

2 軸偏心荷重を受ける任意形コンクリート部材 の終局強度解析

ULTIMATE STRENGTH ANALYSIS OF ARBITRARY CONCRETE MEMBER UNDER BIAXIAL LOADING

川上 洵* 宮本 裕** 樫福 浄*** 中狭 靖****

By Makoto KAWAKAMI, Yutaka MIYAMOTO, Kiyoshi KASHIFUKU, Kiyoshi NAKABASAMI

Recently limit state design for reinforced concrete and prestressed concrete members subjected to biaxial bending have been applied in Japan. It is very important to check the safety of structures such as end corner of slabs and end cross beam of prestressed concrete girder due to seismic loads. In this study, the ultimate strength of reinforced and prestressed concrete member with arbitrary section subjected to biaxial bending was analysed by considering non-linear relationships of the used materials. Furthermore, in order to perform the numerical analysis for the derived results, two dimensional Newton-Raphson method and bisection method were introduced. Finally, numerical example and calculated result were shown and the convergency of two dimensional Newton-Raphson method was discussed.

1. まえがき

R C部材やP C部材が軸力及び2軸曲げを受ける応力状態は、床版の端部や高架橋の橋脚等の梁や柱構造をはじめ、任意の方向に地震及び風等の動的荷重を受けるP C斜張橋等に見ることが出来る。このような2軸曲げを受ける部材の構造解析や終局強度を得ることは限界状態設計の観点からみても非常に重要である。

2軸偏心圧縮力を受けるコンクリート部材の場合、矩形断面については弾性計算式¹⁾が導かれている。また、海老沢ら²⁾は、任意形断面を有する鉄筋コンクリート部材の弾性応力解析を行い、実構造物のような複雑な断面形状に対応できる設計計算式を導き、さらに、部材設計において、弾性応力解析だけでなく、コンクリート及び鋼材の非弾性域を考慮した終局強度解析が不可欠であると報告していた。

本論文は、任意形断面を有する鉄筋及びP C鋼材で補強されたコンクリート部材が、2軸偏心圧縮力を受けたときの終局強度を計算することのできる解析理論及び電算プログラムの開発を行ったものである。

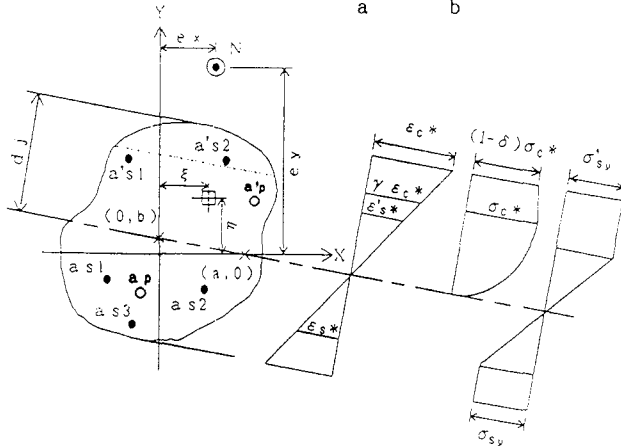
-
- | | | | |
|------|-------------------|-------------|----------------------|
| * | 工博 秋田大学助教授 | 鉱山学部土木環境工学科 | (〒010 秋田市手形学園町1-1) |
| ** | 工博 岩手大学教授 | 工学部土木工学科 | (〒020 盛岡市上田4-3-5) |
| *** | 工修 日本高圧コンクリート株式会社 | | (〒060 札幌市中央区南2条西3丁目) |
| **** | 秋田大学大学院 | 鉱山学専攻土木工学専攻 | (〒010 秋田市手形学園町1-1) |

終局強度は、軸方向の釣合い式と2軸方向の曲げモーメントの釣合い式より得ることが出来るが、これらの連立方程式の解を得るために、2次元Newton-Raphson法及び拡張2分法を用いた。一般に、方程式を解くのにNewton-Raphson法がよく用いられるが、これを連立方程式の解を得るのに用いることが出来るように、2次元にまで拡張したものである。このNewton-Raphson法は、収束が非常に良いという利点を持つが、初期値の与え方によっては発散する危険性を持っている。そこで、2次元Newton-Raphson法に加えて、収束計算が確実に実行できる2分法を連立方程式にまで拡張した「拡張2分法」をあわせて提案し、数値計算例を通して両方法の適用性を検討したものである。

