

鋼・コンクリート合成円版の弾性衝撃応答解析

IMPACT RESPONSE ANALYSIS OF STEEL-CONCRETE COMPOSITE CIRCULAR PLATES

小林 治俊,* 園田恵一郎,** 石丸 和宏***

By Harutoshi KOBAYASHI, Keiichiro SONODA and Kazuhiro ISHIMARU

Method of eigenfunction expansions has been developed for an impact response analysis of axially symmetric, layered circular plates within the framework of the theory of three dimensional elastodynamics. An exact solution is given in the series form of the eigenfunctions which are obtained from the free vibration analysis. Numerical calculations are made for the steel-concrete composite circular plates subjected to step function loads in time. Main attention is focused upon the transverse normal stress wave propagation and also the bond stress between interfaces. Stresses variations at transient states and long time states are shown graphically. The present results can be served as a reference to approximate solutions using numerical approaches such as the finite element method.

1. はじめに

本研究は、鋼板で補強された床版のような鋼・コンクリート合成構造が衝撃荷重を受ける際の動的挙動を明らかにすることを目的としている。これまでに、この種の合成構造の弾性衝撃挙動を理論面から検討した研究としては、岸ら[1]による有限帯板法を用いた鋼・アクリル合成梁の横衝撃に関する研究、著者ら[2, 3]による鋼・コンクリート合成梁および円版の弾性衝撃に関する研究などがある。鋼・コンクリート合成梁や合成床版は土木分野において多用されており、さらに近年鉄筋コンクリート床版の衝撃破壊実験が多くなされるようになったが、衝撃荷重を受ける際の接合面等での弾性応力変動を応力波伝播の観点より理論的に明らかにしておくことは、破壊メカニズムの究明に関連して重要であると思われる。加えて、種々な数値解法により衝撃問題が解析されつつあるが、これらの計算コードの精度の検討面からもその重要性を増している。本研究では、2層（上層鋼・下層コンクリート）、3層（上下層鋼・中間層コンクリート）の軸対称合成円版の弾性衝撃応答解析を3次元動弾性論に基づき行うが、接合面は完全接着されているものとしている。

ところで、動弾性論に基づき衝撃問題を解析する場合、基礎方程式、境界条件等、時間に関係する変数をラプラス変換したのち境界条件を規定してラプラス像空間における解を求め、それにラプラス逆変換を施して実時間に対応する解を求めるのが一般的である。このラプラス逆変換を解析的に行うには、変換パラメータ $p=0$ および振動数方程式より定められる値 $p=\pm ip_m$ (i は虚数単位, p_m は m 次の固有値) の極において留数

* 工博 大阪市立大学助教授

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

** 工博 大阪市立大学教授

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

*** 大阪市立大学大学院前期博士課程

工学部土木工学科 (〒558 大阪市住吉区杉本3-3-138)

定理を適用する。逆変換したのち求められる解は、それぞれ準静的解と擾乱解に対応し、擾乱解は、自由振動問題から導かれる固有関数（モード関数）から成る無限級数で与えられることを多くの解析例が示している。Reismann [4]はこの点に着目し、基礎方程式を最初から固有関数展開法（モード解析）によって解析する定式化を行い、それを矩形板や円筒殻[5, 6]の衝撃応答解析に適用しており、筆者らも平面梁や円盤[7, 8]そして鋼・コンクリート合成梁および円版[2, 3]の弾性衝撃解析で使用しその有用性を示した。すなわち、本法によれば、対象とする問題の固有関数を求めることができれば、煩雑なラプラス逆変換は不要であり、構造物の動的応答解析で通常用いられるモード解析に則る解析過程により解を求めることができ、両手法による結果が一致することは言うまでもない。本研究で取扱う合成円版をラプラス変換による方法で解析するとすれば、単層の円版の場合とは比較にならないほど煩雑なラプラス逆変換が要求されるものと思われる。

2. 自由振動解析

まず最初に、自由振動解析により固有関数（モード関数）を誘導する。図1は軸対称3層円版の座標系を示している。変位 u, w で表わした等方性軸対称問題の運動方程式は物体力が存在しない場合、次式で与えられる。

$$G \left(\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial r} - \frac{u}{r^2} \right) = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (1)$$

$$G \left(\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial e}{\partial z} \right) = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

