

数値解析による横衝撃を受けるはりの衝突衝撃力の算定法

NUMERICAL ESTIMATION METHOD OF IMPACT FORCE OF BEAMS SUBJECTED TO TRANSVERSE IMPACT

岩崎 正二* 能町 純雄** 宮本 裕***

出戸 秀明**** 方 東平*****

By Shoji IWASAKI, Sumio NOMACHI, Yutaka MIYAMOTO,
Hideaki DETO and FANG Dongping

The purpose of this paper is to present the theoretical relations necessary to clarify the behavior of Bernoulli-Euler beam and Timoshenko beam subjected to transverse impact of elastic spheres and elastic bars.

The magnitude of surface pressure on a beam caused by impact can be obtained by numerically solving the nonlinear integral equation which is derived by combining the Hertz contact-force law with the beam equation and the impactor's motion equation.

As numerical examples, the dynamic response curves of impact force and bending stress for various parameters of infinite and finite beams are presented graphically.

1. まえがき

平面骨組構造物の基本的要素であるはりに球が衝突する問題を、まず衝撃力を未知数とする非線形積分方程式を導き、数値解析を行なって衝撃力を受けるはりの初期挙動を明らかにした。最初に無限長はりを対象に解析を進め、その後細長比や反射波の影響を受ける単純支持はりの解析を行ない両結果を比較検討した。またはりの曲げ振動方程式として回転慣性とせん断変形を考慮したTimoshenko はりの方程式と、それらの項を無視したBernoulli-Euler はりの方程式を用いて解析を行ない、衝撃力に関してはほとんど差がないことを明らかにした。次に弾性棒がはりに衝突する問題を取り上げ、有限長のはりや棒を無限長のはりや棒に仮定して求めた簡略解と、有限長のはりや棒をそのまま厳密に取り扱った積分方程式解を比較検討した。その結果から簡略解法は工学的に十分実用的な解法であることがわかった。さらに弾性球と弾性棒による衝撃力の比較を行なうために、単純支持はりに同重量の弾性球と弾性棒が衝突する場合の数値解析を行なった。その結果から重量比(はりの重量/衝突物体の重量)が大きい範囲では両結果がよく一致することがわかった。最後にはりに弾性球が衝突する問題について、衝撃点の局部変形を含めた球とはりのエネルギーのつり合いを考えることにより最大衝撃力を求める簡略式を誘導した。その際有効長の考え方を取り入れることによりこの簡略式がより広い範囲にわたって適用可能になることがわかった。

*工修 岩手大学助手 工学部土木工学科 (〒020 盛岡市上田4丁目3-5)

**工博 日本大学教授 生産工学部土木工学科 (〒275 習志野市泉町1丁目2-1)

***工博 岩手大学教授 工学部土木工学科 (〒020 盛岡市上田4丁目3-5)

**** 岩手大学助手 工学部土木工学科 (〒020 盛岡市上田4丁目3-5)

*****工修 西安交通大学講師 土木工学科 (中国西安市710049)

2. 弾性球により衝撃されたはり

1) 無限長 Bernoulli-Euler はり

有限長のはりにおいて最初の衝撃が境界に達して反射を生じる前は、無限長はりの波動伝播と同じ状態にあることが知られている。最初に図-1に示すような無限長はりの中央に弾性球が自然落下する問題を考える。はりのたわみの横振動方程式は Bernoulli-Euler はり理論を用いて表わすと次式ようになる。

$$E_1 I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

ここで $E_1 I$ ははりの曲げ剛性、 ρ ははりの単位体積質量（密度）、 A ははりの断面積、 w ははりの任意点のたわみを表わす。

式(1)を座標の原点 $x = 0$ に集中衝撃力 $P(t)$ が作用するとして解くと、たわみとモーメントは青柳¹⁾によると次式ようになる。

$$w(x, t) = \frac{1}{\rho A a} \int_0^t P(t - \tau) \left[\sqrt{\frac{\tau}{2\pi}} \left(\sin \frac{x^2}{4a^2\tau} + \cos \frac{x^2}{4a^2\tau} \right) + \frac{x}{2a} \left\{ S\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi\tau}}\right) - C\left(\frac{x}{a\sqrt{2\pi\tau}}\right) \right\} \right] d\tau \quad (2)$$

$$M_x(x, t) = -\frac{a}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t P(t - \tau) \frac{1}{\sqrt{\tau}} \left(\sin \frac{x^2}{4a^2\tau} - \cos \frac{x^2}{4a^2\tau} \right) d\tau \quad (3)$$

ただし、 $a = \sqrt{\frac{E_1 I}{\rho A}}$ 、 $S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi}{2} t^2 dt$ 、 $C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi}{2} t^2 dt$ 。

衝撃点でのたわみ w_0 とモーメント M_0 は

$$w_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho A a} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t - \tau} d\tau \quad (4) \quad M_0(t) = \frac{a}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{P(\tau)}{\sqrt{t - \tau}} d\tau \quad (5)$$

また、弾性球の運動方程式は、弾性球の質量を M 、球のはりへのくい込み（局部変形）を δ とすると次式のようになる。

$$M(\ddot{w}_0 + \ddot{\delta}) = -P(t) \quad (6) \quad \text{ただし、ドットは時間に関する微分を表わす。}$$

一方、Hertz の接触理論より P と δ の関係を次式のように仮定する（図-2）。

$$\delta(t) = K P^{\frac{2}{3}} \quad (7)$$

ここで、 $K = \left\{ \frac{9\pi^2 (k_1 + k_2)^2}{16R} \right\}^{\frac{1}{3}}$ 、 $k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}$ 、 $k_2 = \frac{1 - \nu_2^2}{\pi E_2}$ 。

ただし、 ν_1 、 E_1 ははりのポアソン比と弾性係数を、

ν_2 、 E_2 は弾性球のポアソン比と弾性係数を表わす。

式(6)を解くと弾性球の変位 $u(t)$ は

$$u(t) = w_0 + \delta = -\frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t - \tau) d\tau + V_0 t \quad (8)$$

ただし、 $V_0 = \sqrt{2gh}$ 、 V_0 は弾性球の初速度、 g は重力加速度、 h は弾性球の落下高さを表わす。

H. Schwiager²⁾に従って式(4)、(7)を式(8)に代入すると衝撃力 $P(t)$ を定める次のような非線形積分方程式が得られる。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho A a} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t - \tau} d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t - \tau) d\tau = V_0 t \quad (9)$$

また上式は見方をかえると先端に曲率半径 R を有する質量 M の物体が無限長はりに衝突する場合にも適用できる式である。式(9)より求めた衝撃力 $P(t)$ を式(4)、(5)に代入することにより衝撃点でのたわみとモ

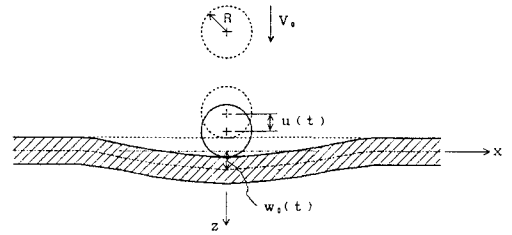


図-1 弾性球による衝撃

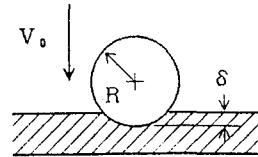


図-2 弾性球のはりへのくい込み

ーメントを求めることができる。さらに式(9)の左辺において弾性球の落下によるはりの局部変形を省略すると、衝撃力を定める積分方程式は第1種ボルテラ型となり衝撃力の解は次式のように求められる。

$$P(t) = c M V_0 \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - c e^{c^2 t} \cdot E_{\text{rfc}}(c \sqrt{t}) \right\}$$

ここで、 $c = \frac{2\sqrt{2}\rho A a}{M}$ 、 $E_{\text{rfc}}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$: ガウスの余誤差関数。

上式より局部変形を省略した解は、衝撃力の最大値が無限大となるので工学的に実用的な解とはいえない。従ってこの種の問題で衝撃力を集中荷重と仮定した場合は局部変形の項は無視できない項であることがわかる。