2. 終局強度

任意形コンクリート断面においてy軸からの偏心量 e_x 、x軸からの偏心量 e_y なる位置に軸力 N が作用したときの終局時のひずみ、コンクリート及び鉄筋の応力状態を図-1に示す。また、終局状態における中立軸は、X軸を a 、Y軸を b で切る1点鎖線とし、下記の直線式で表される。

$$\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 1$$



- a_{si} : 引張部鉄筋の断面積
- a'_{si} : 圧縮部鉄筋の断面積
- a_{pi} : 引張部PC鋼材の断面積
- a'_{pi} : 圧縮部PC鋼材の断面積
- d_j : 圧縮縁から中立軸までの距離
- : 鉄筋
- : PC鋼材

図-1 2軸偏心荷重を受ける任意形コンクリート断面とひずみ及び各材料の応力分布

(1) 仮定

終局強度の解析にあたっては、次の仮定が成り立つものとする。

- ①平面保持の法則が成り立つものとする。
- ②コンクリートの引張抵抗を無視する。
- ③破壊は、コンクリート圧縮縁の最大ひずみが、終局ひずみ ϵ_c^* に達したときとする。

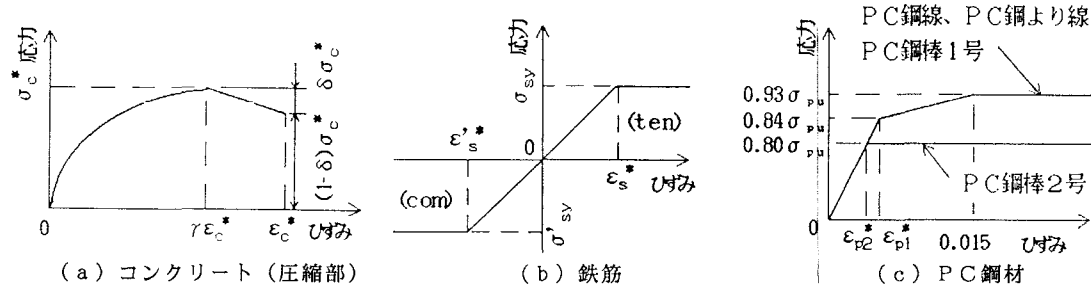


図-2 コンクリート、鉄筋及びPC鋼材の応力ひずみ図

④応力ひずみ関係³⁾は、図-2に示すようにコンクリートに対しては、2次放物線と台形の組合せとし、鉄筋に対しては完全弾塑性体とする。さらに、PC鋼材に対しては、PC鋼線、PC鋼より線及びPC鋼棒1号に対しトライリニア、PC鋼棒2号に対し完全弾塑性体とする。

(2) 各材料の応力度

仮定した中立軸に関し、各材料の応力度はひずみに対応して次の(a)～(c)のように表される。また、部材に対し、軸力に関しては圧縮力を正、曲げモーメントに関しては中立軸より上側に圧縮部分を生じさせるモーメントを正としている。応力度に関しては、全て正とし、釣合い式で引張を負とした。

(a) コンクリート

任意の点(ξ , η)のコンクリートの圧縮応力度は、式(1)で与えられる。

$$\frac{\sigma_{cy}}{\sigma_{c*}} = \begin{cases} - \left(\frac{1}{\gamma d_j \sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 (b\xi + a\eta - ab) (b\xi + a\eta - ab - 2\gamma d_j \sqrt{a^2 + b^2}) & \left(0 \leq \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_{c*}} \leq \gamma \right) \\ - \frac{\delta}{1-\gamma} \frac{1}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} (b\xi + a\eta - ab) + \left(1 + \frac{\delta \gamma}{1-\gamma} \right) & \left(\gamma \leq \frac{\epsilon_{cy}}{\epsilon_{c*}} \leq 1 \right) \end{cases} \quad \dots(1)$$

