

接着剤の弾性変形を考慮した等方性 二層板の弾性座屈荷重について

ELASTIC BUCKLING LOADS OF TWO ISOTROPIC LAYERED PLATES CONSIDERING DEFORMATION OF BONDED LAYER

佐藤 浩一*

By Koichi SATO

This paper offers a set of partial differential equations designed to enable elastic buckling analysis of incomplete composite plates consisting of two layers of isotropic materials. The paper also analyzes the relationship of critical loads among complete composite plates, incomplete composite plates, and individual plates that do not interact with regard to simply supported rectangular composite plates. $\beta=0$ signifies complete composite plates. $0<\beta<1$ signifies incomplete composite plates. $\beta=1$ signifies individual plates that do not interact. The paper also submits a diagram that represents the essential features of the critical load characteristics of simply supported rectangular incomplete composite plates suitable for most design purposes. Critical loads can be derived by the use of the diagram without much difficulty.

1. まえがき

現在用いられている鋼とコンクリートとの合成構造物の設計ガイドラインとして、最近、文献¹⁾が出版され、異種材料を合成し複合構造物として設計することが今後益々重要になるものと思われる。

例えば、橋梁における複合構造物の一つに鋼桁とコンクリート床版とを頭つきスタッドジベルで完全に剛に一体として結合した合成桁(完全合成桁)があるが、ジベルはある間隔で離散的に配置されており、変形するために完全に一体となった合成桁とはならない(不完全合成桁)。また、ジベルがなければ鋼とコンクリートとの単なる重ね梁になる。実際の合成桁は完全合成桁と重ね梁の中間の挙動を示す不完全合成桁である。これらについては多くの研究がなされている^{2)~12)}。

一方、CS橋¹³⁾のように鋼板とコンクリート床版とを用い頭つきスタッドジベルで一体として結合した合成板においても上述の不完全合成桁と同じように不完全合成板となり、完全合成板と重ね板との中間の挙動を示すはずである。頭つきスタッドジベルの変形を考慮した合成板の横荷重による解析理論として文献¹⁴⁾があるが、この理論では鋼板厚はコンクリート板厚に比較して非常に小さいとし、断面諸元の算定においてある部分で鋼板厚を零としている。従って、鋼板が厚くなれば、断面諸元の算定において鋼板厚を無視できなくなる。文献^{16), 17), 20), 22)}は鋼板厚をも考慮した解析理論を誘導し、文献¹⁴⁾を包含していることを示し、数値解析し、文献¹⁴⁾との差異を比較検討している。

* 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

本論文では、鋼板とコンクリート床版からなる合成板に限定せず、等方性材料であるが、弾性係数、ポアソン比、板厚等の異なる二枚の板を接着剤で合成した合成板（二層板）を考える。合成板において離散的に配置された頭つきスタッドジベルの変形を考慮する場合はこの離散的配置をならして同じ強さの連続的配置に置換して解析するので⁶⁾、頭つきスタッドジベルの代わりに連続的配置の接着剤を用いることができるものとする。従って、接着剤が完全に剛であるならば、等方性完全二層板と考えることができる。ここでは接着剤は完全に剛でなくその変形を考慮した場合の等方性二層板について考える（以下、等方性不完全二層板という）。このような等方性不完全二層板の弾性座屈についてはあまり研究されていないようである。そこで、本論文は弾性座屈について考察し、理論式を誘導し、弾性座屈荷重を求め、更に、四辺単純支持板の場合に、定量的に座屈荷重を求めることができるように、無次元量として α , β , γ なるパラメータを用いたのでそれを説明し、数値解析により等方性不完全二層板の座屈荷重特性を示す。無次元量の $\beta = 0$ の場合が等方性完全二層板であり、 $0 < \beta < 1$ の場合が等方性不完全二層板であり、 $\beta = 1$ の場合が重ね二層板であることを示すものである。