2) 無限長 Timoshenko はり

次に、はりが衝撃されると衝撃点から縦波が伝播し、続いてせん断波が伝播し、これらの波の重ね合わせにより衝撃応力が表わされることはよく知られた事実である。このような応力波の伝播を考慮する場合には、はりの横振動方程式は回転慣性及びせん断変形を考慮した Timoshenko はりの式を用いなければならない。

$$E_1 I \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} - \left(\rho I + \frac{\rho E_1 I}{\kappa G} \right) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} + \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 I}{\kappa G} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0 \quad (10)$$

ここで、 κ はせん断変形に対する補正係数で G. R. Cowper³⁾ によると長方形断面に対しては $\kappa = 10(1 + \nu)/(12 + 11\nu)$ の値をとる。G ははりのせん断弾性係数を表す。

無限長 Timoshenko はりにおいて座標の原点 $x = 0$ に集中衝撃力 $P(t)$ が作用した場合のたわみとモーメントの式は B. A. Boley と C. C. Cho⁴⁾ の解を応用すると次のようになる。

$$w(x, t) = \frac{C_0}{2E_1 A} \int_0^t P(\tau) \left[\frac{2B}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \cdot \varepsilon^2} \phi_4 \cdot \left\{ \sin^2 \frac{C_0 \varepsilon}{2r} (t - \tau) \cosh B \phi_4 \frac{x}{r} - \sinh^2 \frac{B \phi_4}{2r} x \right\} d\varepsilon + \eta \right] d\tau \quad (11)$$

$$M_x(x, t) = \frac{\kappa C_0}{2} \int_0^t P(\tau) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\phi_4}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \cdot \varepsilon^2} \sin \frac{C_0 \varepsilon}{r} (t - \tau) \cosh B \phi_4 \frac{x}{r} d\varepsilon + \frac{x}{\kappa} \right\} d\tau \quad (12)$$

ここで、 $r = \sqrt{I/A}$ 、 $\eta = C_0/C_s$ 、 $C_0 = \sqrt{E_1/\rho}$ 、 $C_s = \sqrt{\kappa G/\rho}$ 、 $\phi_4 = \sqrt{\varepsilon} \sqrt{N \sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}$ 、 $B = \sqrt{(\eta^2 + 1)/2}$ 、 $\kappa = 2/(\eta^2 - 1)$ 、 $N = (\eta^2 - 1)/(\eta^2 + 1)$ 。

衝撃点でのたわみ w_0 とモーメント M_0 は

$$w_0(t) = \frac{C_0}{2E_1 A} \int_0^t P(\tau) \left\{ \frac{2B}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \cdot \varepsilon^2} \phi_4 \sin^2 \frac{C_0 \varepsilon}{2r} (t - \tau) d\varepsilon + \eta \right\} d\tau \quad (13)$$

$$M_0(t) = \frac{\kappa C_0}{2} \int_0^t P(\tau) \left\{ \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\phi_4}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \cdot \varepsilon^2} \sin \frac{C_0 \varepsilon}{r} (t - \tau) d\varepsilon \right\} d\tau \quad (14)$$

式(13)を式(4)の代わりに用いると、無限長 Timoshenko はりに弾性球が衝突した際に発生する衝撃力 P を定める非線形積分方程式は次のようになる。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{C_0}{2E_1 A} \int_0^t P(\tau) \left\{ \frac{2B}{\pi} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} - \varepsilon}{\sqrt{x^2 + \varepsilon^2} \cdot \varepsilon^2} \phi_4 \sin^2 \frac{C_0 \varepsilon}{2r} (t - \tau) d\varepsilon + \eta \right\} d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t - \tau) d\tau = V_0 t \quad (15)$$

3) 有限長 Bernoulli-Euler はり

これまでは無限長はりを想定して衝撃力の式を誘導してきたが、さらに細長比や反射波の影響を受ける有限長はりを対象として衝撃力の式を誘導する。

長さ l の単純支持はりの任意点 $x = \xi$ に集中荷重 $P(t)$ が作用する場合は任意点のたわみとモーメントは次式のようになる。

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin \alpha_n (t - \tau)}{\alpha_n} d\tau \sin \frac{m \pi}{l} \xi \sin \frac{m \pi}{l} x \quad (16)$$

$$M_x(x, t) = \frac{2a^2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \sin \alpha_n(t-\tau) d\tau \sin \frac{m\pi}{l} \xi \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (17)$$

ここで、 $\alpha_n = (\frac{m\pi}{l})^2 a$, $a = \sqrt{\frac{E_1 I}{\rho A}}$

衝撃点のたわみの式は

$$w(\xi, t) = \frac{2}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin \alpha_n(t-\tau)}{\alpha_n} d\tau \left(\sin \frac{m\pi}{l} \xi \right)^2 \quad (18)$$

式(18)を用いると単純支持はりの中央に弾性球が衝突する場合の衝撃力を定める非線形積分方程式は次のようになる。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{2}{\rho A l} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin \alpha_n(t-\tau)}{\alpha_n} d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau) (t-\tau) d\tau = V_0 t \quad (19)$$

上式はTimoshenkoが求めた式と一致する⁵⁾。

4) 有限長Timoshenkoはり

次に単純支持はりの衝撃応答解析にBernoulli-Eulerはり理論でなくTimoshenkoはり理論を適用する。

単純支持Timoshenkoはりの任意点 $x = \xi$ に衝撃力 $P(t)$ が作用する場合、はりのたわみを w 、曲げによるたわみ角を ψ とすると垂直方向と回転方向の運動方程式は次のようになる。 δ はデルタ関数を表わす。

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - P(t) \delta(x - \xi) \quad (20) \quad Q - \frac{\partial M_x}{\partial x} = \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (21)$$

せん断力 Q とモーメント M_x は次式のように表わされる。

$$Q = \kappa A G \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \psi \right) \quad (22) \quad M_x = -E_1 I \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (23)$$

式(20), (23)に $\sin \frac{m\pi}{l} x$ を、式(21), (22)に $\cos \frac{m\pi}{l} x$ を乗じて0から l まで積分を行なう。

その後ラプラス変換を行ない整理すると次のようなマトリックス方程式を得る。

$$\begin{bmatrix} \frac{m\pi}{l} & 0 & \rho A s^2 & 0 \\ -1 & \frac{m\pi}{l} & 0 & \rho I s^2 \\ \frac{1}{\kappa A G} & 0 & \frac{m\pi}{l} & -1 \\ 0 & -\frac{1}{E_1 I} & 0 & \frac{m\pi}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathcal{L} C_n[Q] \\ \mathcal{L} S_n[M_x] \\ \mathcal{L} S_n[w] \\ \mathcal{L} C_n[\psi] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathcal{L}[P(t)] \sin \frac{m\pi}{l} \xi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

ここで、 $\mathcal{L}[Q] = \int_0^{\infty} Q e^{-st} dt$ 、 $C_n[Q] = \int_0^l Q \cos \frac{m\pi}{l} x dx$ 、 $S_n[M_x] = \int_0^l M_x \sin \frac{m\pi}{l} x dx$ 。

上式より、モーメントとたわみの解式のみを示すと

$$\mathcal{L} S_n[M_x] = \frac{C_0^2 C_s^2 \mathcal{L}[P(t)]}{(s^2 + n_1^2)(s^2 + n_2^2)} \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{l} \xi \quad (25)$$

$$\mathcal{L} S_n[w] = \frac{\mathcal{L}[P(t)]}{\rho A (s^2 + n_1^2)(s^2 + n_2^2)} \left\{ s^2 + C_0^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{C_s^2}{r^2} \right\} \sin \frac{m\pi}{l} \xi \quad (26)$$

ここで、 $\frac{n_1^2}{n_2^2} = \frac{1}{2} \left[(C_0^2 + C_s^2) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{C_s^2}{r^2} \pm \sqrt{\left\{ (C_0^2 + C_s^2) \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 + \frac{C_s^2}{r^2} \right\}^2 - 4 C_0^2 C_s^2 \left(\frac{m\pi}{l} \right)^4} \right]$