ここで、 γ は圧縮塑性係数、 δ はフォーリングブランチに対する係数である。

(b) 鉄筋

鉄筋の引張及び圧縮応力度は、式(2)、(3)で与えられる。

$$\sigma_{si} = \begin{cases} \frac{-E_s \epsilon_{c*}}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} (bx_{si} + ay_{si} - ab) & (\epsilon_s < \epsilon_{s*}) \\ \sigma_{sy} & (\epsilon_s \geq \epsilon_{s*}) \end{cases} \quad \text{(引張部)} \quad \dots(2)$$

$$\sigma'_{si} = \begin{cases} \frac{E_s \epsilon_{c*}}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} (bx'_{si} + ay'_{si} - ab) & (\epsilon'_s < \epsilon'_{s*}) \\ \sigma'_{sy} & (\epsilon'_s \geq \epsilon'_{s*}) \end{cases} \quad \text{(圧縮部)} \quad \dots(3)$$

(c) PC鋼材

PC鋼材の全ひずみは、PC鋼材のプレストレイン、PC鋼材位置におけるコンクリートのプレストレイン及び図-1のPC鋼材位置でのひずみの和として表される。ここでPC鋼材位置におけるコンクリートのプレストレインは、他のひずみに比べて小さいので無視し、この全ひずみに対応する応力を図-2(c)より決定した。

PC鋼線、PC鋼より線、PC鋼棒1号に対する引張及び圧縮応力度は、式(4)、(5)で与えられる。

$$\sigma_{pi} = \begin{cases} \frac{-E_p \epsilon_{c*}}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} (bx_{pi} + ay_{pi} - ab) + \frac{P_i}{a_{pi}} & (0 \leq \epsilon_p \leq \epsilon_{p1*}) \\ \frac{0.93 \sigma_{pu} - 0.84 \sigma_{pu}}{0.015 - \epsilon_{p1*}} \left\{ \left(\frac{-\epsilon_{c*} (bx_{pi} + ay_{pi} - ab)}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} + \frac{P_i}{a_{pi} E_p} \right) - \epsilon_{p1*} \right\} + 0.84 \sigma_{pu} & (\epsilon_{p1*} < \epsilon_p \leq 0.015) \\ 0.93 \sigma_{pu} & (\epsilon_p > 0.015) \end{cases} \quad \dots(4)$$

$$\sigma_{pi}' = \frac{-E_p \varepsilon_c^*}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} (b x_{pi}' + a y_{pi}' - ab) + \frac{\bar{P}_i}{a_{pi}} \quad (\varepsilon_p < 0) \quad \dots(5)$$

P C 鋼棒 2 号に対する引張及び圧縮応力度は、式(6)、(7)で与えられる。

$$\sigma_{pi} = \begin{cases} \frac{-E_p \varepsilon_c^*}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} (b x_{pi} + a y_{pi} - ab) + \frac{P_i}{a_{pi}} & (0 \leq \varepsilon_p \leq \varepsilon_{p2}^*) \\ 0.8 \sigma_{pu} & (\varepsilon_p > \varepsilon_{p2}^*) \end{cases} \quad \dots(6)$$

$$\sigma_{pi}' = \frac{-E_p \varepsilon_c^*}{d_j \sqrt{a^2 + b^2}} (b x_{pi}' + a y_{pi}' - ab) + \frac{P_i}{a_{pi}} \quad (\varepsilon_p < 0) \quad \dots(7)$$

P_i は、任意の P C 鋼材 i の有効引張力であり、また圧縮部の P C 鋼材の応力度は、降伏点以下とみなした。

(3) 平衡条件式

軸力及び 2 軸曲げに関する釣合い式は、式(8)、(9)、(10)で示される。

$$N = C_c + C_s' - C_p' - T_s - T_p = \int_{A_c} \sigma_{cy} dA_c + \sum \sigma_{si}' a_{si}' - \sum \sigma_{pi}' a_{pi}' - \sum \sigma_{si} a_{si} - \sum \sigma_{pi} a_{pi} \quad \dots(8)$$

$$M_x = N e_y = \int_{A_c} \sigma_{cy} \eta dA_c + \sum \sigma_{si}' a_{si}' y_{si}' - \sum \sigma_{pi}' a_{pi}' y_{pi}' - \sum \sigma_{si} a_{si} y_{si} - \sum \sigma_{pi} a_{pi} y_{pi} \quad \dots(9)$$

$$M_y = N e_x = \int_{A_c} \sigma_{cy} \xi dA_c + \sum \sigma_{si}' a_{si}' x_{si}' - \sum \sigma_{pi}' a_{pi}' x_{pi}' - \sum \sigma_{si} a_{si} x_{si} - \sum \sigma_{pi} a_{pi} x_{pi} \quad \dots(10)$$