ここに ρ , G , ν は各々密度、せん断弾性係数、ポアソン比、 t は時間、 ∇^2 はラプラシアン、 e は体積ひずみであり、 $e = (\partial u / \partial r) + (u/r) + (\partial w / \partial z)$ 。

応力・変位関係式は次式で表される。

$$\sigma_r = 2G \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right), \quad \sigma_\theta = 2G \left(\frac{u}{r} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right) \quad (2)$$

$$\sigma_z = 2G \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\nu e}{1-2\nu} \right), \quad \tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r} \right)$$

いま、固有円振動数 ω の調和振動、

$$(u, w) = (U, W) \cos \omega t \quad (3)$$

を仮定し、式(1)へ代入すれば、次式を得る。

$$G \left(\nabla^2 U + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial E}{\partial r} - \frac{U}{r^2} \right) = -\rho \omega^2 U \quad (4)$$

$$G \left(\nabla^2 W + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial E}{\partial z} \right) = -\rho \omega^2 W$$

ここに、 $E = (\partial U / \partial r) + (U/r) + (\partial W / \partial z)$ 。

次に、変位ポテンシャル ϕ_i ($i=1, 2$) を用いて、 U, W を式(5)のように表せば、式(4)は式(6)の波動方程式に変換される。

$$U = \frac{\partial \phi_1}{\partial r} + \frac{\partial^2 \phi_2}{\partial r \partial z}, \quad W = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_2}{\partial r} \right) \quad (5)$$

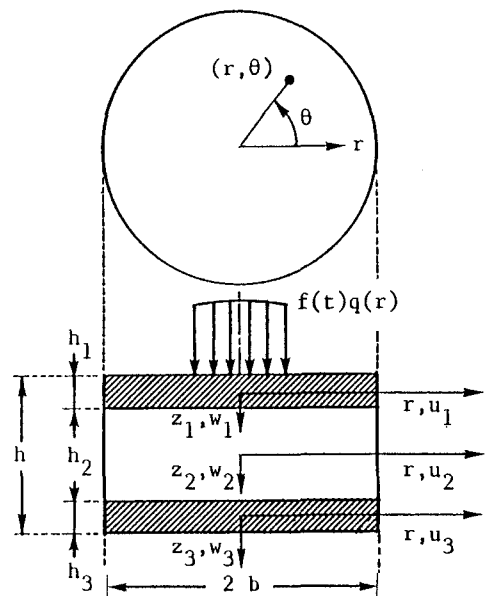


図1 軸対称合成円版の座標系

$$\nabla^2 \phi_i + (\omega/c_i)^2 \phi_i = 0 \quad (i=1, 2) \quad (6)$$

ここに、 $c_1 = \sqrt{2G(1-\nu)/\rho(1-2\nu)}$ 、 $c_2 = \sqrt{G/\rho}$ は各々縦波と横波の速度である ($c_1 > c_2$)。

円版周面 ($r=b$) で単純支持 ($w = \sigma_r = 0$) あるいは固定 ($w = u = 0$) 条件を満足する解を求めることは、動的問題では静的問題と異なって、解析的に複雑となり [9]、得られた解は固有関数展開法には不適當であるので、本研究では解析の便を考慮して次の境界条件を用いることにする。

$$w = \sigma_z = 0 \quad (7)$$

これを満たすには、 $\phi_i(r, z)$ を

$$\phi_i(r, z) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_i(z) J_0(\alpha_m r) \quad (i=1, 2) \quad (8)$$

に採れば良い。ここに、 $J_0(\cdot)$ は0次のベッセル関数、 α_m は $J_0(\alpha b) = 0$ の m 番目の正根である。なお、式(8)の変位ポテンシャルを用いると、円版周面では $u \neq 0$ 、 $\sigma_r \neq 0$ となるので、式(7)の支持条件は単純支持と固定の中間のものとなすことができる [10]。式(8)を式(6)に代入すれば $Z_i(z)$ に関する2階の微分方程式が得られ、その解は次式で与えられる。

$$Z_i(z) = A_i \cosh \lambda_i z + B_i \sinh \lambda_i z \quad (9)$$

A_i 、 B_i は境界条件より定まる積分定数であり、また

$$\lambda_i^2 = \alpha_m^2 - (\omega/c_i)^2 \quad (10)$$

式(8)、(9)を式(5)に代入すれば変位式が決まり、従って応力式は式(2)、(3)より定まる。以上の展開は円版の各層において成立するので、以後関連する諸量に添字 k ($k=1, 2, 3$) を付して k 層における諸式を示すものとする。