式(25), (26)のフーリエ・ラプラス逆変換を行なうと

$$M_x(x, t) = \frac{2}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_0^2 C_s^2}{n_2^2 - n_1^2} \int_0^t P(\tau) \left\{ \frac{\sin n_1(t-\tau)}{n_1} - \frac{\sin n_2(t-\tau)}{n_2} \right\} d\tau \cdot \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 \sin \frac{m\pi}{l} \xi \sin \frac{m\pi}{l} x \quad (27)$$

$$w(x, t) = \frac{2}{\rho A l} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t \frac{P(\tau)}{n_2^2 - n_1^2} \left[\left\{ \frac{C_s^2}{r^2} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 C_0^2 \right\} \frac{\sin n_1(t-\tau)}{n_1} - \frac{\sin n_2(t-\tau)}{n_2} \right] d\tau$$

$$-\{n_{1m}\sin n_{1m}(t-\tau)-n_{2m}\sin n_{2m}(t-\tau)\}\}d\tau\sin\frac{m\pi}{l}\xi\sin\frac{m\pi}{l}x \quad (28)$$

式(28)を用いると有限長Timoshenkoはりの中央に弾性球が衝突する場合の衝撃力を定める非線形積分方程式は次のようになる。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{2}{\rho A l} \sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty} \int_0^t \frac{P(\tau)}{n_2^2 - n_1^2} \left[\left\{ \frac{C_s^2}{r^2} + \left(\frac{m\pi}{l} \right)^2 C_0^2 \right\} \left\{ \frac{\sin n_{1m}(t-\tau)}{n_{1m}} - \frac{\sin n_{2m}(t-\tau)}{n_{2m}} \right\} - \{n_{1m}\sin n_{1m}(t-\tau) - n_{2m}\sin n_{2m}(t-\tau)\} \right] d\tau + \frac{1}{M} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau = V_0 t \quad (29)$$

5) 数値計算例

最初に長方形断面の無限長鋼はりに弾性球が衝突する問題を扱う。無限長はりに生ずる衝撃力を求める非線形積分方程式(9)の解法に際してはシンプソンの1/3則あるいは3/8則を用い、時間の刻みは1μsecとした。なお数値計算に用いた数値は次の通りである。

- はりの断面寸法 ①: 2.5×2.5(cm²), Z = 2.064(cm³)
 ②: 3.0×3.0(cm²), Z = 4.500(cm³)
 ③: 4.0×4.0(cm²), Z = 10.666(cm³)
 ④: 5.0×5.0(cm²), Z = 20.833(cm³)

ヤング率: $E_1 = E_2 = 2.2 \times 10^6$ (kgf/cm²)

ポアソン比: $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$

単位体積質量: $\rho = 0.801 \times 10^{-5}$ (kgf·sec²/cm⁴)

弾性球の半径: $R = 2$ (cm)

ただしZは断面係数。

なお以下に述べる図-3から図-7までの計算例はすべて無限長はりを対象としている。

図-3ははりの断面寸法が異なる場合の衝撃力の時間的変動を表わしたものであり、図-4は衝撃点の応力の時間的変動を表わしたものである。図よりはりの断面寸法の及ぼす影響は、断面係数が高いほど生ずる衝撃力は大きくなるが、応力は逆に小さくなる。

次に図-5は衝撃力に及ぼす回転慣性及びせん断変形の影響について検討するために断面係数の大きいコンクリートはりを対象に、Bernoulli-Eulerはり理論による積分方程式(9)とTimoshenkoはり理論による積分方程式(15)よりそれぞれ衝撃力を求め比較したグラフである。なおコンクリートはりを使用したので計算に際して新たに次のような数値を用いた。

はりの断面寸法: 6.0×6.0(cm²), Z = 36(cm³)

ポアソン比: $\nu = 1/6$

ヤング率: $E_1 = 2.7 \times 10^5$ (kgf/cm²)

単位体積質量: $\rho = 2.4 \times 10^{-6}$ (kgf·sec²/cm⁴)

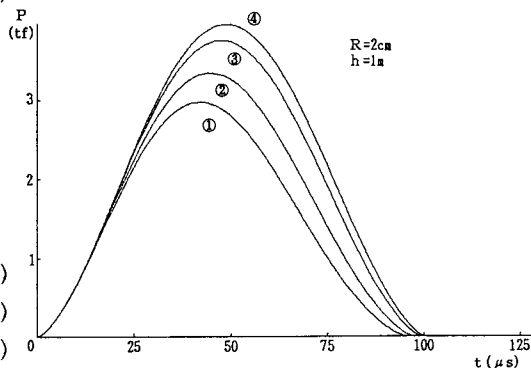


図-3 衝撃力に及ぼすはりの断面寸法の影響

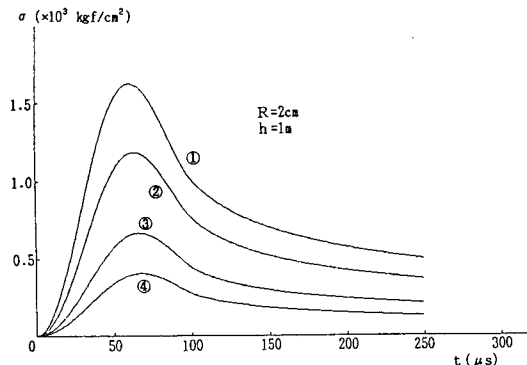


図-4 衝撃応力に及ぼすはりの断面寸法の影響

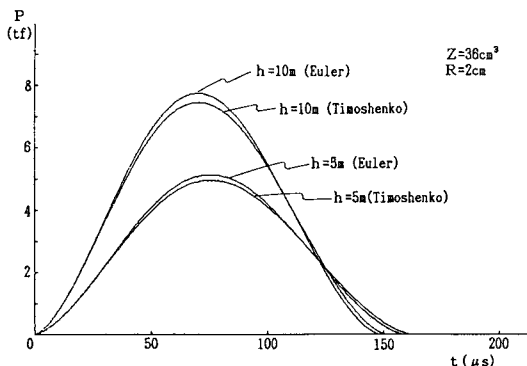


図-5 衝撃力に及ぼす回転慣性及びせん断変形の影響

せん断変形の補正係数: $\kappa = 0.843$

特に Timoshenko はりの方程式より誘導した式 (15) の解法にあたって被積分関数の計算には Filon の数値積分法を適用している。

図-6 は弾性球の半径 $R = 2\text{cm}$ の場合の衝撃力の最大値を、はりの断面寸法をパラメータとして落下高さ $h = 0.1 \sim 9\text{m}$ の場合について図示したものである。

図中⑤と表わされているのは弾性球が剛体平面に落下した場合の計算結果であり、最大衝撃力の計算式は通常次式で表わされる。

$$P_{\max} = \left(\frac{5W_0 h}{2K} \right)^{\frac{3}{5}}$$

ここで、 W_0 は弾性球の重量を表わす。係数 K は式 (7) の K と同じものである。

図より最大衝撃力ははりの断面寸法が大きくなるに従い、剛体平面に弾性球を落とした場合の解に近づくことがわかる。

落体問題においては最大衝撃力を求めることは重要であるが、武藤博士⁶⁾によると外力が瞬間的に作用する世界では変形はもっぱら力積に比例すると述べられており、瞬間的とみなしうる範囲は衝撃の周期が構造物の固有周期より小さい場合であると判断されている。このような強度感に基づくなら衝撃力を力積あるいは反発係数の面から検討することは意味のあることと思われる。また C. Zener⁷⁾ は球と無限板との衝突問題において反発係数を計算し C. V. Raman⁸⁾ による実験結果とよく一致することを示している。

図-7 は H. Schwiager が用いた衝撃パラメータ λ と反発係数 e_p との関係を片対数グラフで表わしたものである。 λ と e_p は次式から計算する。ただし I は衝撃力による力積を表わす。

$$\lambda = \frac{\alpha_1 M}{\sqrt{T}}, \quad e_p = \frac{I}{MV_0} - 1 \quad \text{ここで、} T = \left(\frac{K^3 M^2}{V_0} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\rho A a}}.$$