2 軸曲げのみが部材断面に作用するときは、式(8)において左辺を 0 とした式を用い、平衡条件式とする。

これらの式の第 1 項は、コンクリートの受けもつ断面力を示し、その中の ξ と η に関する積分項は、ガウスの積分定理²⁾を用いた線積分に置換することにより得られる。

(4) 中立軸の決定

式(8)、(9)、(10)の右辺に、コンクリート、鉄筋及び P C 鋼材の応力度を代入することで中立軸に関する係数 a 、 b を未知数とする方程式となる。式(9)、(10)は、式(8)を用いて次式のように置き換えられる。

$$f_x(a, b) = M_x - N e_y = 0 \quad \dots(11)$$

$$f_y(a, b) = M_y - N e_x = 0 \quad \dots(12)$$

式(11)、(12)の 2 変数連立方程式を解くことで終局時における中立軸位置が決定される。 a 、 b を変数とする連立方程式の数値解法として 2 次元 Newton-Raphson 法が用いられるが、本研究では、この数値解法として、2 分法を 2 次元に応用した「拡張 2 分法」についても考える。

2 次元 Newton-Raphson 法及び拡張 2 分法の 2 通りの解法を以下に示す。

(a) 2 次元 Newton-Raphson 法

式(11)、(12)の a 、 b を a_n 、 b_n に置き換える。

$$f_x(a_n, b_n) = M_x - N e_y = 0 \quad \dots(13)$$

$$f_y(a_n, b_n) = M_y - N e_x = 0 \quad \dots(14)$$

式(13)、(14)を式(15)に代入する。

$$\left. \begin{aligned} a_{n+1} &= a_n - \frac{\frac{\partial}{\partial b} f_y(a_n, b_n) f_x(a_n, b_n) - \frac{\partial}{\partial b} f_x(a_n, b_n) f_y(a_n, b_n)}{\frac{\partial}{\partial a} f_x(a_n, b_n) \frac{\partial}{\partial b} f_y(a_n, b_n) - \frac{\partial}{\partial b} f_x(a_n, b_n) \frac{\partial}{\partial a} f_y(a_n, b_n)} \\ b_{n+1} &= b_n - \frac{-\frac{\partial}{\partial a} f_y(a_n, b_n) f_x(a_n, b_n) + \frac{\partial}{\partial a} f_x(a_n, b_n) f_y(a_n, b_n)}{\frac{\partial}{\partial a} f_x(a_n, b_n) \frac{\partial}{\partial b} f_y(a_n, b_n) - \frac{\partial}{\partial b} f_x(a_n, b_n) \frac{\partial}{\partial a} f_y(a_n, b_n)} \end{aligned} \right\} \cdots (15)$$

式(15)を用い繰り返し計算を行い、 $|(b_{n+1} - b_n) / b_n|$ が所定の値に収束したときに終局時における中軸を表す直線式の係数 a 、 b の値を得ることが出来る。

(b) 拡張2分法

式(11)、(12)の a 、 b を $a_{n,j}$ 、 $b_{n,j}$ に置き換える。

$$f_x(a_{n,j}, b_{n,j}) = M_x - N e_y = 0 \quad \cdots (16)$$

$$f_y(a_{n,j}, b_{n,j}) = M_y - N e_x = 0 \quad \cdots (17)$$

式(16)及び(17)の連立方程式を解くために、図-3のフローチャートに従って最初に第1方程式：式(16)を満足する解を、次に第2方程式：式(17)を満足するように順に解くこととする。