次に、円版上下面の自由境界条件および接合面の連続条件は次式で与えられる。

$$\sigma_{z1} = \tau_{rz1} = 0 \quad (z_1 = -h_1/2) \quad (11)$$

$$u_1 = u_2, \quad w_1 = w_2, \quad \sigma_{z1} = \sigma_{z2}, \quad \tau_{rz1} = \tau_{rz2} \quad (z_1 = h_1/2, z_2 = -h_2/2) \quad (12)$$

$$u_2 = u_3, \quad w_2 = w_3, \quad \sigma_{z2} = \sigma_{z3}, \quad \tau_{rz2} = \tau_{rz3} \quad (z_2 = h_2/2, z_3 = -h_3/2) \quad (13)$$

$$\sigma_{z3} = \tau_{rz3} = 0 \quad (z_3 = h_3/2) \quad (14)$$

先に得られた変位・応力式をこれらの条件式に代入すれば、積分定数 $\mathbf{A} = (A_{1k}, B_{1k}, A_{2k}, B_{2k})^T$ に関する次の12元連立同次方程式を得る。

$$\mathbf{C}\mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (15)$$

ここに、 $\mathbf{C}$ は係数行列であり、振動数方程式は、 $|\mathbf{C}| = 0$ で与えられる。これを解けば mn 次の固有円振動数 ω_{mn} ($m, n=1, 2, 3, \dots$) が求まり、対応する積分定数 A_{mnk} を定めれば固有関数(モード関数) $U_{mnk}(\mathbf{r}_k) = [U_{mnk}(\mathbf{r}_k), W_{mnk}(\mathbf{r}_k)]$ が確定する。ただし、 $\mathbf{r}_k = (r, z_k)$ 。

固有関数の直交条件は、相反作用の定理を適用すれば次のように得られる。

$$\sum_{k=1}^3 \int_{V_k} \rho_k U_{mnk}(\mathbf{r}_k) U_{stl}(\mathbf{r}_k) dV_k = \delta_{ms} \delta_{nt} N_{mn}^2 \quad (16)$$

ここに、 δ_{ms} 、 δ_{nt} は Kronecker のデルタ、 N_{mn} はノルムであり、積分は物体全体に行う。

ところで、以上の取り扱いには λ_{ik} が実数、すなわち $\alpha_m c_{ik} > \omega$ の場合であるが、式(10)から分かるように $\alpha_m c_{ik} < \omega$ の場合は虚数となる。この場合は複素演算により実変数の式形に変形すればよい。

3. 衝撃応答解析

円版上面に衝撃荷重 $q(r)f(t)$ が作用する場合を取扱う。衝撃問題の基礎方程式、円版周面および下面の境界条件さらに接合面の連続条件は自由振動解析の場合と同じであり、荷重が作用する上面の境界条件は次の

ように規定される。

$$\sigma_{z1} = -q(r)f(t), \quad \tau_{rz1} = 0 \quad (z_1 = -h_1/2) \quad (17)$$

さて、衝撃問題に対する式(1)の解を、次のように慣性力の影響を無視した静的荷重 $q(r)$ による解、 $\mathbf{u}^s_k = (u^s_k, w^s_k)$ 、とそれを考慮した解（擾乱解）、 $\mathbf{u}^D_k = (u^D_k, w^D_k)$ 、の和として与える。

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}_k, t) = f(t)\mathbf{u}^s_k(\mathbf{r}_k) + \mathbf{u}^D_k(\mathbf{r}_k, t) \quad (18)$$

静的解 $\mathbf{u}^s_k(\mathbf{r}_k)$ は式(1)より慣性項を省いた次式を満足する。

$$G \left[\nabla^2 u^s_k + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial E^s_k}{\partial r} - \frac{u^s_k}{r^2} \right] = 0, \quad G \left[\nabla^2 w^s_k + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial E^s_k}{\partial z_k} \right] = 0 \quad (19)$$