図より衝撃パラメータ λ が 0 から 0.4 の範囲では反発係数を最小 2 乗法により図中の点線に示すような直線式で近似できることがわかった。 λ ははりの剛度、球の半径、球の落下速度などの影響をすべて含んだパラメータを意味するため 0 から 0.4 の範囲がどのような衝撃であるかを具体的には説明できないが、0.4 を過ぎると反発係数は減少を始め 1.0 を越えると計算不能となる。これは無限長はり理論では λ を大きくすると球の跳ね返り現象がなくなるためである。

次に単純支持はりに弾性球が衝突する問題を扱う。Timoshenko は式 (19) を解くのに 0 から t までの時間を細分し、細分した微小時間中で $P(t)$ は一定と

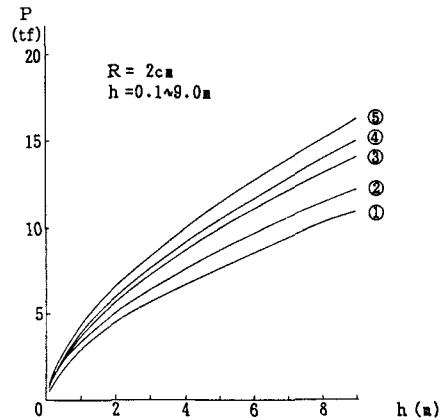


図-6 弾性球の落下高さと衝撃力の最大値

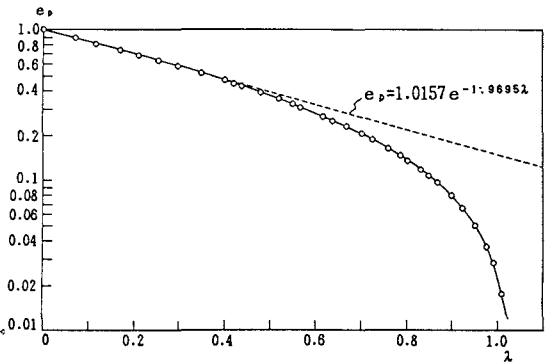


図-7 衝撃パラメータ λ と反発係数 e_p との関係

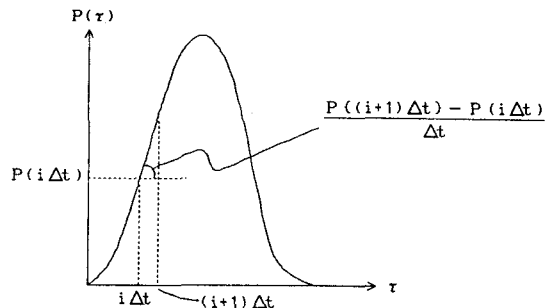


図-8 衝撃力—衝撃時間

して逐次計算を進めていった。本論文では図-8に示すように微小時間内 Δt で衝撃力 $P(t)$ は直線変化ず
るとして計算を進めた。すなわち

$$P(\tau) = \left(\frac{\tau}{\Delta t} - i\right)[P\{(i+1)\Delta t\} - P(i\Delta t)] + P(i\Delta t) \quad (30)$$

$$(i\Delta t \leq \tau \leq (i+1)\Delta t, i=0, 1, 2, \dots)$$

式(30)を式(16), (17)に代入すると任意点のたわみと
モーメントの式は次のようになる。

$$w(x, n\Delta t) = \frac{P(n\Delta t)\ell^3}{48E_1 I} \left\{ 3\left(\frac{x}{\ell}\right) - 4\left(\frac{x}{\ell}\right)^3 \right\} + W_1 \sum_{i=1}^n \{ [P(i\Delta t) - P(\overline{i-1}\Delta t)] \cdot \{ S_w(x, n-i\Delta t) - S_w(x, n-i+1\Delta t) \} \} \quad (31)$$

$$M_x(x, n\Delta t) = \frac{P(n\Delta t)}{2} x + M_1 \sum_{i=1}^n \{ [P(i\Delta t) - P(\overline{i-1}\Delta t)] \{ S_M(x, n-i\Delta t) - S_M(x, n-i+1\Delta t) \} \} \quad (32)$$

$$(0 \leq x \leq \ell/2, n=1, 2, 3, \dots, i=1, 2, 3, \dots, n)$$

ただし、 $\overline{i-1}\Delta t = (i-1)\Delta t$ 、 $W_1 = \frac{2\ell^5}{\Delta t E_1 I a^2 \pi^6}$ 、 $M_1 = \frac{2\ell^3}{\Delta t a^2 \pi^4}$ 、

$$S_w(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^6} \sin \frac{m\pi}{\ell} \xi \sin \frac{m\pi}{\ell} x \sin \alpha_m t, S_M(x, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^4} \sin \frac{m\pi}{\ell} \xi \sin \frac{m\pi}{\ell} x \sin \alpha_m t$$

図-9 ははりの断面寸法 $2.5 \times 2.5(\text{cm}^2)$ 、弾性球の
半径 2cm、弾性球の落下高さ 1m の場合について、は
りの長さ ℓ を 25, 50, 100, 500(cm) と変化させたとき
の衝撃力、弾性球の変位、はりの衝撃点でのたわみの
時間的変化のグラフである。衝撃力、弾性球の変位
ははりの長さが変化してもその値にはほとんど差がみ
られないが、はりの変位は時間が経過すると無限長は
りとは異なる挙動を示している。

図-10 は図-9 と同じ条件においてはりの長さを
50, 100, 200(cm) と変化させたときの衝撃点での応力
の時間的変動のグラフである。図より衝撃応力に関し
ては、はりの長さが短いときは反射波の影響を受けて
応力は変動し、無限長はりのように最初の立ち上がり
に応力の最大値が生ずるとは限らないことがわかる。
しかしはりの長さが 200cm 以上になるとその結果は無
限長はりの結果とほとんど変わらない。

3. 弾性棒により衝撃されたはり

1) 半無限長棒により衝撃された無限長はり

半無限長棒により衝撃された無限長 Bernoulli-
Euler はりの問題は青柳¹⁾、小高と中原⁹⁾ によると次
のように整理される。

弾性棒の縦衝撃理論によれば、初速度 V_0 で運動し
ている半無限長棒の一端に衝撃力 P が作用するとき、
衝撃端の変位 $u_0(t)$ は次式で与えられる。

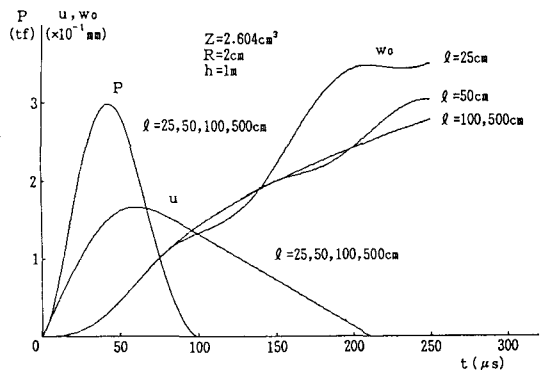


図-9 はりの長さを変えたときの衝撃力、
はりの変位、球の変位

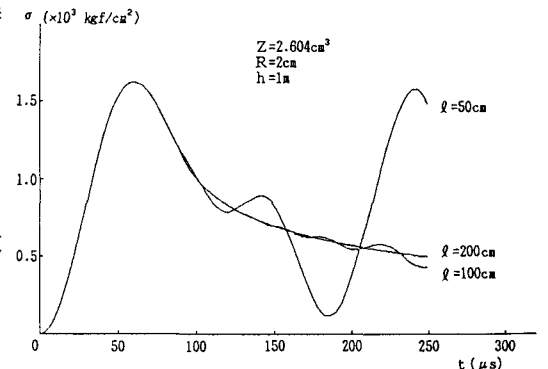


図-10 はりの長さを変えたときのはりの衝撃応力

$$u_0(t) = V_0 t - \frac{1}{\rho_0 A_0 C_b} \int_0^t P(\tau) d\tau \quad (33)$$

ただし、 ρ_0 ：弾性棒の単位体積質量、 $C_b = \sqrt{E_0/\rho_0}$ ：縦波の速度、 E_0 ：弾性棒の弾性係数、 A_0 ：弾性棒の断面積。

