構造工学論文集 Vol.38A（1992年3月） 土木学会

吊床版歩道橋の鉛直固有振動数の解析法について

ANALYTICAL METHOD OF NATURAL FREQUENCY IN VERTICAL PLANE OF STRESS RIBBON PEDESTRAIN BRIDGE

水田洋司*・平井一男**・元田和章***・樋渡則章****
By Yoji MIZUTA ,Itio HIRAI ,Kazuaki MOTODA and Noriaki HIWATASHI

The stress ribbon bridge swings easily by dynamic load , becouse of it's low bending stiffness . So it is necessary to clear up the characteristics of vibration and the utilities considered the human response to vibration . In this paper , the eigenvalue analysis method in a vertical plane of stress ribbon bridge is proposed . In the numerical examples , the frequencies of the stress ribbon bridge of Higurashi and Umenoki Todoroki Park are calculated using the proposed method . These calculated values are compared with the experimental values . Moreover the characteristics of natural frequencies of the stress ribbon pedestrain bridge are become clear using non-dimentional analysis .

1．まえがき

吊床版橋は1958年西ドイツ、デビィダーグ社の U.Finsterwalder 博士によってボスポラス海峡横断計画において提案された吊構造の橋梁である。1964年にスイスで輸送ベルトコンベアー用の橋として初めて実用化さている。わが国では1960年代に天草1号橋を吊床版橋で架ける案が出されたが、実現にはいたらなかった。その後、1969年に万博9号橋（大阪府、歩道橋）が架設され、現在までに多くの歩道橋[(1)]が架けられている。なかでも、梅の木轟公園吊り橋（熊本県、歩道橋）は支間長が105mの細長い歩道橋[(2)]である。

吊構造では、座屈の心配がなく材料の強度を十分に利用できるため、スレンダーな極めて軽い構造体の作成が可能となる。また、床版をコンクリートで作ればＰＣ鋼材の防錆の役目を果たし、施行面の迅速化、維持費の軽減等が期待出来る。このように美観・施行・経済性の面から、このタイプの橋は簡易吊橋に代わる

* 工博 八代工業高等専門学校教授 土木建築工学科 （〒866 八代市平山新町2627）
** 工博 熊本大学教授 工学部環境土木工学科 （〒860 熊本市黒髪2丁目39-1）
*** 工修 鹿島建設(株) 九州支店土木設計課 （〒812 福岡市博多区博多駅前3丁目12-10）
**** 住友建設（株） 熊本営業所所長 （〒860 熊本市手取本町2-5）

橋梁形式の一つとして今後増加すると考えられる。しかし、今日までわが国で架設された吊床版橋は、スレンダーな構造形式のものが多く、揺れやすいと考えられる。したがって、この形式の橋の振動特性、振動感覚を考慮した使用性について明確にする必要があろう。本研究では吊床版橋の振動特性を調べる方法として、アーチ系橋梁の解析理論を適用する連続体解析の方法を提案した。提案法の妥当性は、ひぐらし橋[3]、梅の木轟公園吊り橋を例にとり、提案法による値と離散モデルによる3次元解析解、実橋の測定値(実測値)とを比較し検討している。また、吊り床版橋は曲げ剛性が小さいために、振動状態は梁の曲げ振動よりも弦の振動に近いと考えられ、支点の境界条件によって固有振動数・固有モードに大きな違いは生じないであろう。この点を調べるために、境界条件の取り方についても検討している。さらに、梅の木轟公園吊橋の諸元を無次元量解析に利用して吊り床版歩道橋のサグ比と固有振動数の関係について検討した。

2．アーチ橋への置換

吊橋およびアーチ系橋梁の鉛直振動を連続体として解析する方法が文献(4)で提案されている。本研究ではこの考え方を吊床版橋に適用し、吊床版橋の鉛直振動を解析する手法について述べる。この論文で使用するアーチ系橋梁（図-1）の式は次の仮定のもとに導かれている。

①アーチ（ケーブル）の軸線は放物線とする。

②補剛トラスは定断面桁に換算して扱う。

③アーチ（ケーブル）の断面も定断面に換算して扱う。

④吊り材の伸びを無視する。

⑤アーチ（ケーブル）の質量を無視する。

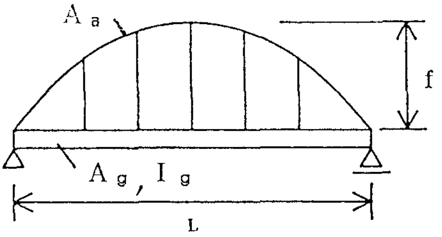


図-1 ランガー橋

文献(4)によれば、アーチ部が曲げ剛性を持たないランガー橋(図-2)の振動数方程式は

$$1+\frac{512\beta}{\pi^6}\sum_{n}\frac{1}{n^2(n^4-\tilde{\lambda})}=0 \quad (1)$$