2. 本論文で用いる主な記号

図-1、2、3 は本解析で用いる第一板と第二板との合成板（二層板）を示している。また、本論文で用いる主な記号は次の通りである。

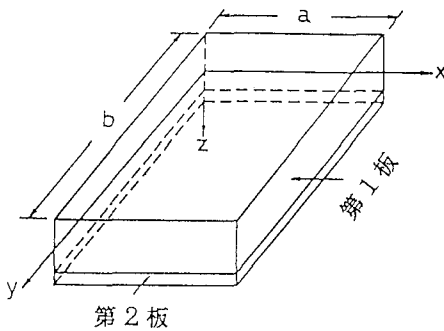


図-1 等方性二層板（合成板）の座標

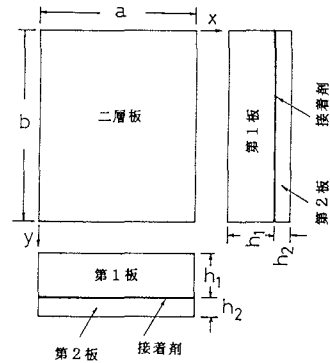


図-2 等方性二層板（合成板）

$A_{1,2}$: 第一板と第二板の単位幅あたりの断面積 ; $A_v = A_2 + A_1/\bar{n}$: 第二板に換算した単位幅あたりの合成断面積 ; $D_v = \bar{E}_2 I_v$: 合成板（二層板）の板剛性 ; $E_{1,2}$: 第一板と第二板のヤング率 ; $\bar{E}_{1,2} : E_1/(1-\nu_1^2), E_2/(1-\nu_2^2)$; $h_{1,2}$: 第一板と第二板の板厚 ; I_1 : 第一板のその重心Cに関する単位幅あたりの断面二次モーメント ; I_2 : 第二板のその重心Sに関する単位幅あたり断面二次モーメント ; $I_v = I_2 + I_1/\bar{n} + A_v s_1 s_2$: 第二板に換算した合成断面の単位幅あたりの断面二次モーメント ; K : 単位長さあたりの接着剤のばね定数 ($K=0$ の場合は等方性重ね二層板、 $0 < K < \infty$ の場合は等方性不完全二層板、 $K=\infty$ の場合は等方性完全二層板) ; $\bar{n} = \bar{E}_2/\bar{E}_1^{14)}$; $M_{vx}(x,y), M_{vy}(x,y)$: 等方性完全二層板の単位幅あたりの x, y 方向の曲げモーメント ; $M_{vex}(x,y), M_{vey}(x,y)$: 等方性不完全二層板の単位幅あたりの x, y 方向の曲げモーメント ; $N_{vex}(x,y), N_{vey}(x,y)$: 等方性不完全二層板の単位幅あたりの x, y 方向の軸力 ; $p_z(x,y)$: 荷重強度 ; s : 第一板の重心Cと第二板の重心Sとの距離 ; $s_1 = A_2/A_v \times s$: 合成断面の中立軸Vと第一板の重心Cとの距離 ; $s_2 = A_1/(\bar{n} A_v) \times s$: 合成断面の中立軸Vと第二板の重心Sとの距離 ; $w_v(x,y), w_{ve}(x,y)$: 等方性完全二層板のたわみ、等方性不完全二層板のたわみ ; α, β, γ : 無次元量パラメータ ; $\delta_x(x,y)$,

$\delta_y(x,y)$: x, y 方向の接着剤の変形量； $\nu, \nu_{1,2}$: 二層板（合成板）のポアソン比、第一板と第二板のポアソン比。

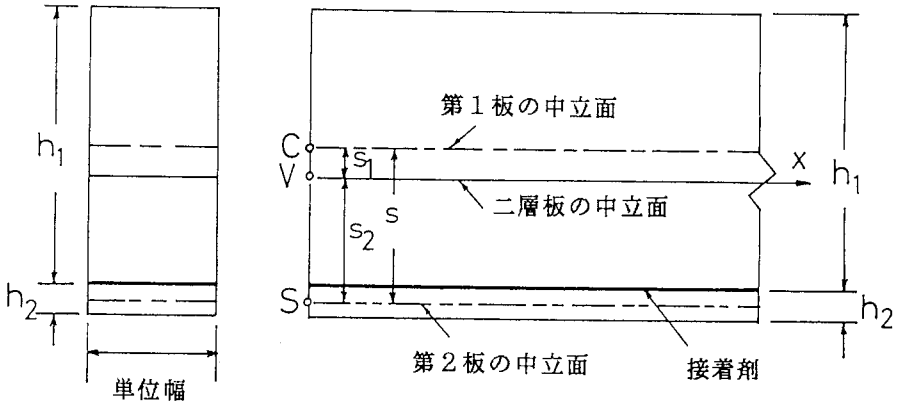


図-3 二層板の断面

3. 等方性不完全二層板の横荷重による解析理論の誘導（偏微分方程式の誘導）

本解析理論では次の5つの仮定を用いる。

- (1) 第一板と第二板の応力とひずみ関係は線形である。(2) 接着剤に作用する力と変位は線形である。
- (3) 接着剤は均等に塗布されているものとする。(4) 第一板と第二板の z 方向の変位は同じである。
- (5) 接着剤の厚さは無視する。以上の仮定を用いて、次のように4段階に分けて等方性不完全二層板の解析理論を誘導する。ここでは、文献⁷⁾にある不完全合成桁の場合の誘導方法を等方性不完全二層板に拡張していくものである。

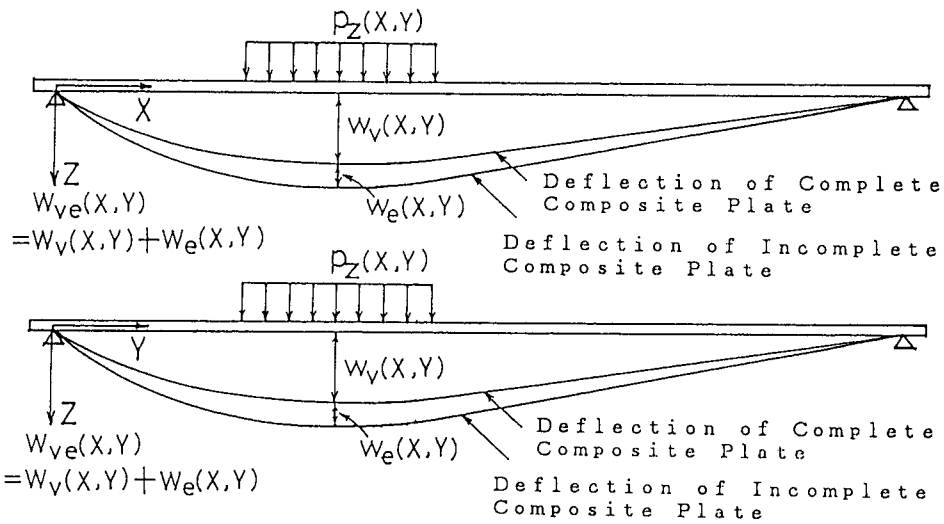


図-4 二層板（合成板）のたわみ

第1段階：等方性完全二層板のたわみを $w_v(x,y)$ とし（図-4 参照）、二層板の曲げ剛性を D_v とす

れば^{18), 19)}、

$$\nabla^2 \nabla^2 w_v(x, y) = \frac{P_z(x, y)}{D_v} \quad (1a)$$

$$\text{ここで} \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (1b)$$

また、曲げモーメント $M_{vx}(x, y)$, $M_{vy}(x, y)$ は

$$M_{vx}(x, y) = -D_v \left(\frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (1c)$$

$$M_{vy}(x, y) = -D_v \left(\frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (1d)$$