無限長はりに弾性棒が衝突する場合の衝突によって生じる衝撃力は無限長はりの衝撃点のたわみ式(4)と弾性棒の端変位式(33)を等置して求めることができる。すなわち

$$V_0 t - \frac{1}{\rho_0 A_0 C_b} \int_0^t P(\tau) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho A a} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau$$

上式をラプラス変換すると衝撃力のラプラス変換 $\bar{P}$ は次式のようにになる。

$$\bar{P} = \frac{V_0 E_0 A_0}{C_b \sqrt{s} (\sqrt{s} + \beta)} \quad (34) \quad \text{ただし、} \beta = \frac{\rho_0 A_0 C_b}{2\sqrt{2} \rho A a}, \quad s \text{ はラプラス演算子。}$$

式(34)をラプラス逆変換すると衝撃力 P が次式のように求められる。

$$\frac{P(t)}{V_0 E_0 A_0 / C_b} = e^{\beta^2 t} \text{Erfc}(\beta \sqrt{t}) \quad (35)$$

ここで、 $\text{Erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt$ ：ガウスの余誤差関数。

また長方形断面の場合、衝撃点においてはりの裏面に生ずる応力 $\sigma_0(t)$ は次式のように求められる。

$$\frac{\sigma_0(t)}{\sqrt{3} V_0 E_1 / C_0} = 1 - e^{\beta^2 t} \text{Erfc}(\beta \sqrt{t}) \quad (36)$$

式(35)からわかるように衝撃力 $P(t)$ は $t=0$ においては $V_0 E_0 A_0 / C_b$ の値をとり、時間とともに 0 まで単調減少する関数で与えられる。また式(36)の衝撃点における応力は衝突後急激に増大するがまもなくゆるやかに増大し、 $(\sigma_0)_{t \rightarrow \infty} = \sqrt{3} V_0 E_1 / C_0$ になる。両者とも収束の速度は β に依存している。

式(35)は衝撃点に局部変形を生じないという仮定のもとで得られた式である。実際の衝突現象では衝撃点に局部変形が存在するので、この点を考慮することによっても解は改善される。弾性棒の先端に曲率 R があるとすると Hertz の弾性接触理論より衝撃力 P と、弾性棒とはりの相対変位 δ との間に次式が成立する。

$$\delta(t) = K P^{\frac{2}{3}}(t) \quad (37)$$

ただし、 $\delta(t) = u_0(t) - w_0(t)$ 、 $K = \sqrt[3]{\frac{9\pi^2 (k_0 + k_1)^2}{16 R}}$ 、 $k_0 = \frac{1 - \nu_0^2}{\pi E_0}$ 、 $k_1 = \frac{1 - \nu_1^2}{\pi E_1}$ 、

ν_0 、 ν_1 、 E_0 、 E_1 はそれぞれ弾性棒とはりのポアソン比と弾性係数を表わす。

式(4)、(33)を式(37)に代入すると衝撃力を定める次のような非線形積分方程式が得られる。

$$K P^{\frac{2}{3}}(t) + \frac{1}{\rho_0 A_0 C_b} \int_0^t P(\tau) d\tau + \frac{1}{\sqrt{2\pi} \rho A a} \int_0^t P(\tau) \sqrt{t-\tau} d\tau = V_0 t \quad (38)$$

2) 有限長棒により衝撃された有限長はり

1) では無限長はりと半無限長棒を対象として衝撃力を求めた。次に図-11(a) に示すような、有限長棒により衝撃される単純支持はりを対象として解析を進める。図-11(b) に示すように衝突した状態での弾性棒の問題を考えると、初速度 V_0 で運動している弾性棒が一端に衝撃力 $P(t)$ を受ける問題と一致する。弾性棒の運動方程式は軸方向変位 u とすると

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C_b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (39)$$

ここで、 $C_b = \sqrt{E_0/\rho_0}$ 。

初期条件と境界条件はそれぞれ次のようになる。

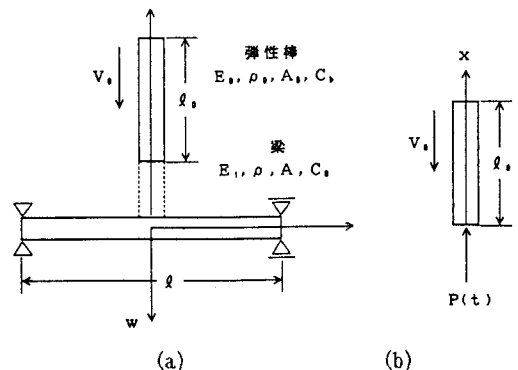


図-11 有限長棒による衝撃

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -V_0 \quad (40)$$

$$\left. \begin{aligned} E_0 A_0 \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} &= -P(t) \\ \frac{\partial u(\ell_0, t)}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

式(39)を有限フーリエ・cosine変換を用いて解析すると任意点の軸方向変位 u は

$$u(x, t) = -V_0 t + \frac{1}{\rho_0 A_0 \ell_0} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau + \frac{2}{\rho_0 A_0 \ell_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin P_n(t-\tau)}{P_n} d\tau \cos \frac{m\pi}{\ell_0} x \quad \left(\text{ここで、} P_n = \frac{m\pi}{\ell_0} C_b \right) \quad (42)$$

衝撃点の軸方向変位 $u_0(t)$ は式(42)に $x=0$ を代入して

$$u_0(t) = -V_0 t + \frac{1}{\rho_0 A_0 \ell_0} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau + \frac{2}{\rho_0 A_0 \ell_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin P_n(t-\tau)}{P_n} d\tau \quad (43)$$

式(18), (43) (符号をかえる) を式(37)に代入することにより、有限長棒により衝撃された単純支持はりに生ずる衝撃力を定める非線形積分方程式が次式のように得られる。

$$K P_n^2(t) + \frac{1}{\rho_0 A_0 \ell_0} \int_0^t P(\tau)(t-\tau) d\tau + \frac{2}{\rho_0 A_0 \ell_0} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin P_n(t-\tau)}{P_n} d\tau + \frac{2}{\rho A \ell} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t P(\tau) \frac{\sin \alpha_n(t-\tau)}{\alpha_n} d\tau = V_0 t \quad (44)$$

単純支持Timoshenkoはりに有限長棒が衝突する場合の衝撃力を求める積分方程式は、式(44)の左辺第4項を式(28)に代えることにより求められる。

3) 数値計算例

長方形断面の単純支持鋼はりの中央に鋼弾性丸棒を落下させる問題を扱う。数値計算に用いた値は次に示す通りである。

はりの諸元

はりの寸法[幅×高さ×長さ(cm)], 断面係数 Z (cm³)

①: 2.5×2.5×300, $Z = 2.604$

②: 5.0×2.5×300, $Z = 5.208$

③: 2.5×5.0×300, $Z = 10.417$

ヤング率 : $E_1 = 2.1 \times 10^8$ (kgf/cm²)

ポアソン比 : $\nu_1 = 0.3$

単位体積質量 : $\rho_1 = 0.801 \times 10^{-5}$ (kgf·sec²/cm⁴)

弾性丸棒諸元

長さ : $\ell_0 = 100$ (cm)

断面積 ①: $A_0 = 0.785$ (cm²) [1.0cmφ]

②: $A_0 = 3.145$ (cm²) [2.0cmφ]

③: $A_0 = 7.069$ (cm²) [3.0cmφ]

衝撃速度(落下高さ) : $V = 313.05$ (cm/sec)

($h = 50$ (cm))

ヤング率 : $E_0 = 2.1 \times 10^8$ (kgf/cm²)