ここに、 $E^s_k = (\partial u^s_k / \partial r) + (u^s_k / r) + (\partial w^s_k / \partial z_k)$ 。境界条件および連続条件を満足する式(19)の解は、Loveの応力関数[11]を用いることにより容易に得ることが出来るが、紙面の都合上省略する。

次に擾乱解 $\mathbf{u}^D_k(\mathbf{r}_k, t)$ は、未定の時間関数 $Q_{mn}(t)$ と前節で求めた固有関数により次のように表す。

$$\mathbf{u}^D_k(\mathbf{r}_k, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Q_{mn}(t) \mathbf{U}_{mnk}(\mathbf{r}_k) \quad (20)$$

式(18)、(20)を式(1)に代入し、式(4)、(19)を考慮して式を変形すれば、次式を得る。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t)] \mathbf{U}_{mnk}(\mathbf{r}_k) = -\ddot{f}(t) \mathbf{u}^s_k(\mathbf{r}_k) \quad (21)$$

両辺に $\mathbf{U}_{stk}(\mathbf{r}_k)$ を掛け積分し固有関数の直交条件を利用すれば、 $Q_{mn}(t)$ に関する次の微分方程式を得る。

$$\ddot{Q}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 Q_{mn}(t) = \ddot{f}(t) Z_{mn} \quad (22)$$

ここに、係数 Z_{mn} は、

$$Z_{mn} = \frac{-1}{N_{mn}^2} \left[\sum_{k=1}^3 \int_{V_k} \rho_k u^s_k(\mathbf{r}_k) \mathbf{U}_{mnk}(\mathbf{r}_k) dV_k \right] \quad (23)$$

で与えられ、式(22)の解は次のDuhamel積分形に得られる。

$$Q_{mn}(t) = Q_{mn}(0) \cos \omega_{mn} t + \frac{1}{\omega_{mn}} \dot{Q}_{mn}(0) \sin \omega_{mn} t + \frac{Z_{mn}}{\omega_{mn}} \int_0^t \ddot{f}(\tau) \sin[\omega_{mn}(t-\tau)] d\tau \quad (24)$$

積分定数 $Q_{mn}(0)$ 、 $\dot{Q}_{mn}(0)$ は次のように決定できる。今、衝撃を受ける前の円版は静止しているものとすれば

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}_k, 0) = \dot{\mathbf{u}}_k(\mathbf{r}_k, 0) = 0 \quad (25)$$

すなわち、式(18)より、

$$\mathbf{u}^D_k(\mathbf{r}_k, 0) = -f(0) \mathbf{u}^s_k(\mathbf{r}_k), \quad \dot{\mathbf{u}}^D_k(\mathbf{r}_k, 0) = -\dot{f}(0) \mathbf{u}^s_k(\mathbf{r}_k) \quad (26)$$

上式の左辺に式(20)を代入したのち両辺に $\mathbf{U}_{stk}(\mathbf{r}_k)$ を掛け積分し、固有関数の直交性を利用すれば、

$$Q_{mn}(0) = -f(0) Z_{mn}, \quad \dot{Q}_{mn}(0) = -\dot{f}(0) Z_{mn} \quad (27)$$

4. 数値計算例

数値計算においては、2層円版（上層コンクリート、下層鋼）と3層円版（上下層鋼、中間層コンクリート）を取扱う。鋼板厚はいずれの場合も円版厚の1割、すなわち2層円版での層厚比は、 $h_1/h=0.9$ 、 $h_2/h=0.1$ 、3層円版では、 $h_1/h=h_3/h=0.1$ 、 $h_2/h=0.8$ である。円版厚/直径比はいずれの場合も $h/2b=0.3$ とする。また、鋼、コンクリートの材料定数には表1の数値を用いた。

表1 材料定数

	鋼	コンクリート
密度 ρ (tf/m ³)	7.85	2.3
ヤング率 E (tf/m ²)	2.1×10^7	2.4×10^6
ポアソン比 ν	0.3	0.167