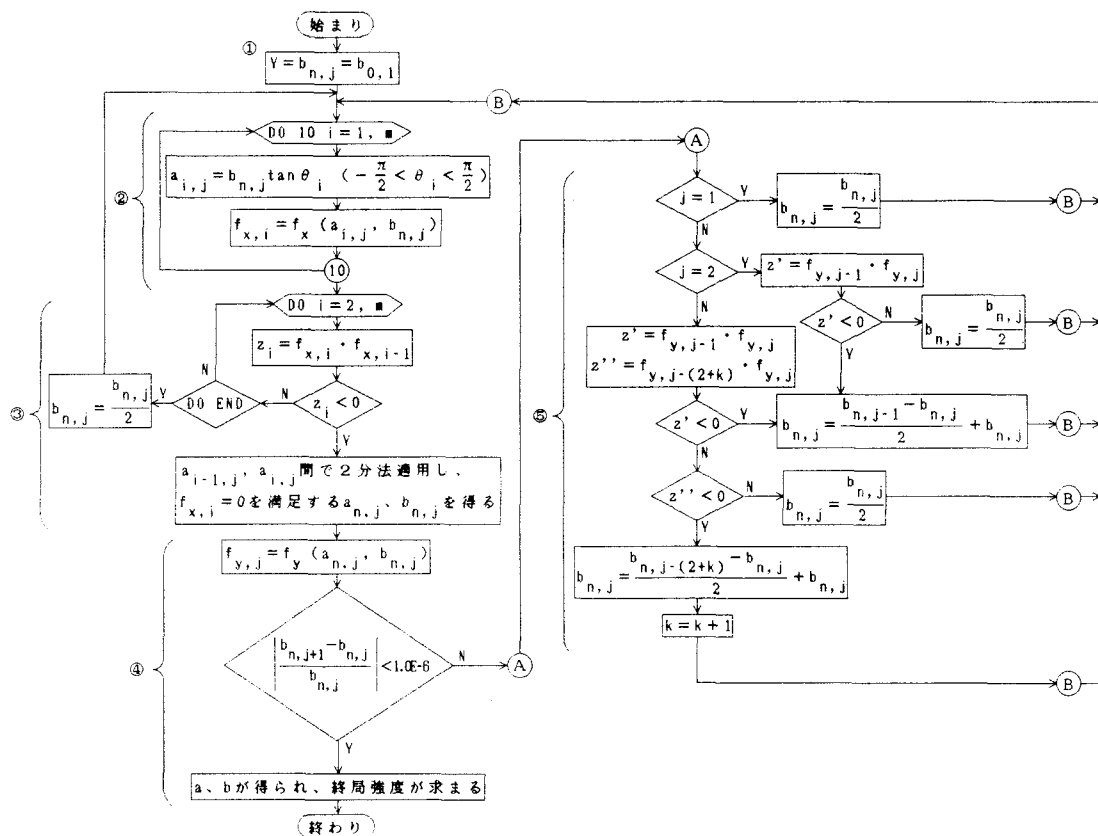


図-3 拡張2分法のフローチャート

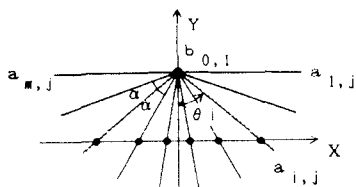


図-4 $b_{0,1}$ と $a_{i,j}$ の関係

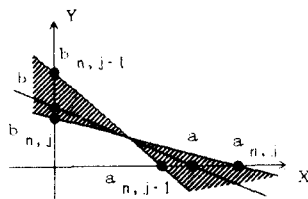


図-5 解 a, b の位置

1) 第1方程式の解

フローチャートに対応する次のステップ①～③に従って、第1方程式を解く。

- ①終局状態における中立軸の y 軸切片を初期値 $y = b_{n,j} = b_{0,1}$ と仮定する。 $b_{n,j}$ に一定値を与えることによって第1方程式は、2変数から $a_{n,j}$ に関する1変数の方程式になる。
- ②第1方程式を満足する値 $a_{n,j}$ を求めるために、図-4に示されるように、仮定した $y = b_{0,1}$ を軸にし、時計回りに α ずつ角度を振ることで得られる X 軸との交点 $a_{i,j}$ を式(17)に代入し、その関数を $f_{x,i}$ とする。
- ③ $f_{x,i}$ の符号の変化をみるために、 $f_{x,i}$ と $f_{x,i-1}$ を乗じた値を z_i とし、正の時は、仮定した $b_{0,1}$ の値の半分の値 $b_{n,j}$ を仮定し、②へもどる。また負の時は、 $a_{i-1,j}$ 、 $a_{i,j}$ 間に解があると考えられるので、2分法を適用することで $f_{x,i} = 0$ を満足する値 $a_{n,j}$ が計算される。