となる。合成二層板の中立面に作用するこの曲げモーメント $M_{vx}(x, y)$ は図-5 に示すように $M_{1x}(x, y)$ 、 $M_{2x}(x, y)$ 、 $N_{vx}(x, y)$ に分配されるとする。ただし、ここでは単位幅あたりの x 方向のみの分配状態を示している。 y 方向の分配状態も同様に図示できるが、省略する。

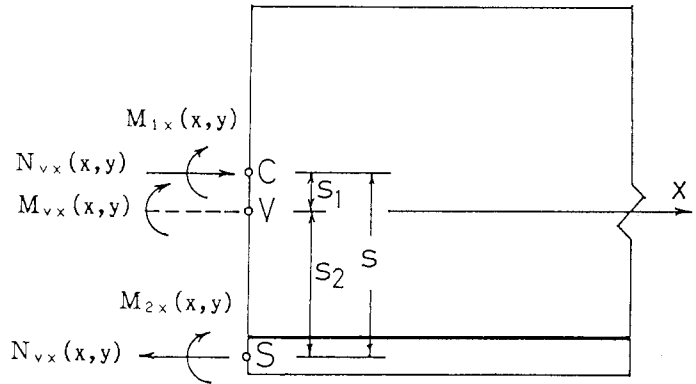


図-5 曲げモーメント $M_{vx}(x, y)$ が作用する二層板

従って、次の関係式が存在するのは明らかである。

$$M_{vx}(x, y) = M_{1x}(x, y) + M_{2x}(x, y) + S \cdot N_{vx}(x, y) \quad (1e)$$

また、

$$M(x, y) = \frac{M_{vx}(x, y) + M_{vy}(x, y)}{1 + \nu} = -D_v \left(\frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (1f)$$

$$\text{とおけば、} \quad \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial y^2} = -\frac{M(x, y)}{D_v} \quad (1g)$$

$$\frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M(x, y)}{\partial y^2} = -P_z(x, y) \quad (1h)$$

第2段階： 剛に結合された合成断面を考える。曲げモーメント $M_{vex}(x, y)$ が作用している二層板の場合、接着剤の弾性変形を考慮した時のたわみを $w_{ve}(x, y)$ とすれば (図-4 参照)、次式が成立する。

$$\frac{M_{vex}(x, y)}{D_v} = - \left(\frac{\partial^2 w_{ve}(x, y)}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w_{ve}(x, y)}{\partial y^2} \right) \quad (2a)$$

第一板に作用する面内力の総和 $N_{ex}(x, y)$ は、圧縮力を正とすると

$$N_{ex}(x, y) = \frac{A_1 s_1}{\bar{n} I_v} M_{vex}(x, y) \quad (3a)$$

で求まる。また、第一板の重心に作用する曲げモーメントは

$$M_{1ex}(x, y) = \frac{I_1}{\bar{n} I_v} M_{vex}(x, y) \quad (4a)$$

であり、第二板の重心に作用する曲げモーメントは

$$M_{2ex}(x, y) = \frac{I_2}{I_v} M_{vex}(x, y) \quad (5a)$$

である。同様に、曲げモーメント $M_{vey}(x, y)$ が作用している二層板の場合、次式が成立する。

$$\frac{M_{vey}(x, y)}{D_v} = - \left(\frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 W_{ve}(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (2b)$$

第一板に作用する面内力の総和 $N_{ey}(x, y)$ は、圧縮力を正とすると

$$N_{ey}(x, y) = \frac{A_1 s_1}{\bar{n} I_v} M_{vey}(x, y) \quad (3b)$$

で求まる。また、第一板の重心に作用する曲げモーメントは

$$M_{1ey}(x, y) = \frac{I_1}{\bar{n} I_v} M_{vey}(x, y) \quad (4b)$$

であり、第二板の重心に作用する曲げモーメントは

$$M_{2ey}(x, y) = \frac{I_2}{I_v} M_{vey}(x, y) \quad (5b)$$

である。

また、次の関係式が存在するのは明らかである。

$$M_{vex}(x, y) = M_{1ex}(x, y) + M_{2ex}(x, y) + s \cdot N_{ex}(x, y) \quad (5ab)$$

第3段階：第一板の重心に圧縮力 $N_x(x, y)$ 、 $N_y(x, y)$ 、第二板の重心に引張力 $N_x(x, y)$ 、 $N_y(x, y)$ を作用させてやる。第一板と第二板とが絶縁されていれば、第一板と第二板とに食い違いができる。この量は単位長さあたり

$$\epsilon_x(x, y) = \left\{ \frac{1}{\bar{E}_1 A_1} + \frac{1}{\bar{E}_2 A_2} \right\} \cdot N_x(x, y) = \frac{\bar{n} \cdot s}{\bar{E}_2 A_1 s_1} N_x(x, y) \quad (6a)$$

$$\epsilon_y(x, y) = \left\{ \frac{1}{\bar{E}_1 A_1} + \frac{1}{\bar{E}_2 A_2} \right\} \cdot N_y(x, y) = \frac{\bar{n} \cdot s}{\bar{E}_2 A_1 s_1} N_y(x, y) \quad (6b)$$

