど傾向は応力 σ_x の場合と同じである。この図では明らかでないが、初期応答は応力波による応答曲線の乱れが観察された。

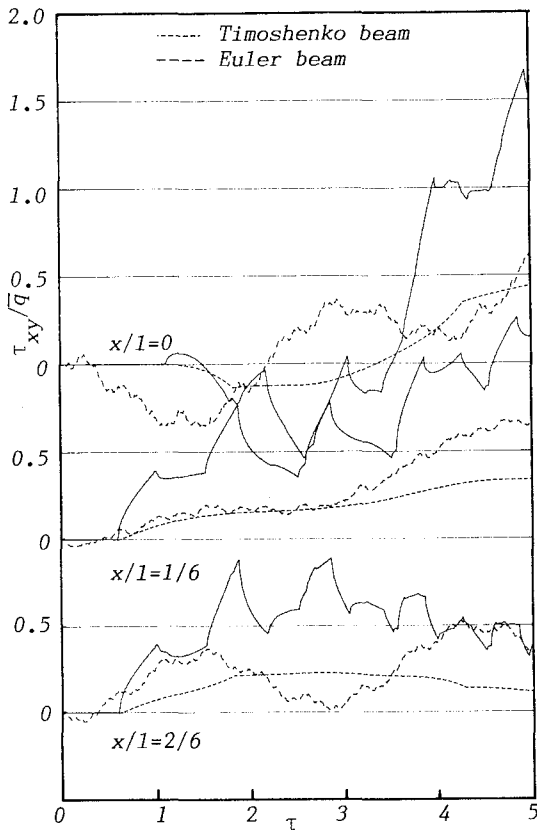


図7 $y=0$ 断面のせん断応力 τ_{xy} の初期応答曲線

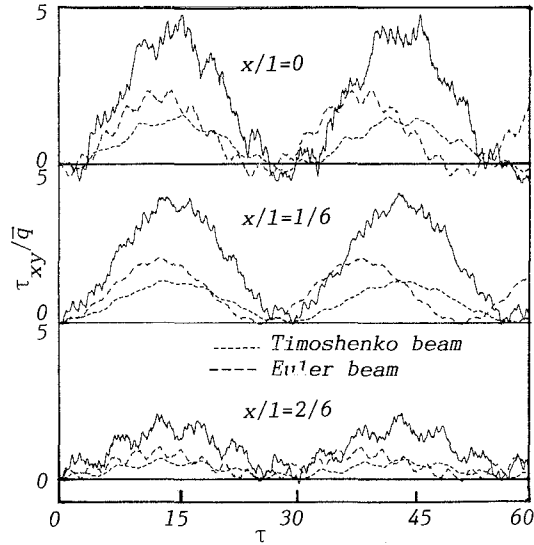


図8 $y=0$ 断面のせん断応力 τ_{xy} の長期応答曲線

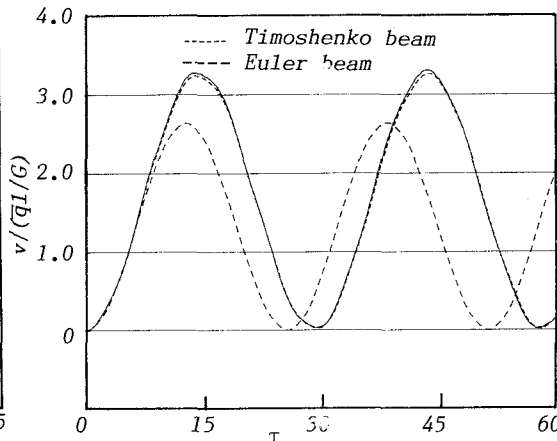


図9 中央点の変位 v の長期応答曲線

5. あとがき

本研究は、衝撃荷重を受ける単純支持はりを固有関数展開法（モード法）により解析する方法を示し、時間に関してステップ状で空間に関しては部分等分布の衝撃荷重が作用した場合の数値計算を行い、はりの内部を伝播する応力波の特性を明らかにしたものである。特に、古典はり理論やTimoshenkoはり理論では求め得ないはりの高さ方向に伝播する応力波を明らかにした。ところで、得られた級数解より数値解を得るには

多数の固有値を必要とするがその収束性を検討すると共に、本数値計算で得られた応力波が到達する時刻と波線理論により計算されたそれとの一致を確認したことより、本解析法の妥当性と数値計算結果の信頼性を示し得たと考える。

なお、数値計算例では限られた荷重形およびはり形状を使用しており、より詳細な応力波伝播特性の解明には、空間および時間に関する種々な荷重形およびはりの形状をパラメーターとした広範な数値データを蓄積する必要がある。文献15でも示しているが、これらのパラメータを本解析法で取り込むことは容易であり、今後の課題と考えている。いずれにしても、本研究の結果は、衝撃問題に対して種々な数値解法が適用される場合の数値解の精度の検証に適用できるものと思われる。また、本解析は弾性域のみを対象としているが、コンクリート構造物の衝撃問題の解明にも基礎的データを提供し得るであろう。