2) 第2方程式の解

- ④第1方程式を満足する解 $(a_{n,j}, b_{n,j})$ を第2方程式に代入し、その関数を $f_{y,j}$ とする。第1方程式を満足した解を最初に第2方程式に代入した場合($j = 1$)は、⑤へいく。第2方程式に2度目以上の代入の場合($j \geq 2$)は、 $|(b_{n,j+1} - b_{n,j}) / b_{n,j}|$ が 10^{-6} (仮定値と計算値が、有効桁数ではほぼ5桁まで等しくなる)より小さい時の解 $(a_{n,j}, b_{n,j})$ が、終局時における中立軸を表す直線式の係数 a, b となり、終局強度が計算できる。 $|(b_{n,j+1} - b_{n,j}) / b_{n,j}|$ が 10^{-6} 以上の場合、⑤へいく。
- ⑤第1方程式を満足した解を最初に第2方程式に代入した場合($j = 1$)は、仮定した $b_{n,j}$ の値の半分の値 $b_{n,j}$ を仮定し、②へもどる。また、第2方程式に2度目の代入の場合($j = 2$)は、 $f_{y,j-1}$ と $f_{y,j}$ を乗じた値を z' とし、正の時は、仮定した $b_{n,j}$ の値の半分の値 $b_{n,j}$ を仮定し、②へもどる。また負の時は、解があると考えられるので、 $b_{n,j-1}$ 、 $b_{n,j}$ 間を2等分した値 $b_{n,j}$ を仮定し、②へもどる。第2方程式に3度目以上の代入の場合($j \geq 3$)は、 $f_{y,j-1}$ と $f_{y,j}$ を乗じた値を z' 、 $f_{y,j-(2+k)}$ と $f_{y,j}$ を乗じた値を z'' とし、どちらも正の時は、仮定した $b_{n,j}$ の値の半分の値 $b_{n,j}$ を仮定し、②へもどる。 z' または z'' が、負の時は、解があると考えられるので、 $b_{n,j-1}$ 、 $b_{n,j}$ 間を2等分した値 $b_{n,j}$ を仮定、または $b_{n,j-(2+k)}$ 、 $b_{n,j}$ 間を2等分した値 $b_{n,j}$ を仮定し、②へもどる。

このフローチャートにより、終局時における中立軸を表す直線式の係数 a, b が計算される。

よって、上記2通りの数値解法、2次元Newton-Raphson法と拡張2分法を用い、それぞれの電算プログラムを作成し、比較検討した。

(5) 終局強度

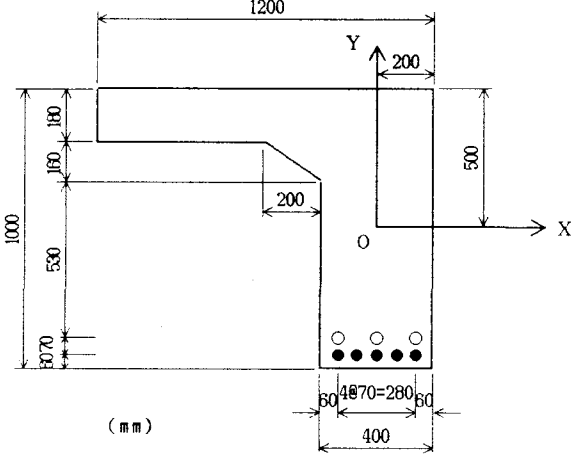
求められた中立軸を表す直線式の係数 a, b 及び a, b により得られる断面諸量を式(8)、(9)及び(10)に代入することで、終局強度が計算される。