である。また、 $N_x(x, y)$ 、 $N_y(x, y)$ によって与えられる曲げモーメントは

$$M_x(x, y) = s \cdot N_x(x, y) \quad (7a)$$

$$M_y(x, y) = s \cdot N_y(x, y) \quad (7b)$$

結局、断面に作用する全モーメント $M_{vx}(x, y)$ 、 $M_{vy}(x, y)$ と第一板部の面内力の総和の $N_{vex}(x, y)$ 、 $N_{vey}(x, y)$ は

$$M_{vx}(x, y) = M_{vex}(x, y) + M_x(x, y), \quad M_{vy}(x, y) = M_{vey}(x, y) + M_y(x, y) \quad (8a), (8b)$$

$$N_{vex}(x, y) = N_{ex}(x, y) + N_x(x, y), \quad N_{vey}(x, y) = N_{ey}(x, y) + N_y(x, y) \quad (9a), (9b)$$

以上の状態を図示すれば、
即ち、二層板の中立面に
作用する曲げモーメント
 M_{vx} の分配状態は図-6
のとおりである。ただし、
ここでは単位幅あたりの
 x 方向のみの分配状態を
示している。 y 方向の分
配状態も同様に図示でき
るが、省略する。

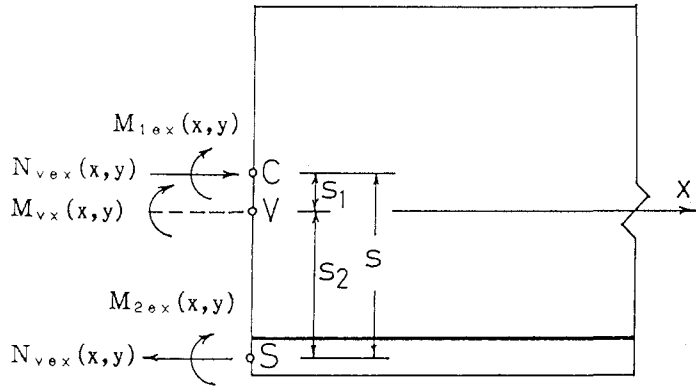


図-6 曲げモーメント $M_{vx}(x, y)$ が作用する二層板

第4段階：この状態で、第一板と第二板を x, y 方向に $\delta_x(x, y), \delta_y(x, y)$ だけ変形させる。変形に抵抗する $T_{vex}(x, y), T_{vey}(x, y)$ は接着剤の弾性変形によって起こり、接着剤のばね定数 K を使って次の形を考える。

$$T_{vex}(x, y) = K \delta_x(x, y), \quad T_{vey}(x, y) = K \delta_y(x, y) \quad (10a), (10b)$$

接着剤のばね定数 K は Newmark²⁾ による押し抜きせん断試験により求めるものとする。

接着剤に作用する力は

$$\frac{\partial N_{vex}(x, y)}{\partial x} = T_{vex}(x, y), \quad \frac{\partial N_{vey}(x, y)}{\partial y} = T_{vey}(x, y) \quad (11a), (11b)$$

また、変形量 $\delta_x(x, y), \delta_y(x, y)$ は

$$\frac{\partial \delta_x(x, y)}{\partial x} = \epsilon_x(x, y), \quad \frac{\partial \delta_y(x, y)}{\partial y} = \epsilon_y(x, y) \quad (12a), (12b)$$

これらが、接着剤の弾性変形を考慮する場合の基本的な関係である。次に、式(1)～式(12)までの関係を使って、たわみに関する偏微分方程式を誘導すればよい。ここでは省略するが、詳細な誘導は文献^{16), 20), 22), 23)}を参照されたい。

$$\kappa^2 = K \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \frac{\bar{n}}{\bar{E}_2 A_1} \frac{s}{s_1} \quad (13)$$

とおき^{20), 22)}、等方性不完全二層板(接着剤の弾性変形を考慮した場合の二層板)のたわみ $w_{ve}(x, y)$ で整理すれば、

$$D_v \nabla^2 \nabla^2 w_{ve}(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^2 w_{ve}(x, y) = -\kappa^2 D_v \nabla^2 w_v(x, y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x, y) \quad (14)$$

となる。また、式(14)に ∇^2 を施せば

$$D_v \nabla^6 w_{ve}(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^4 w_{ve}(x, y) = -\kappa^2 p_z(x, y) + \frac{\bar{n} I_v}{\bar{n} I_2 + I_1} \nabla^2 p_z(x, y) \quad (15)$$

となる。式(14)あるいは式(15)が等方性不完全二層板のたわみに関する偏微分方程式である。ここで、不完全合成桁の場合の文献⁷⁾の考え方を適用する。等方性完全二層板の場合のたわみが $w_v(x, y)$ であり、接着剤の変形を考慮した場合のたわみが $w_{ve}(x, y)$ であり、 $w_{ve}(x, y)$ と $w_v(x, y)$ との差を $w_e(x, y)$ とすれば、 $w_v(x, y)$ に関しては式(1a)、即ち、式(17)が成立する。また、 $w_e(x, y)$ に関して

は式(14)と式(1a)との差より、

$$D_v \nabla^4 w_e(x, y) - D_v \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} p_z(x, y) \quad (16)$$