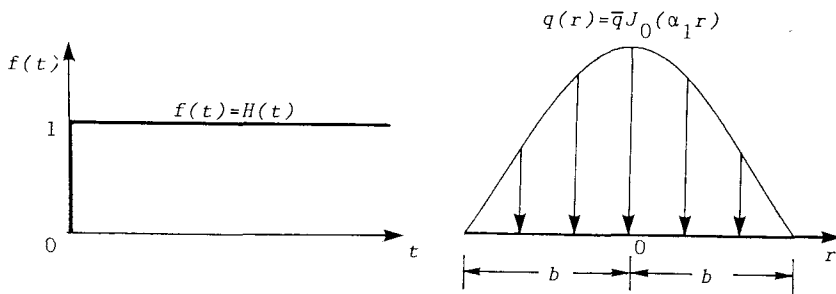


図2 衝撃荷重 $f(t)q(r)$

合成床版の衝撃挙動の基礎的データを得るために、衝撃荷重は、図2示すように時間に関してはステップ関数 $f(t)=H(t)$ とし、空間に関しては余弦波形にほぼ等しい分布荷重 $q(r)=q_0 J_0(\alpha_1 r)$ を用いた。振動数方程式は、Regula-Falsi法により数値的に解き固有値を求めた。級数解の項数は、2層円版、3層円版ともに $n=1000(m=1)$ とし、全ての計算を倍精度で行った。なお、時間は無次元時間 $\tau (=ct/h)$ で取扱う。すなわち、コンクリート内部を進行する縦波（速度 $c=\sqrt{2G_c(1-\nu_c)/\rho_c(1-2\nu_c)}$ ）が円版厚 h を進むに要する時間を1とする。ちなみに、コンクリート、鋼の縦波の速度は各々3311(m/sec)、5941(m/sec)である。

図3は、2層円版の中心軸上 ($r=0$) の応力 σ_z の初期応答曲線であり、時間刻み $\Delta\tau=0.005$ として描いている。図において応答曲線が不連続的に変動している箇所は応力波の波面が到達したことを示している波線理論[12]により、着目点に到着する応力波の種類、伝播経路、到達時刻を幾何学的考察により説明できるが、本例は円版上面で全面載荷された場合であるため、応答は主として縦波に依存している。特に鋼板内で反射・透過を繰り返す応力波の波面が到達する度に小刻みに不連続な変動を繰り返していることが分かる例えば、(a)点の応答は、載荷面中央点で発生した縦波が着目点に最初に到達した応答であり ($\tau=0.9$)、この応力波が到達するまでは無応答である。(b)点の応答は、(a)点での応答の縦波がコンクリート層内に反射され、さらにコンクリート層上面で反射し接合面に到達した縦波 ($\tau=2.70$) であり、(c)点の応答は、到達時刻 ($\tau=2.81$) は同じであるが、その経路が違う縦波が同時に到達した応答である。すなわち、一つは (a) 点での応答の縦波が鋼板内に透過し、鋼板下面で反射され接合面よりコンクリート層内に透過した後コンクリート層上面で反射され接合面に到達した応力波であり、他は (b) 点での応答の縦波が鋼板内に透過し鋼板下面で反射された後接合面に到達した縦波の応答である。