謝辞：本論文の作成にあたり、中岡健一、石丸和宏両君（大学院前期博士課程）の協力を得たこと、および査読者の方々より貴重なご意見を頂いたことを記し、感謝致します。

参考文献

- 1) 青柳史郎：構造物の衝撃現象の数値解析，土木学会論文報告集，206号，pp. 13-22，1972.
- 2) Anderson, R. A.: Flexural vibrations in uniform beams according to the Timoshenko theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 20, pp. 504-510, 1953.
- 3) Achenbach, J. D.: Wave Propagation in Elastic Solids, North-Holland, Amsterdam, pp. 331-342, 1973.
- 4) Brock, L. M.: The transient field under a point force acting on an infinite strip, Journal of Applied Mechanics, Vol. 53, pp. 321-325, 1986.
- 5) 宇治橋貞幸，山田正直：高次近似理論によるはりの衝撃応答の解析，機械学会論文集(A編)，49巻，445号，pp. 1110-1118，1983.
- 6) Eringen, A. C. and Suhubi, E. S.: Elastodynamics, Vol. 2, Linear theory, Academic Press, London, 1975.
- 7) Williams, D.: Displacements of linear system under a given transient load, The Aeronautical Quarterly, Vol. 1, pp. 123-136, 1949.
- 8) Kobayashi, H., Sonoda, K. and Nishikawa, T.: Effect of shear deformation on dynamic response of curved slab bridge to moving loads, Proc. of International Symposium on Geomechanics, Bridges and Structures, pp. 547-552, 1987.
- 9) Reismann, H.: On the forced motions of elastic solids, Applied Science Research, Vol. 18, pp. 156-165, 1967.
- 10) Lee, Y.-C. and Reismann, H.: Dynamics of rectangular plates, International Journal of Engineering Sciences, Vol. 7, pp. 93-113, 1969.
- 11) Weingarten, L. I. and Reismann, H.: Forced motion of cylindrical shells - a comparison of shell theory with elasticity theory, Z.A.M.M., Vol. 54, pp. 181-191, 1974.
- 12) Weaver, R. and Pao, Y.-H.: Axisymmetric elastic waves excited by a point source in a plate, Journal of Applied Mechanics, Vol. 49, pp. 821-836, 1982.
- 13) Pao, Y.-H.: Elastic waves in solids, Journal of Applied Mechanics, Vol. 50, pp. 1152-1164, 1984.
- 14) 小林治俊，園田恵一郎，山本新，中岡健一：衝撃荷重を受ける厚円盤の応力波伝播解析，構造工学にお

ける数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 14, pp. 275-280, 1990.

- 15) 小林治俊, 園田恵一郎, 上林厚志, 中岡健一: 落石覆工に作用する衝撃土圧の三次元動弾性論による一検討, 落石等による衝撃問題に関するシンポジウム講演論文集, 土木学会, pp. 99-100, 1991.
- 16) 佐藤泰夫: 弾性波動論, 岩波書店, 1978.
- 17) Kobayashi, H., Okuda, T. and Sonoda, K.: Free vibration of simply supported beams of arbitrary depth, Mem. Fac. Engng., Osaka City University, Vol. 29, pp. 177-191, 1988.
- 18) Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, Journal of Applied Mechanics, Vol. 33, pp. 335-340, 1966.
- 19) 長谷川久夫: 二次元弾性問題の変位関数のある性質, 機械学会論文集, 41巻, 352号, pp. 3494-3496, 1975.

付録: 単純支持はりの静的解

2次元平面応力問題の変位関数[19]を用いて求めた静的解の結果を以下に示す.

(1) 対称問題

$$u_1^s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m [(A+B) \cosh \alpha y + B \alpha y \sinh \alpha y] \cos \alpha x \quad (A1)$$

$$v_1^s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m [(A-2B/\mu) \sinh \alpha y + B \alpha y \cosh \alpha y] \sin \alpha x \quad (A2)$$

ここに,

$$A = -\frac{2\nu \sinh \beta + (1+\nu) \beta \cosh \beta}{2G\alpha(1+\nu)(2\beta + \sinh 2\beta)}, \quad B = \frac{\sinh \beta}{2G\alpha(2\beta + \sinh 2\beta)} \quad (A3)$$

(2) 逆対称問題

$$u_2^s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m [(C+D) \sinh \alpha y + D \alpha y \cosh \alpha y] \cos \alpha x \quad (A4)$$

$$v_2^s(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m [(C-2D/\mu) \cosh \alpha y + D \alpha y \sinh \alpha y] \sin \alpha x \quad (A5)$$

ここに,

$$C = -\frac{2\nu \cosh \beta + (1+\nu) \beta \sinh \beta}{2G\alpha(1+\nu)(2\beta - \sinh 2\beta)}, \quad D = \frac{\cosh \beta}{2G\alpha(2\beta - \sinh 2\beta)} \quad (A6)$$

以上において, q_m は次式で与えられる荷重 $q(x)$ のフーリエ展開係数である.

$$q(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m \sin \alpha x, \quad q_m = \frac{2}{l} \int_0^l q(x) \sin \alpha x dx \quad (A7)$$

(1991年9月30日受付)