となる。結局、式(14)は次の2個の偏微分方程式になる。

$$\begin{cases} \nabla^4 w_v(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_v} \\ \nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_e} \end{cases} \quad (17)$$

$$\nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{p_z(x, y)}{D_e} \quad (18)$$

ただし、 $D_v = \bar{E}_2 I_v$, $D_e = D_v \frac{\bar{n} I_2 + I_1}{A_1 s_1 s}$, $\bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1$,

$$\bar{E}_2 = E_2 / (1 - \nu_2^2) \quad , \quad \bar{E}_1 = E_1 / (1 - \nu_1^2) \quad , \quad \bar{n} = \bar{E}_2 / \bar{E}_1 \quad ,$$

$$I_v = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_2 s_2 s = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_1 s_1 s / \bar{n} = I_2 + I_1 / \bar{n} + A_v s_1 s_2$$

式(19)の D_v は文献¹⁵⁾の p.5 および文献¹⁹⁾の p.391 にある二層板の場合の D_v と一致することを確認してある。式(18)は曲げと面内荷重に相当する $D_e \cdot \kappa^2$ を受ける平板に対する基礎偏微分方程式と同形である。なお、本解析理論と文献¹⁴⁾との断面諸元の算定には次のような差異があるようである²⁰⁾。文献¹⁴⁾では、第一板厚 h_1 に比べて、第二板厚 h_2 は非常に小さいとしている。即ち、 $A_v \rightarrow A_1 / \bar{n}$, $s \rightarrow 0.5 \times h_1$, $s_1 \rightarrow 0$, $s_2 \rightarrow s \rightarrow 0.5 \times h_1$, $I_2 \rightarrow 0$, $I_v \rightarrow I_1 / \bar{n} + h_2 \times 0.5 h_1 \times 0.5 h_1$, とし、

$$C = \frac{\bar{E}_2 A_2}{\bar{E}_1 A_1} = \frac{\bar{E}_2 h_2}{\bar{E}_1 h_1} = \bar{n} \frac{h_2}{h_1} \quad (20)$$

とおいて、 $D_v \rightarrow \bar{E}_2 I_v$ としている。即ち、 $D_v \rightarrow \bar{E}_1 I_1 (1 + 3C)$ としている。具体的には

$$D_v = \frac{\bar{E}_1 h_1^3}{12} (1 + 3C) \quad (21)$$

としている。このように文献¹⁴⁾では、 A_v , s , s_1 , s_2 , I_2 , I_v , D_v の算定において、第二板厚 h_2 を省略している。ただし、 A_2 だけは考慮しているようである。なお、文献¹⁴⁾の断面諸元は著者が文献¹⁴⁾より推察したものである。文献²⁰⁾、²²⁾に差異を詳細に比較している。

4. 等方性不完全二層板の弾性座屈の微分方程式

前節までの荷重は静的な横荷重である。ここでは合成二層板の中立面に作用する縦荷重の圧縮力による弾性座屈について考察する。等方性完全二層板の横たわみに関する式(17)は板剛性(D_v)で横荷重($p_z(x, y)$)が作用する平板の曲げに関する微分方程式である。同様に、式(18)は板剛性(D_e)で横荷重($p_z(x, y)$)が作用する他に引張力に相当する($H = D_e \cdot \kappa^2$)が中立面に作用する平板の微分方程式である。図-7に示すような面内力 p_{vex} が作用する長方形合成二層板を考える。式(17)は次のような微分方程式になる。

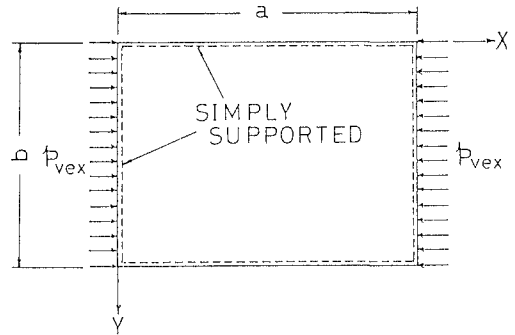


図-7 面内力 p_{vex} が作用する
四辺単純支持二層板

$$\nabla^4 w_v(x, y) = \frac{1}{D_v} \left(p_z(x, y) + p_{vex} \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (22a)$$

式(17)と同様にして、式(18)は次のような微分方程式になる。

$$\nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) = \frac{1}{D_e} \left(p_z(x, y) + p_{ex} \frac{\partial^2 w_e(x, y)}{\partial x^2} \right) \quad (22b)$$

式(22a), (22b) において、 p_{vx} と p_{ex} を次のようにおく¹⁹⁾。

$$p_{vx} = -\lambda_v p_{vx0} \quad (23a)$$

$$p_{ex} = -\lambda_e p_{ex0} \quad (23b)$$

ここで、 λ は共通係数で荷重係数という。

面内端荷重として徐々に増大していくと、横荷重 $p_z(x, y)$ が存在しなくても、平板は面外にたわむ。

従って、式(22a)で、 $p_z(x, y) = 0$ とおき、式(23a)を式(22a)に代入すれば、次式のような微分方程式を得る。

$$\nabla^4 w_v(x, y) + \frac{\lambda_v}{D_v} p_{vx0} \frac{\partial^2 w_v(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (24a)$$

同様にして、式(22b)で、 $p_z(x, y) = 0$ とおき、式(23b)を式(22b)に代入すれば、次式のような微分方程式を得る。

$$\nabla^4 w_e(x, y) - \kappa^2 \nabla^2 w_e(x, y) + \frac{\lambda_e}{D_e} p_{ex0} \frac{\partial^2 w_e(x, y)}{\partial x^2} = 0 \quad (24b)$$