3. 数値計算例

図-6に示すL形断面に対して数値解析を行う。本例では、鉄筋コンクリート(RC)及びプレストレストコンクリート部材(PC1)及び鉄筋で補強されたプレストレストコンクリート部材(PC2)を扱うこ

とにする。使用したPC鋼材は鋼棒2号であり、その応力ひずみ関係は、バイリニアである。

PC 1及びPC 2部材に対するプレストレス力は、1本のPC鋼材当りそれぞれ35.0tf、13.1tfとする。RC、PC 1及びPC 2部材の3タイプに対し、(1)1軸偏心荷重 $e_x=0\text{cm}$ 、 $e_y=41\text{cm}$ 、(2)2軸偏心荷重 $e_x=30\text{cm}$ 、 $e_y=40\text{cm}$ の2通りの場合を計算した。

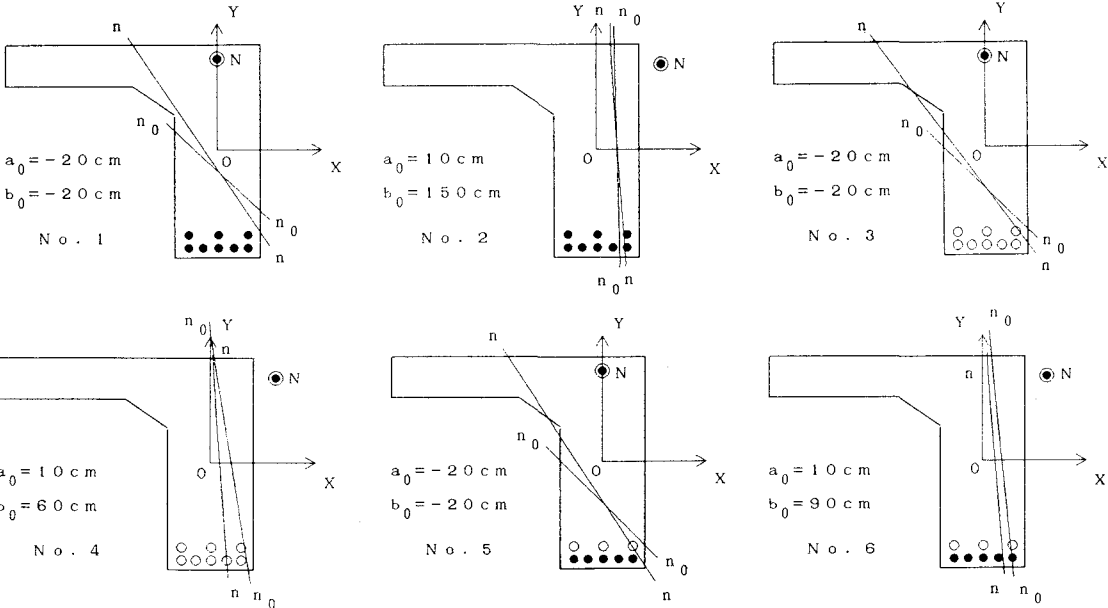


$$\begin{aligned} \sigma_{sy} &= 3500 \text{ kgf/cm}^2 \\ E_s &= 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_{pu} &= 13500 \text{ kgf/cm}^2 \\ E_p &= 2.0 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2 \\ \sigma_c^* &= 400 \text{ kgf/cm}^2 \\ r &= 0.6 \quad \bigcirc : \text{PC鋼}, \phi = 26\text{mm} \\ \delta &= 0.15 \quad \bullet : \text{鉄筋}, D = 25\text{mm} \\ \epsilon_c^* &= 0.0035 \end{aligned}$$