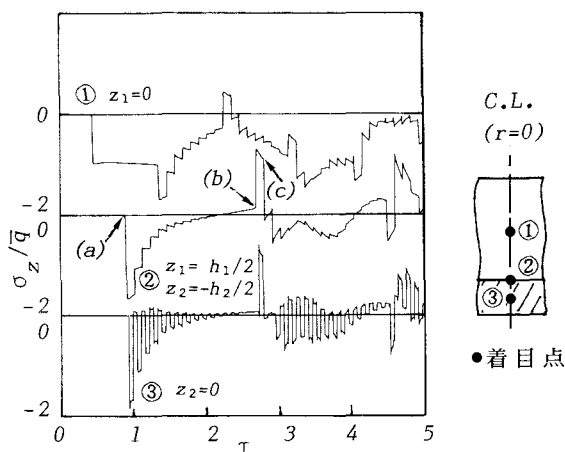


図3 2層合成円版中心軸上の σ_z の初期応答曲線

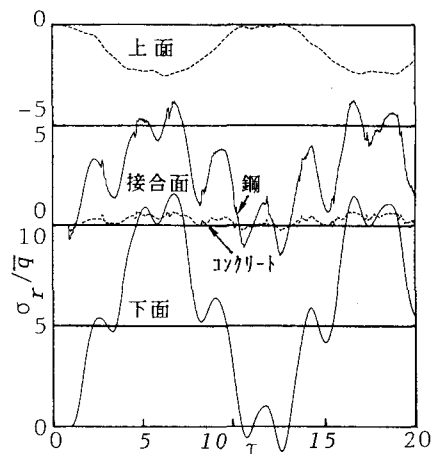


図4 2層合成円版中心軸上の σ_r の長期応答曲線

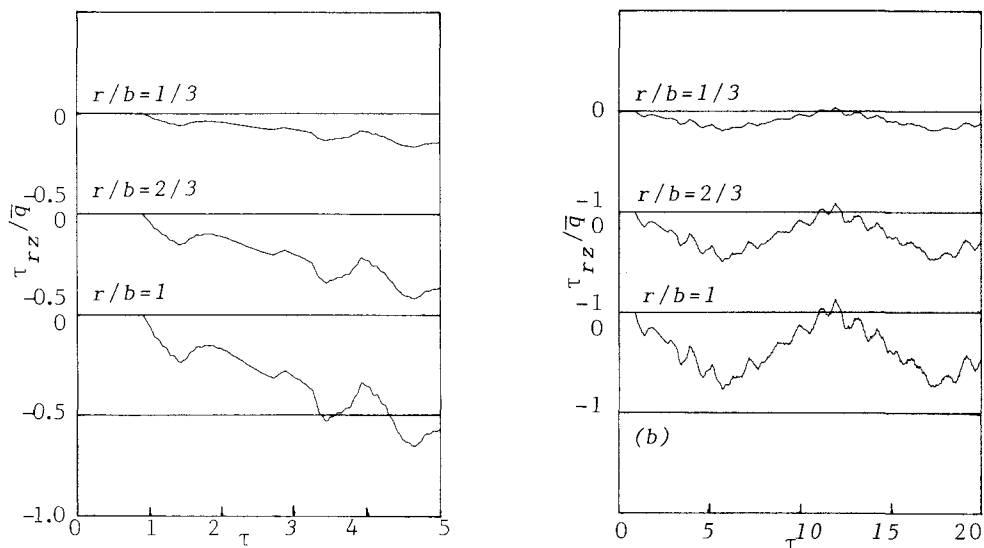


図5 2層合成円版の接合面での τ_{rz} の(a)初期応答曲線、(b)長期応答曲線

ところで、接合面での σ_z の最初の応答値は入射波より大きく、計算結果によれば、 $\sigma_z/\bar{q}=1.674$ となっている。これは次のように説明できると思われる。境界の影響が及ばない時間帯での応答は有限体・無限体にかかわらない。そこで隣接半無限体の接合面に垂直に一樣な縦波のみが入射した場合を考えると、接合面での透過波と入射波の応力比は、 $T=2\lambda/(1+\lambda)$ と求められる。ここに、 $\lambda=E_2c_1/E_1c_2$ 、 E, c はヤング率、波速であり、添字1,2は入射側、透過側を意味する。これを本問題に適用すれば $T=1.659$ となる。本問題の荷重は一樣分布荷重ではないが、ほぼ一致した透過率が得られている。以上のように、本数値結果が波線理論による応答時刻と一致しさらに接合面での透過率の定量的な裏付けが出来たことは、本固有関数展開法の妥当性と数値結果の信頼性を示唆するものと言えよう。なお、剛性の違う異種材料間の入射波の低減については、岸ら[13]による落石覆工に関する研究においても数値的に示唆されている。

図4は、中心軸上の上面、接合面、下面での応力 σ_r の長期応答曲線を示している。いずれも応力波の到達とともに応答が始まり、その最大応答値は静的最大応答値の約2倍である。接合面での鋼とコンクリートの応力値の違いは弾性係数の違いによる。接合面でのせん断応力の初期および長期応答を図5に示した。初期応答を微細にみれば、 σ_z の応答と同様に鋼板内で入射・反射・透過を繰り返す応力波の波面が到達する度に小刻みに不連続な変動を繰り返しているが、 σ_z に比べればその応答振幅は小さい。