このような微分方程式の解は数学的に固有値問題である。 $w_v(x, y)$ は式(24a)と境界条件を満足しなければならない。同様に $w_e(x, y)$ は式(24b)と境界条件を満足しなければならない。

文献²¹⁾に示されているようにビームカラムと同様にオイラーの座屈公式で表示すれば、図-7のような面内力が作用する四辺単純支持板では、基準値として次式のようなになる。

$$p_{vx0} = \frac{\pi^2 D_v}{a^2} \quad (25a), \quad p_{ex0} = \frac{\pi^2 D_e}{a^2} \quad (25b)$$

5. 四辺単純支持の等方性不完全二層板の弾性座屈

長方形板の境界条件が四辺単純支持ならば、板のたわみ面は次式のようなになる。

$$w_v(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (26a)$$

$$w_e(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} e W_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi x}{a} \cdot \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (26b)$$

$$(m = 1, 2, \dots; n = 1, 2, \dots)$$

式(26a), (26b) は四辺単純支持の境界条件を満足する。式(26a)を式(24a)に代入すれば、有意解として次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} - \frac{\lambda_v}{D_v} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot p_{vx0} = 0 \quad (27a)$$

同様にして、式(26b)を式(24b)に代入すれば、有意解として次式を得る。

$$\frac{m^4 \pi^4}{a^4} + 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \frac{n^2 \pi^2}{b^2} + \frac{n^4 \pi^4}{b^4} + \kappa^2 \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) - \frac{\lambda_e}{D_e} \cdot \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \cdot p_{ex0} = 0 \quad (27b)$$

式(27a) より次式を得る。

$$\lambda_v p_{v \times 0} = \frac{D_v \cdot a^2}{m^2 \pi^2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 \quad (28a)$$

同様にして、式(27b)より次式を得る。

$$\lambda_e p_{e \times 0} = \frac{D_e \cdot a^2}{m^2 \pi^2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{D_e \cdot \kappa^2 \cdot a^2}{m^2 \pi^2} \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right\} \quad (28b)$$

式(25) を用いれば、式(28) は次式のようになる。

$$\lambda_v = \left\{ m + \frac{1}{m} \left(\frac{n \cdot a}{b} \right)^2 \right\}^2 \quad (29a)$$

$$\lambda_e = \lambda_v \cdot \frac{1}{\beta_{mn}} \quad (29b)$$

ここで、

$$\beta_{mn} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa^2}{\mu_{mn}^2}} = 1 - \alpha_{mn} \quad (30)$$

ここで、

$$\mu_{mn}^2 = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \quad (31)$$

λ の最小値は式(29) において $n=1$ とすれば求まる。

与えられたアスペクト比に対して、限界荷重は式(29a), (29b)を最小にする m を求めればよい。正方形の場合、 $m=1$ がこの条件を満足する。

結局、式(24a), (24b)の限界荷重は次式によって求まる。

$$(p_{vx})_{cr} = \left\{ m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\}^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot D_v}{a^2} = \frac{4\pi^2 \cdot D_v}{a^2} \quad (32a)$$

および

$$(p_{ex})_{cr} = \left\{ m + \frac{1}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right\}^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot D_e}{a^2} \cdot \frac{1}{\beta_{11}} = \frac{4\pi^2 \cdot D_e}{a^2} \cdot \frac{1}{\beta_{11}} \quad (32b)$$

ここで、 β_{11} と μ_{11} は式(30)と式(31) において、 $m=n=1$ とおくことによって求めることができる。

この公式は柱の座屈のオイラーの公式と相似である。 $(p_{vx})_{cr}$ あるいは $(p_{vex})_{cr}$ は板の単位幅の限界圧縮荷重であり、 D_v あるいは D_e は単位幅の板剛性である。限界荷重は D_v あるいは D_e に比例することは明らかである。比、 $(p_{vx})_{cr}/(p_{ex})_{cr}$ は

$$\gamma_{11} = \frac{(p_{vx})_{cr}}{(p_{ex})_{cr}} = \frac{D_v}{D_e} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot (1 - \alpha_{11}) \quad (33)$$

等方性不完全二層板の限界荷重、 $(p_{vex})_{cr}$ は次式で求まる。

$$\frac{1}{(p_{vex})_{cr}} = \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} + \frac{1}{(p_{ex})_{cr}} = \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} \left\{ 1 + \frac{(p_{vx})_{cr}}{(p_{ex})_{cr}} \right\} \quad (34)$$

式(33)の γ_{11} を式(34)の $(p_{vex})_{cr}$ に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p_{vex})_{cr}} &= \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} (1 + \gamma_{11}) = \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} \left(1 + \beta_{11} \cdot \frac{I_{12v}}{I_{12}} \right) \\ &= \frac{1}{(p_{vx})_{cr}} \frac{(I_{12} + \beta_{11} \cdot I_{12v})}{I_{12}} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{ここで、} I_v = I_{12} + I_{12v} ; I_{12} = I_2 + \frac{I_1}{\bar{n}} ; I_{12v} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n}} \quad (36)$$