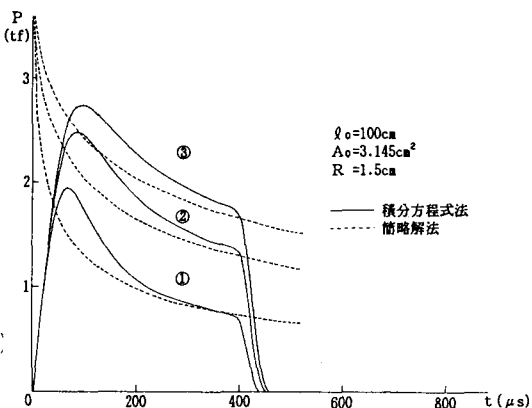


図-12 衝撃力に及ぼすはりの断面寸法の影響

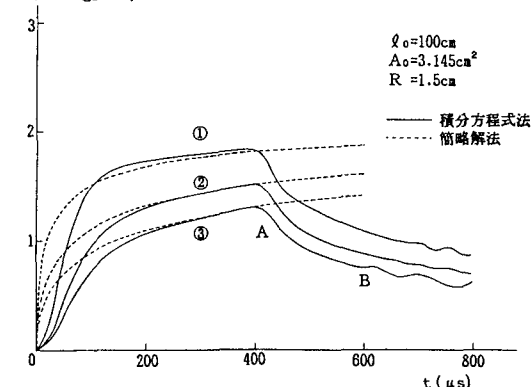


図-13 衝撃応力に及ぼすはりの断面寸法の影響

ポアソン比 : $\nu_0 = 0.3$

単位体積質量 : $\rho_0 = 0.801 \times 10^{-5} \text{ (kgf} \cdot \text{sec}^2 / \text{cm}^4 \text{)}$

曲率半径 (cm) : $R = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0$

図-12 ははりの断面寸法が異なる場合の衝撃力の時間変動を表わしたものであり、図-13 は同じく衝撃点応力の時間的変動を表わしたものである。図中実線は単純はりの級数解と弾性有限棒の級数解に、棒の接触点での局部変形を考慮して誘導した積分方程式(44)を解いて得られた結果である。点線は有限なはりや棒を無限長のはりや棒に置き換えて導いた簡略解(35)であり、局部変形を無視した平面接触を仮定している。図より断面係数が大きいほど衝撃力は大きくなるが、静的な場合と異なりはりに生ずる衝撃応力は小さくなる。

図-12 において実線の衝撃力は衝撃直後急激に増大し、まもなく緩やかに減少し $t = 400 \mu \text{sec}$ の直前で急激に減少し 0 となる。この地点は弾性棒を伝播する圧縮波が自由端で反射され引張波となって衝撃点にまで到着した時間であり、その直後に棒とはりとは接触を終る。すなわち棒中での縦波速度は約 $5.1 \times 10^5 \text{ cm/sec}$ であり、100cmの棒中を1往復するのに要する時間は $390 \mu \text{sec}$ となり、図中の結果と一致する。

以上のことより無限長棒を仮定した簡略解(35)は、反射波が衝撃点に到着した以後には適用できない。また理想的な平面接触を仮定しているのも $t = 0$ で有限な値をもっている。無限長はりや半無限棒の仮定に接触点での局部変形を考慮して誘導した積分方程式(38)による結果は図中に示していないが衝撃初期の立ち上がりの状態は式(44)と同じ結果となる。しかし途中から式(44)の値から離れ振動しながら発散する。

次に図-13 においてははりの衝撃点に生ずる衝撃応力は、衝撃直後は急激に増大するがまもなく増大は緩やかになり A 点で減少し始める。A 点は前述したはりや弾性棒の接触が終る時間で、次に曲線が乱れる B 点ははりの両端で反射された応力波が衝撃点に到着したときである。解析解と積分方程式による解は衝撃直後を除き良い一致を示している。

図-14 は弾性丸棒の断面積を変化させたときの衝撃点でのはりの時間的変動を表わしたものである。ただしはり寸法 $5.0 \times 2.5 \times 300 \text{ (cm}^3 \text{)}$ のはりを採用している。はりの応力は丸棒の断面積が大きいほど大きくなる。また積分方程式法と簡略解との差は、断面積を小さくするほどよく一致する。

最後に、図-15 ははり寸法 $2.5 \times 5.0 \times 300 \text{ (cm}^3 \text{)}$ のはりに対して弾性丸棒の接触点での曲率半径を変えた場合の衝撃力の変化を示したものである。曲率半径が大きくなるほど立ち上がりは急激になるが、曲率半径が 1.5cm 以上になると立ち上がりを除いた衝撃力の応答はあまり変化がないようである。

4) 弾性球との比較

長方形断面の単純支持鋼はりの中央に同重量の弾性棒と弾性球を落下させ衝撃力について比較検討した。その際のはりの重量 W を一定とし、落下物体の重量 W_0 を変えることで重量比 $\alpha = W/W_0$ を変化させ計算を行なった。数値計算に用いた値は次に示すとおりである。

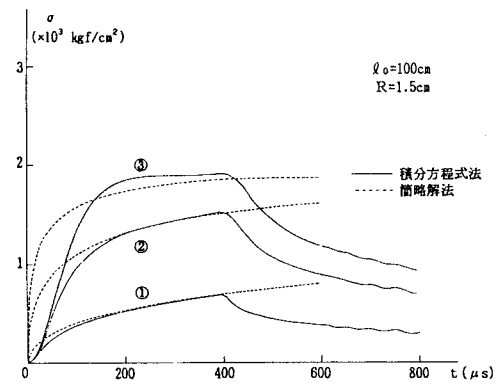


図-14 はりの衝撃応力に及ぼす弾性丸棒の断面積の影響

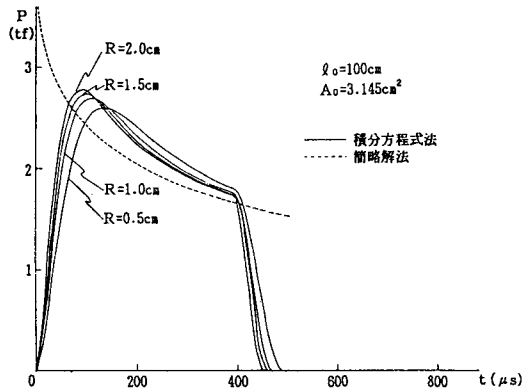


図-15 はりの衝撃力に及ぼす弾性丸棒の曲率半径の影響

はりの諸元

はりの寸法[幅×高さ×長さ(cm)] : 5.0×5.0×100

ヤング率 : $E_1 = 2.1 \times 10^6$ (kgf/cm²)

ポアソン比 : $\nu_1 = 0.3$

単位体積質量 : $\rho_1 = 0.801 \times 10^{-5}$ (kgf·sec²/cm⁴)

衝突物体の諸元 (指示がなければ弾性棒と弾性球は共通の値を用いる。)

重量比 : $\alpha = 0.0 \sim 100$

衝撃速度 (落下高さ) : $V = 313.05$ (cm/sec)

($h = 50$ (cm))

ヤング率 : $E_0 = 2.1 \times 10^6$ (kgf/cm²)

ポアソン比 : $\nu_0 = 0.3$

弾性棒の断面積 : $A_0 = 7.069$ (cm²) [3.0cmφ]

単位体積質量 : $\rho_0 = 0.801 \times 10^{-5}$ (kgf·sec²/cm⁴)

弾性棒の曲率半径 : $R = 1.5$ (cm)

図-16 は弾性球が落下する場合の、重量比 α を変化させた場合の衝撃力の応答のグラフである。図より弾性球が落下する場合は、重量比 α が小さくなるほど生ずる衝撃力は大きくなり2度打ち現象が生じていることがわかる。この現象は無限長はり理論を用いた場合には生じない。同様に図-17 は弾性球と同重量の弾性棒が落下する場合の衝撃力のグラフである。図より衝撃力は重量比 α が小さくなるに従い半無限長棒が衝突した場合と同じ傾向になり、逆に重量比 α が大きくなると弾性球が衝突した場合と一致する。図-18 は弾性球と同重量の先端に曲率を有する物体が落下する場合の衝撃力のグラフであり、先端の曲率半径を一定と考え物体の重量を大きくした場合に対応しており、弾性球が落下する場合と同じ積分方程式を用いて計算することができる。図-19 は最大衝撃力と重量比 α との関係を弾性球、弾性棒、先端曲率が一定の物体の3種類について表わしたものである。図より α が大きい範囲では3本のグラフは同じような値になることがわかる。また弾性棒による衝突では α が小さい範囲では最大衝撃力はほとんど変化しないことがわかった。