図-6 L形断面

表-1 解析結果

R C		偏心量		終局時の中立軸		終局強度			
		$e_x(\text{cm})$	$e_y(\text{cm})$	$a(\text{cm})$	$b(\text{cm})$	$N_u(\text{tf})$	$M_{xu}(\text{tfm})$	$M_{yu}(\text{tfm})$	$M_u = \sqrt{M_{xu}^2 + M_{yu}^2}(\text{tfm})$
R C	1	0	41	-5.917	-6.467	614.5	251.9	0.0	251.9
	2	30	40	10.86	166.7	159.2	63.69	47.77	79.61
PC 1	3	0	41	-13.31	-17.04	689.3	282.6	0.0	282.6
	4	30	40	3.952	57.36	268.6	107.5	80.59	134.4
PC 2	5	0	41	-12.99	-16.51	680.4	279.0	0.0	279.0
	6	30	40	6.205	94.54	226.6	90.63	67.97	113.3



a_0, b_0 :初期値

図-7 終局強度における中立軸の位置

断面諸元は図-6のとおりである。数値解法にNewton-Raphson法を用いた場合、中立軸の初期値として、図-7に示したような直線 $n_0 - n_0$ を考える。また、終局時の中立軸を $n - n$ と表している。

2次元Newton-Raphson法及び拡張2分法の解析結果は、当然同じであり、これを表-1に示す。

2次元Newton-Raphson法を用いた場合には、図-8(a)～(c)のような初期値を与えた時、発散してしまい終局時の中立軸及び強度を得られなかった。

- a) 断面外に中立軸を想定したとき
- b) 軸力の作用点と図心とを結ぶ直線に対し、ほぼ平行な中立軸を想定したとき
- c) コンクリート部、鉄筋及びP C鋼材のつりあいから考えてあまり極端な中立軸を想定したとき

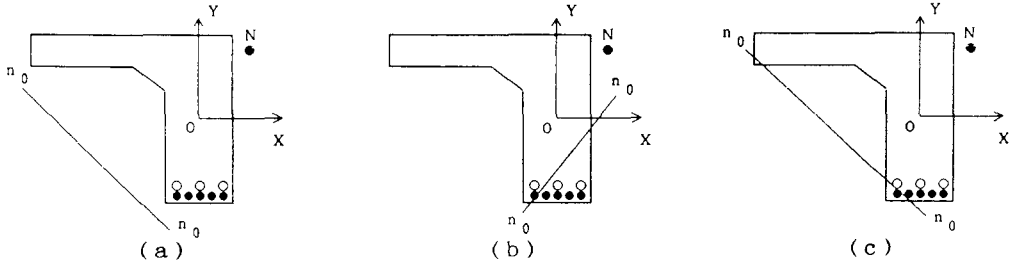


図-8 初期値による発散例

4. 結論

本論文においては、軸力及び2軸曲げを受ける任意形コンクリート断面の鉄筋及びP C鋼材で補強された部材の終局強度を解析的に明らかにし、収束計算に拡張2分法を用いた電子計算プログラムを作成した。解析手法の特長を列記すると次のとおりである。

- 1) 2軸曲げを受ける任意形断面を対象としているので、開断面はじめ多室箱桁等の強度解析が容易である。
- 2) 終局強度を求める際に、応力ひずみ曲線は、コンクリートに対し、2次放物線と台形の組合せとし、鉄筋に対しては、完全弾塑性体、そしてP C鋼材に対しては、パイリニアまたはトライリニアを仮定しているため、軽量コンクリートをはじめとして、種々のコンクリート及び補強材に対しても本解析法が適用可能である。
- 3) 収束計算の数値解法として、非常に有効な2次元Newton-Raphson法及び拡張2分法を示した。両者は同じ結果を得るが、特に後者は、収束回数が多くなるものの確実な収束を示した。
- 4) 2次元Newton-Raphson法を用いた場合、初期値の与え方によっては、発散する場合があります、十分注意を要する。

なお本論文で得られた解析手法は、2軸曲げを受ける部材の弾性応力解析及びひびわれ強度解析にも適用できる。

参考文献

- 1) 水野 高明：鉄筋コンクリート工学，森北出版，pp.160-166，1965.
- 2) 海老沢 明，中山俊明，大地羊三：任意形断面を持つ鉄筋コンクリート部材の応力算定，土木学会誌，pp.22-27，11，1977.
- 3) M. Kawakami, et. al. : Limit States of Cracking and Ultimate Strength of Arbitrary Concrete Section Under Biaxial Loading, ACI JOURNAL, Vol.82, No.2, pp. 203-212, 1985.

(1991年9月30日受付)