式(34)における p_{vx} および p_{vex} の "v" および "ve" はそれぞれ等方性完全二層板および等方性不完全二層板を意味している。

6. 四辺単純支持の等方性不完全二層板の弾性座屈荷重特性

二層板は式(30)で定義される β_{mn} の値によって、大きく次の3つに分類される。

- 1) $\beta_{mn}=0$, 即ち, $\alpha_{mn}=1$, $\gamma_{mn}=0$, の場合は等方性完全二層板。
- 2) $0 < \beta_{mn} < 1$, 即ち, $\alpha_{mn}=1-\beta_{mn}$, $\gamma_{mn} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \cdot \beta_{mn}$, の場合は等方性不完全二層板。
- 3) $\beta_{mn}=1$, 即ち, $\alpha_{mn}=0$, $\gamma_{mn} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は等方性重ね二層板。

図-8は α_{11} と κa との関係を示したものである。縦軸は α_{11} であり、横軸は κa である。

α_{11} は式(30)において、 $m=n=1$ とおけば得られる、一方、式(13)で定義される κ は重要な定数であり、この κ に辺長 "a" を乗ずれば、 κa は無次元量となる。弾性座屈荷重特性を調べるために重要な値である。

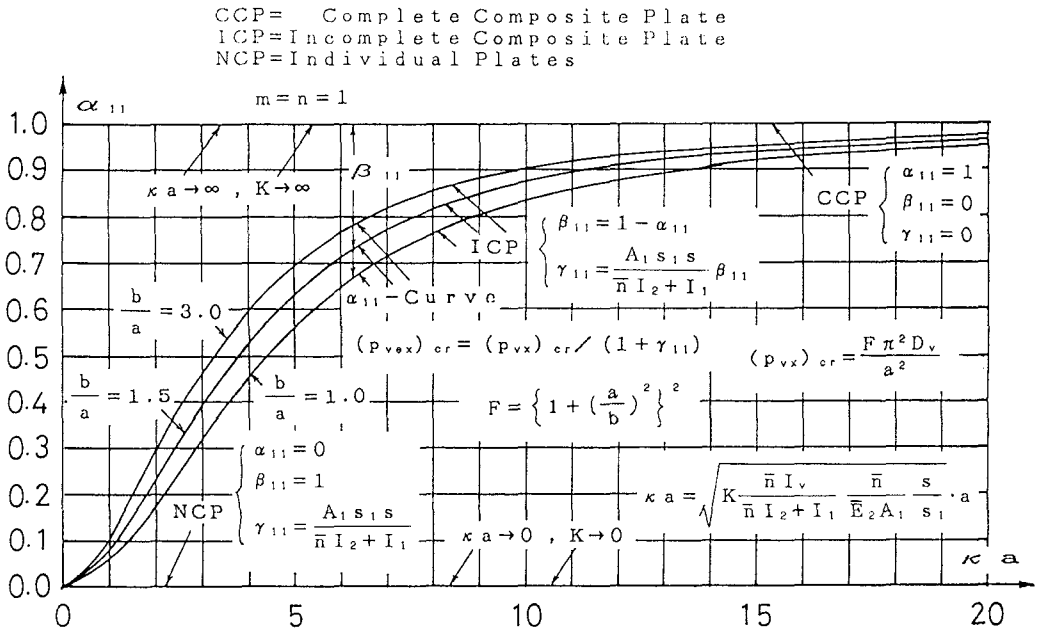


図-8 等方性不完全二層板の α_{11} 曲線

次に、図-8の使い方を説明しよう。最初に、断面諸元を与え、式(13)を用いて κ の値を求め、この κ に辺長 "a" を乗ずる。二番目に κa の値をプロットして図上で α_{11} を求める。従って、 $\beta_{11} = 1 - \alpha_{11}$ も求めることができる。三番目に γ_{11} を $A_1 s_1 s / (\bar{n} I_2 + I_1) \cdot \beta_{11}$ で求める。最後に、この γ_{11} を式(35)の $(p_{vex})_{cr}$ に代入すれば、等方性不完全二層板の場合の弾性座屈荷重が求まる。更に、数値計算例によって説明しよう。材料は特に指定しない。等方性不完全二層板の一般的な諸元は

次のようであるとする(図-2、3参照)。

長方形板の大きさは $a \times b = 3 \text{ m} \times 3 \text{ m}$, $E_2 = 206010 \text{ MPa}$, $I_{12} = 2.481 \times 10^{-5} \text{ m}^4/\text{m}$,
 $I_{12v} = 2.069 \times 10^{-5} \text{ m}^4/\text{m}$, $K = 84.95 \text{ MN/m/m}$, $h_2 = 0.006 \text{ m}$, $h_1 = 0.13 \text{ m}$, $\bar{n} = 7.385$,
 $\nu = 0.3$ (仮定), $\nu_2 = 0.3$, $\nu_1 = 0.2$, $s = 0.068 \text{ m}$, $s_1 = 0.0173 \text{ m}$, $s_2 = 0.0507 \text{ m}$, $A_1 = 0.13 \text{ m}^2/\text{m}$,
 $A_2 = 0.006 \text{ m}^2/\text{m}$, $A_v = 0.0236 \text{ m}^2/\text{m}$, $I_1 = 1.831 \times 10^{-4} \text{ m}^4/\text{m}$, $I_2 = 1.8 \times 10^{-8} \text{ m}^4/\text{m}$,
 $I_v = 4.55 \times 10^{-5} \text{ m}^4/\text{m}$, $D_v = 1.03005 \times 10^4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2/\text{m}$ 。

これらの諸元を用いれば、 $\kappa = 3.92/\text{m}$, $\kappa a = 11.76$, $\beta_{11} = 0.1248$, $\alpha_{11} = 0.8752$, および $\gamma_{11} = 0.1041$ ($m=n=1$) となる。等方性完全二層板の弾性座屈荷重は $(p_{vx})_{cr} = 45183 \text{ kN/m}$ と求まる。