次に、3層円版の中心軸上($r=0$)の応力 σ_z の初期応答曲線を図6に示している。接合面での σ_z の最初の応答は、2層円版とは逆に、載荷面で発生した応力波(縦波)が剛性の高い鋼から低いコンクリートに入射し、さらに鋼へと進行するため応答値は2層円版の場合に比べて小さい値となっている。上接合面での最初の応答での透過率を先の式より計算すれば $T=0.271$ となり、本計算値は $T=0.272$ であるから、2層円版の場合同様に精度よい結果が得られているものと考えられる。2層円版では、接合面と鋼板中央では最初の応力波の到達により最大圧縮応力 σ_z が発生しているが、3層円版では、鋼板内部で数回の反射を繰り返した後に最大圧縮応力が発生している。また、2層円版では中立軸より上のコンクリート内部に引張応力が発生しているが、3層円版では中立軸より下部のみ引張応力が発生するようである。図7に σ_r の長期応答、図8には接合面でのせん断応力の短期応答および長期応答を示しているが、いずれも2層円版と同様な応答を示している。ただし、上層が鋼であるため上面での σ_r は大きな圧縮応力となっている。

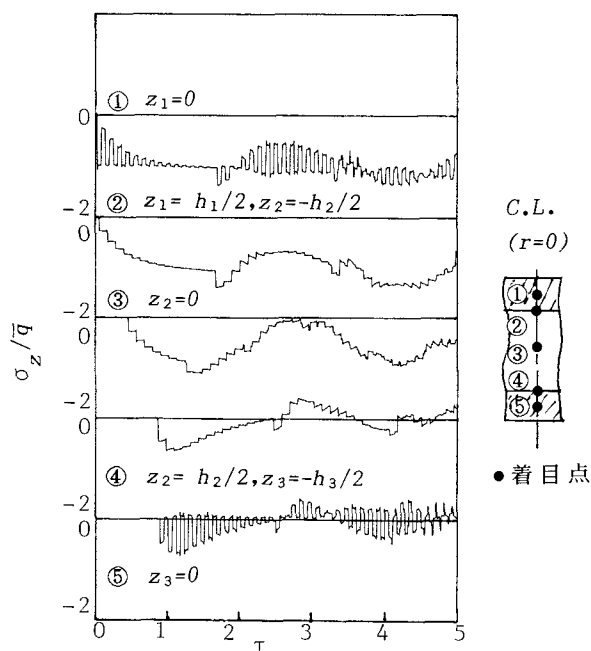


図6 3層合成円版中心軸上の σ_z の初期応答曲線

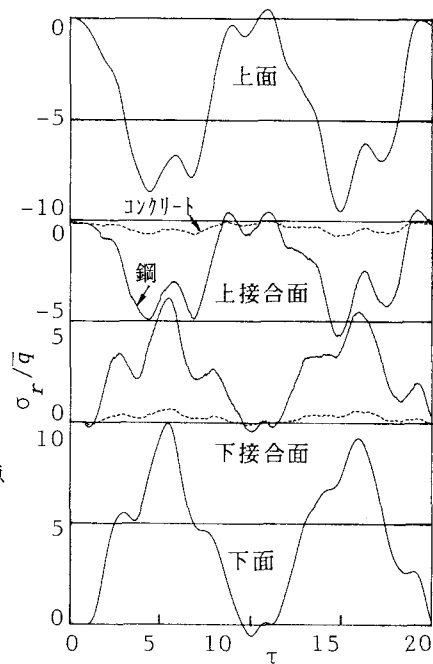


図7 3層合成円版中心軸上の σ_r の長期応答曲線

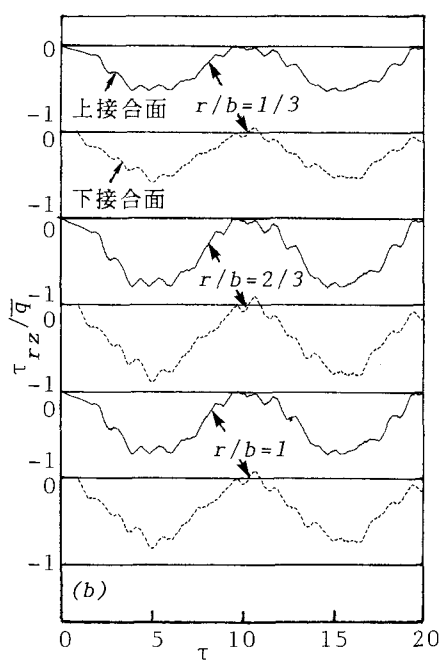
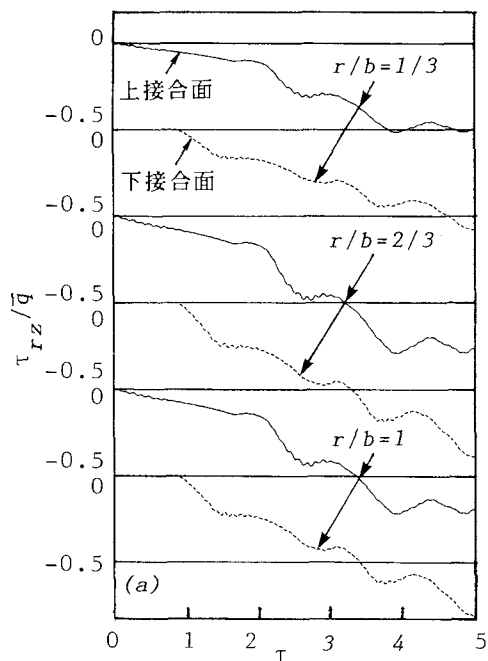