4. 簡略解法

弾性球により横衝撃を受けるはりの最大衝撃力を、有効長の考え方を取り入れた簡略解法によって求め、積分方程式解法による結果と比較検討を行った。従来、簡略解法の研究としては、J. Lennertz¹⁰⁾, E. H. Lee¹¹⁾ 等が球とはりの衝突問題を衝撃力を sine 関数に仮定することにより論じている。被衝突物にお

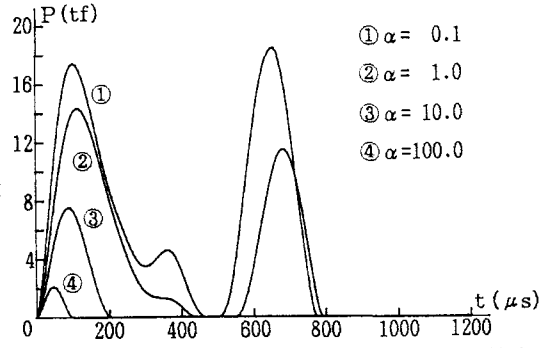


図-16 弾性球による衝撃力と重量比の関係

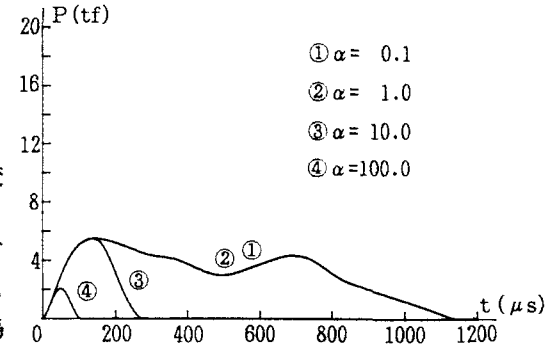


図-17 弾性棒による衝撃力と重量比の関係

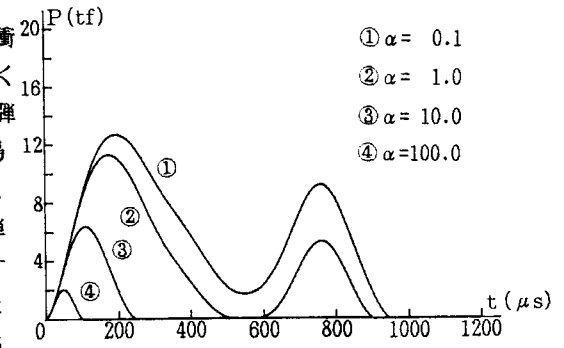


図-18 物体による衝撃力と重量比の関係

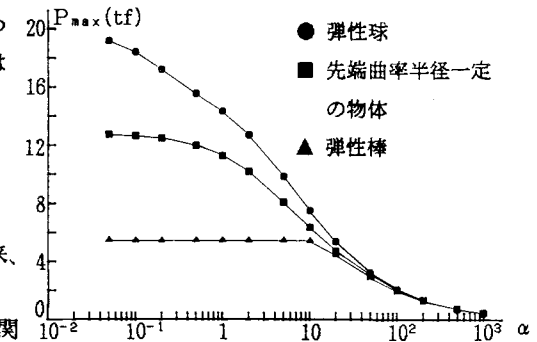


図-19 最大衝撃力と重量比の関係

る衝撃点での局部変形まで考慮した研究は少ないが、L. B. Greszczuk¹²⁾は球と円形板の衝突問題を、岩崎¹³⁾は球と弾性床上無限板の衝突問題を、局部変形を考慮したエネルギーのつり合から論じている。本節はこれらの手法をはりの衝撃問題に適用し、その有用性について論じたものである。

1) 解析理論

簡略解法とは、衝撃力を受けるはりのたわみ曲線を中央に静的な力を加えたときのたわみ曲線と仮定することにより最大衝撃力を求める方法である。また簡略解法の中でも、はりの質量を無視する初等解法、はりの質量を考慮するがその考慮の仕方にCox, Morley氏の考え方に従う方法がある。本論文では、それに新たに有効長の考え方を取り入れた。有効長とは、力の伝達している部分のみがはりとして機能しているものと考え、その部分を有効長と呼ぶことにしたものである。

ここでは有効長を次のようにして求めた。Bohnenblust¹⁴⁾の理論によると、無限長はりの中央点が一定の衝撃速度 V_0 の運動状態におかれた場合、もし変形が弾性領域内で生ずる場合たわみ式は次式ようになる。

$$w(\eta) = V_0 t \left[1 - 2\eta - 2 \{ S(\eta) + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sqrt{\eta} \sin \eta - 2\eta C(\eta) \} \right] \quad (45)$$

ここで、 $\eta = \frac{x^2}{4a^2t}$, $a^2 = \sqrt{\frac{E_1 I}{\rho A_1}}$, $S(\eta)$ 及び $C(\eta)$ はフレネル積分を表わす。

たわみが最初に0になる点 x_0 は、 $w(\eta_0)$ を0とおくことにより $\eta_0 = 1.1342$ となるので

$$x_0(t) = 2.13 \sqrt{r C_0 t} \quad (46)$$

ここで、 $C_0 = \sqrt{E_1 / \rho}$, $r = \sqrt{I / A_1}$ 。

従って最大衝撃力が生ずる時間 t_{max} の有効長は次式ようになる。

$$l^* = 2 x_0(t_{max}) \quad (47)$$

ここで、 t_{max} は半無限平面に重量 W_0 の弾性球が落下したときの最大衝撃力の生ずる時間¹⁵⁾に仮定する。

$$t_{max} = 1.47 \delta_1 / V_0 \quad (48)$$

ここで、 $\delta_1 = (2.5 W_0 K^{\frac{3}{2}} H)^{\frac{2}{5}}$ 。

従って式(48)を式(47)に代入すると有効長が次式のように得られる。

$$l^* = 4.26 \sqrt{1.47 r C_0 \delta_1 / V_0} \quad (49)$$

弾性球がはりに衝突する場合の簡略式を求めるに際しては、まず右辺に弾性球の質量による項を加えた式(6)に $\dot{w}_0 + \delta$ を乗じて0～ t_{max} まで積分する。ただしドットは時間に関する微分を表す。すなわち、

$$\frac{1}{2} M V_0^2 - \frac{1}{2} M V_1^2 = \int_0^{t_{max}} P(t) (\dot{w}_0 + \delta) dt - W_0 \int_0^{t_{max}} (\dot{w}_0 + \delta) dt \quad (50)$$

ただし、 $V_1 = \dot{w}_0(t = t_{max})$, w_0 は衝撃点のたわみを W_0 は弾性球の重量を表わす。

簡略解法では動的たわみを有効長 l^* の固定支持はりの静的たわみを用いて表す。すなわち

$$w(x, t) = w_0(t) (l^* - 2x)^2 (l^* + 4x) / l^{*3} \quad (-l^*/2 \leq x \leq 0) \quad (51)$$

また右辺に外力の項を加えた式(1)に $\dot{w}_0$ を乗じて0～ t_{max} まで積分する。その後 x に関しては式(51)を代入し $-l^*/2 \sim l^*/2$ まで積分すると

$$\int_0^{t_{max}} P(t) \dot{w}_0 dt = 96 E_1 I w_0^2 (t_{max}) / l^{*3} + 13/70 \cdot \rho A_1 l^* V_1^2 \quad (52)$$

式(50)に式(7), (52)を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} M V_0^2 - \frac{1}{2} M V_1^2 (1 + \frac{13}{35} \alpha) \\ = K p w_0^2 (t_{max}) / 2 + 2 K^{-\frac{3}{2}} \delta^{\frac{5}{2}} (t_{max}) / 5 - W_0 \{ w_0(t_{max}) + \delta(t_{max}) \} \end{aligned} \quad (53)$$

ここで、 $\alpha = W / W_0$, $W = \rho A_1 l^* g$, $K p = 192 E_1 I / l^{*3}$, W は有効長はりの重量を表わす。