等方性不完全二層板の弾性座屈荷重は $(p_{vex})_{cr} = 40922 \text{ kN/m}$ と求まる。この値は $(p_{vx})_{cr} = 45183 \text{ kN/m}$ を $(1 + \gamma_{11})$; 即ち, 1.1041 で割れば, $(p_{vex})_{cr} = 40922 \text{ kN/m}$ となる。

等方性不完全二層板の場合の弾性座屈荷重, $(p_{vex})_{cr}$, は無次元量 α_{11}, β_{11} , および γ_{11} を用いれば, 簡単に求めることができるから, 本提案の方法は実用上の座屈荷重を求める場合に非常に便利である。

7. あとがき

本研究で得られた結論は次の通りである。

- (1) 本論文は等方性不完全二層板(接着剤の弾性変形を考慮した等方性二層板)の弾性座屈解析の微分方程式を誘導した。
- (2) 本論文は四辺単純支持板の面内力が作用する等方性完全二層板、等方性不完全二層板、等方性重ね二層板の弾性座屈荷重の相互関係を明らかにした。

$\beta_{11} = 0$, 即ち, $\alpha_{11} = 1$, $\gamma_{11} = 0$, の場合は等方性完全二層板。

$0 < \beta_{11} < 1$, 即ち, $\alpha_{11} = 1 - \beta_{11}$, $\gamma_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1} \beta_{11}$, の場合は等方性不完全二層板。

$\beta_{11} = 1$, 即ち, $\alpha_{11} = 0$, $\gamma_{11} = \frac{A_1 s_1 s}{\bar{n} I_2 + I_1}$, の場合は等方性重ね二層板。

- (3) 本論文は四辺単純支持板の面内力が作用する等方性完全二層板、等方性不完全二層板、等方性重ね二層板の弾性座屈荷重を求める図を提案している。この図を用いれば、弾性座屈荷重, $(p_{vex})_{cr}$, を簡単に求めることができる。

謝辞

本論文の作成にあたり、北海道大学 渡辺 昇 名誉教授から御指導と有益な助言を頂いたことに対し心より感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 土木学会編：鋼・コンクリート合成構造の設計ガイドライン、1989。
- 2) Newmark, N.M., Siess, C.P., and Viest, I.M.: Tests and Analysis of Composite Beams with Incomplete Interaction, Proc. of the Society for Experimental Analysis, Vol.9, No.1, pp.75-93, 1951.
- 3) 山本 稔：不完全合成桁の曲げ理論、土木学会論文集、No.67, pp.1-10、1960年3月。
- 4) 橋 善雄・足立義雄：不完全合成桁について、土木学会論文集、No.112, pp.11-19、1964年12月。

- 5) 構造力学公式集、土木学会編、1986.
- 6) A.ハウラネック/0.シュタインハルト：鋼橋の理論と計算（橋 善雄、小松定夫共訳）、山海堂、1965.
- 7) 島田静雄、熊沢周明：合成桁の理論と設計、山海堂、1973.
- 8) 浜田純夫、有住康則：不完全連続合成桁の有限要素解析、土木学会論文報告集、第265号、pp.1-9、1977年 9月.
- 9) 小松定夫、佐々木孝：不完全合成桁の理論と近似計算法について、土木学会論文報告集、第329号、pp.27-37、1983年 1月.
- 10) 中井 博編：プレキャスト床版合成桁橋の設計・施工、森北出版、1988.
- 11) 佐藤浩一、渡辺昇：差分方程式の剛性マトリックス解析法について、土木学会北海道支部論文報告集、第44号、pp.87-92、1988.
- 12) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成桁の差分剛性マトリックス解析法について、構造工学論文集 Vol.36A、pp.1223-1236、1990.
- 13) 渡辺昇、井上稔康：CS橋の開発的研究－鉛直突起板の設計について、鋼パネル板のリブの設計について－、土木学会北海道支部論文報告集、第43号、pp.31-36、pp.37-42、1987.
- 14) J.L.Clarke and C.T.Morley：Steel-Concrete Composite Plates with Flexible Shear Connectors, Proc. Inst. Civ.Engrs, Vol.53, Part2, pp.557-568, Dec.,1972.
- 15) K.S.Pister and S.B.Dong：Elastic Bending of Layered Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 85(4), pp.1-10, 1959.
- 16) 佐藤浩一、渡辺昇、井上稔康：不完全合成桁と合成板の解析理論の相似性について、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、pp.55-60、1989.
- 17) 佐藤浩一、渡辺昇、井上稔康：不完全合成板の解析理論の比較について、土木学会第44回年次学術講演会、pp.288-289、1989.
- 18) S.P.Timoshenko and S.Woinowsky-Krieger：Theory of Plates and Shells, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1970.
- 19) Rudolph Szilard：Theory and Analysis of Plates, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.
- 20) 井上稔康、佐藤浩一、渡辺昇：不完全合成板の解析について、構造工学論文集 Vol.36A、pp.1245-1258、1990.
- 21) S.P.Timoshenko and J.M.Gere：Theory of Elastic Stability, 2nd ed., McGraw-Hill Book Company Inc., New York, 1961.
- 22) Koichi SATO：Composite Plates of Concrete Slabs and Steel Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 117(12), pp.2788-2803, 1991.
- 23) Koichi SATO：Elastic Buckling of Incomplete Composite Plates, J. Engrg. Mech., ASCE, 118(1), pp.1-19, 1992.

(1991年9月30日受付)