図8 3層合成円版の接合面での τ_{rz} の(a)初期応答曲線, (b)長期応答曲線

5. おわりに

本文は、衝撃荷重を受ける軸対称多層円版を動弾性論に基づく固有関数展開法（モード法）により解析する方法を示し、時間に関してステップ状の衝撃荷重が作用する場合の鋼・コンクリート合成円版に対して数値計算を行い、過渡状態での応力波伝播特性および応力の長期応答を示したものである。特に、鋼板・コンクリートの接合面では応力波の入射・反射・透過現象により、複雑な応力変動を示すことが明らかになった。

本解析は弾性域のみを対象としており、しかも使用した荷重形や円版の形状パラメーターに制限はあるが鋼・コンクリート合成床版の衝撃破壊に関する基礎データを与えるものと思われる。さらに、本級数解法は他の異種材料からなる多層円版の衝撃問題にも適用が可能である。

参考文献

- 1) 岸徳光, 松岡健一, 能町純雄: 単純支持された多層複合合成梁の横衝撃について, 材料, 34巻, pp. 1375-1381, 1985.
- 2) 小林治俊, 園田恵一郎, 鹿島光洋: 単純支持された鋼・コンクリート合成梁の弾性衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 38A(投稿中).
- 3) 小林治俊, 園田恵一郎, 石丸和宏: 衝撃荷重を受ける鋼・コンクリート合成円板の応答解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 15, pp. 419-424, 1991.
- 4) Reismann, H.: On the Forced Motions of Elastic Solids, Applied Science Research, Vol. 18, pp. 156-165, 1967.
- 5) Lee, Y. C. and Reismann, H.: Dynamics of Rectangular Plates, International Journal of Engineering Sciences, Vol. 7, pp. 93-113, 1969.
- 6) Weingarten, L. I. and Reismann, H.: Forced Motion of Cylindrical Shells-A Comparison of Shell Theory with Elasticity Theory, ZAMM, Vol. 54, pp. 181-191, 1974.
- 7) 小林治俊, 奥田東吾, 園田恵一郎: 衝撃荷重を受ける単純支持はりの応力波伝播解析, 構造工学論文集 Vol. 38A(投稿中).
- 8) 小林治俊, 園田恵一郎, 山本新, 中岡健一: 衝撃荷重を受ける厚円盤の応力波伝播解析, 構造工学における数値解析法シンポジウム論文集, Vol. 14, pp. 275-280, 1990.
- 9) Hutchinson, J. R.: Axisymmetric Flexural Vibrations of A Thick Free Circular Plate, Journal of Applied Mechanics, Vol. 46, pp. 133-144, 1979.
- 10) 西村源四郎: 振動工学, pp. 422-442, 誠文堂新光社.
- 11) Timoshenko, S. P. and Goodier, J. N.: Theory of Elasticity, 3rd ed., McGraw-Hill, International Edition, Singapore, pp. 380-382, 1970.
- 12) 佐藤泰夫: 弾性波動論, 岩波書店, 1978.
- 13) 岸徳光, 吉田紘一, 松岡健一, 能町純雄: 層状にモデル化した覆工敷砂部の衝撃応答解析, 構造工学論文集, Vol. 34A, pp. 817-826, 1988.

(1991年9月30日受付)