次に衝撃点のたわみを式(54)のように仮定すると V_1 は0となる。

$$w_0(t) = P(t)/K_P \quad (54)$$

今、式(53)に式(7)、(54)を代入すると最終的に最大衝撃力 P_{max} を求める次のような6次方程式が求まる。

$$C^3 P_{max}^6 + (F^3 - 3BC^2) P_{max}^5 + \{3C(B^2 - AC) - F^2 J\} P_{max}^4 + \{B(6AC - B^2) + 3FJ^2\} P_{max}^3 + \{3A(AC - B^2) - J^3\} P_{max}^2 - 3A^2 B P_{max} - A^3 = 0 \quad (55)$$

ここで、 $A = W_0 h$ (初等解法)、 $B = W_0/K_P$ 、 $C = 1/2K_P$ 、 $F = 2K/5$ 、 $J = W_0 K$ 。

2) 数値計算例

数値計算は長方形断面の単純支持鋼はりに鋼弾性球が落下する問題を扱った。計算に際しては弾性球と弾性棒の比較の時に用いた数値と同じ値を使用した。図-20は最大衝撃力と、はり と弾性球の重量比 α の関係を積分方程式法と簡略解法について比較したグラフである。そのほか図中では弾性球と同重量の先端曲率半径一定の物体 (積分方程式法) と先端曲率半径一定の物体 (簡略解法) の関係を示している。図より簡略解法は α の大きい範囲では積分方程式法とよく一致している。また簡略解法に及ばず鋼はりの断面寸法の影響を検討するため、はり断面の高さを以下に示すように変化させ計算を行なった。

はり断面寸法 (幅 $b \times$ 高さ h) :

$$b = 2.5(\text{cm}), h = 0.35 \sim 10.39(\text{cm})$$

弾性球の半径 : $R = 2.0, 3.0(\text{cm})$

図-21 は弾性球が落下する場合の最大衝撃力とはりの断面2次半径 r の関係を積分方程式法と簡略解法について表したものである。

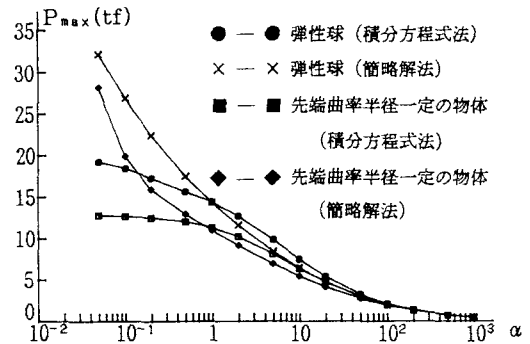


図-20 積分方程式法と簡略解法の比較

5. まとめ

本論文では弾性球及び弾性棒による落体問題について無限長はり及び有限はりを対象として衝撃力を未知数とする非線形積分方程式を誘導し数値積分法を用いて衝撃力、衝撃応力を求めた。弾性球による無限長はりの衝撃応答については初等理論 (Bernoulli-Euler はり理論) と Timoshenko はり理論に基づく理論解析を行ない比較したところはりに生ずる衝撃力はほとんど差異がないことがわかった。

またはりの剛度、球の半径、球の落下速度などの影響をすべて含んだ無次元衝撃パラメータと反発係数の関係を片対数グラフに表示したところ、衝撃パラメータが $0 \sim 0.4$ の範囲では反発係数が直線式で近似できることがわかった。

有限長はり (単純支持はり) の解析に関しては非線形積分方程式を解くにあたって未知の衝撃力を微小時間内で線形に変化すると仮定した。そのため解を精度よく求めることができるとともに、はりのたわみ及び応力の時間的な伝播状態を衝撃力の消失後も含めて容易に計算できるようになった。その結果はりの長さを短くしたとき、応力は反射波の影響を受けて大きく変動し無限長はりのように最初の立ち上がりに最大値が生ずるとは限らないことがわかった。

弾性棒がはりに衝突する問題では、有限長のはりや棒を無限長のはりや棒に置き換え導いた簡略解と、単純支持はり と弾性棒を有限長のまま取り扱いそれぞれの変位の級数解に接触点での局部変形を考慮して誘導

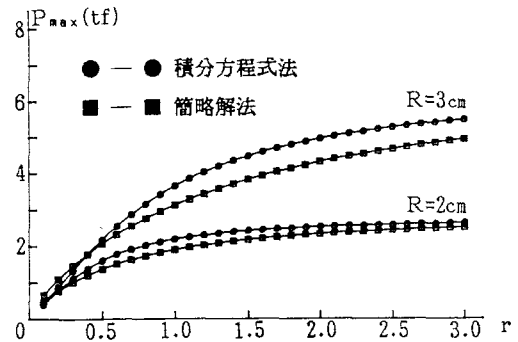


図-21 簡略解法に及ぼす断面2次半径の影響

した積分方程式を解いて得られた数値解とを比較することにより両理論の工学的な適用性について検討した。その結果、積分方程式法により求めた衝撃力の時間的変動曲線は現実の衝撃現象をよく表わしており、衝撃によって生じた圧縮波が弾性棒中を伝播し自由端で反射され引張波となって衝撃点に戻ってきた時点で急激に減少して0となることがわかった。そして半無限長を仮定した簡略解法は、反射波が衝撃点に到着した以後には適用できないという欠点があるが、衝撃直後を除けば積分方程式法の解析結果とよく一致しており工学的には十分実用的な解法であることがわかった。また弾性球と弾性棒による衝撃力を比較検討したところ、重量比（はりの重量／衝突物体の重量）が大きい範囲では両結果はよく一致することがわかった。

最後にはりに弾性球が衝突する問題について、衝撃点の局部変形までを含めた球とはりのエネルギーのつり合いを考えることにより最大衝撃力を求める簡略式を誘導した。有効長の考え方を取り入れることによりこの簡略式が広い範囲にわたって適用可能であることがわかった。

本論文では、被衝突物体としてはり構造のみを取り上げたが、板構造を対象とした場合にはまた異なる衝撃特性が現われてくると考えられるので、今後の検討課題としたい。

参考文献

- 1) 青柳史郎：構造物における衝撃現象の数値解析、土木学会論文報告集、第206号、pp. 13-22、1972
- 2) H. Schwiager : Die Maximale Mechanische Beanspruchung beim Zentralen Balkenquerstoß, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik 45, Heft 718, pp. 499-506, 1965
- 3) G. R. Cowper : The Shear Coefficient in Timoshenko's Beam Theory, Journal of Applied Mechanics, pp. 335-340, 1966
- 4) B. A. Boley and C. C. Chao : Some Solution of the Timoshenko Beam Equations, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 77, pp. 579-586, 1955
- 5) S. P. Timoshenko : Zur Frage nach der Wirkung eines Stosse auf einer Balken, Zeitschrift für Mathematik und Physik, Vol. 62, pp. 198, 1913
- 6) 武藤清：構造物の動的解析、丸善、pp. 280, 1966
- 7) C. Zener : The Intrinsic Inelasticity of Large Plates, Physical Review, Vol. 59, pp. 669-673, 1941
- 8) C. V. Raman : On Some Applications of Hertz's Theory of Impact, Physical Review, Vol. 15, pp. 277, 1920
- 9) 小高忠男・中原一郎：弾性棒で衝撃された無限長はりの応力、日本機械学会論文集、33巻、248号、pp. 533-541、1967
- 10) J. Lennertz : Beitrag zur Frage nach der Wirkung eines Querstosses auf einen Stab, Ingenieur-Archiv, Vol. 8, part 1, 1937
- 11) E. H. Lee : The Impact of a Mass Striking a Beam, Journal of Applied Mechanics, Trans. ASME, Vol. 62, No. 4, pp. A-129-A-138, 1940
- 12) L. B. Greszczuk : Impact Dynamics, Wiley-Interscience, pp. 62-65, 1982
- 13) 岩崎正二：衝撃荷重を受ける平板の動的応答解析、岩手大学工学部研究報告、Vol. 37、pp. 127-138、1984
- 14) P. E. Duwez, D. S. Clark and H. F. Bohnenblust : The Behavior of Long Beams Under Impact Loading, Journal of Applied Mechanics, Vol. 17, pp. 27-33, 1950
- 15) S. P. Timoshenko and J. N. Goodier : Theory of Elasticity, McGraw-Hill, pp. 421, 1951

(1991年9月30日受付)