ここに、$n=1,3,5,\cdots$

$$\tilde{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda_1} \quad (2) \qquad \lambda=\omega^2 \quad (3)$$

$$\lambda_1=\omega_{g1}{}^2=\left(\frac{\pi}{L}\right)^4\left(\frac{EI}{\rho}\right) \quad (4)$$

$$\beta=\frac{f^2B}{I} \quad (5)$$

$$B=\frac{A_aA_g}{A_a+A_g\{1+8(f/L)^2+19.2(f/L)^4\}} \quad (6)$$

$$\omega_{gn}=\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad (7)$$

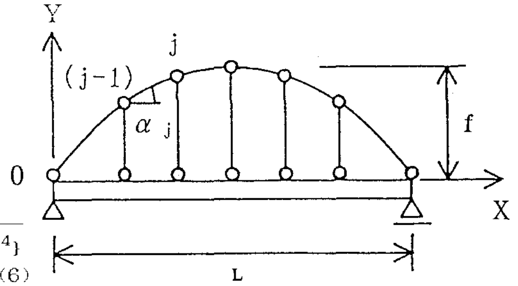


図-2 ランガー橋のモデル化

f：アーチのライズ長さ　I：桁断面二次モーメント　L：スパン長

A_a：アーチ断面積　A_g：桁断面積　ρ：単位長さ当たりの質量　E：弾性係数

ω_{gn}：桁のn次の固有振動数(rad/sec)　ω：ランガー橋の固有振動数(rad/sec)

となり、固有振動数ωが求められる。算定される固有振動数は対称モードに対応する振動数ω_m(m=1, 3, ･･･)のみである。小さい方からω_1、ω_3、･･･ と表わされる。対応する正規化したm次の振動モード$\Phi_m(x)$はランガー橋のたわみの式より求められ、

$$\Phi_m(x)=C_m\sum_n\left[b_{mn}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{8}$$

ここに、

$$C_m^2=\frac{2}{\rho L}\frac{1}{\sum_n b_{mn}^2} \qquad (n=1,3,5,\cdots) \tag{9}$$

$$b_{mn}=\frac{1}{n\,(n^4-\lambda_m^4)} \qquad (n=1,3,5,\cdots) \tag{10}$$

$\lambda_m=\omega_m^2$、xは桁上の位置を現わす。

以上は対称振動に関する固有振動数、固有モードの式である。逆対称振動のときは、アーチが働かないので補剛桁だけの振動を考えればよい。したがって、固有振動数は

$$\omega_{gm}=\left(\frac{m\pi}{L}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \qquad (m=2,4,6,\cdots) \tag{11}$$

固有モードは

$$\Phi_m(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho L}}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) \qquad (m=2,4,6,\cdots) \tag{12}$$

また、ローゼ橋は図-3に示すようにランガー橋のアーチ部に曲げ剛性を持たせてアーチを補強したものであり、ランガー橋の固有振動数、固有モードの式を用いてローゼ橋の固有振動数、固有モードを求めることが出来る。すなわちアーチ部の曲げ剛性EI_aを補剛桁の曲げ剛性にくりいれて、見かけ上、補剛桁の曲げ剛性 EI が $E(I_a+I_g)$ なるランガー橋と考えて解くことが出来る。したがって、式(1)～式(12) において、 $I=I_a+I_g$ と置いた式を用いればローゼ橋の固有振動数、固有モードを算定することができる。

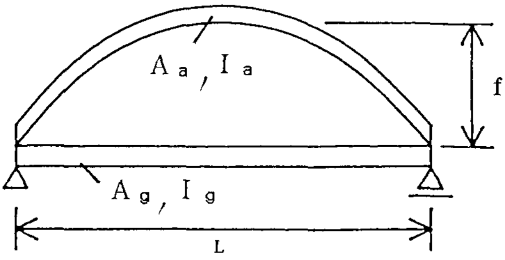


図-3 ローゼ橋

2－1. 両端ヒンジの吊り床版橋

吊り床版橋の両端を図-4の様にヒンジにモデル化して解く方法について述べる。ここで、ランガー橋の場合と同様に、次の仮定を設ける。

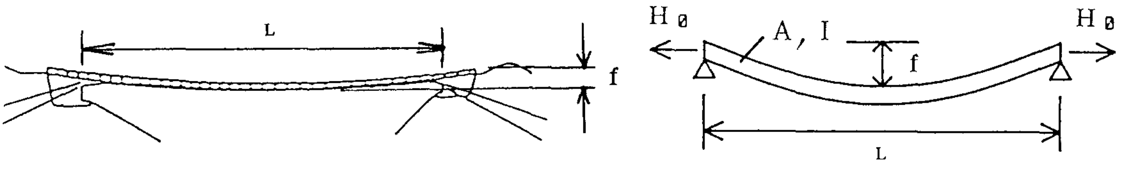


図-4 吊床版橋のモデル化

①床版の軸線は放物線である。

②床版は定断面に換算して扱う。

③床版の伸びを無視する。

④スパン長は一定である。

これらの仮定を考慮すれば、吊床版橋は図-5に示すようなアーチ部の曲げ剛性EI、補剛桁の曲げ剛性が零の逆ローゼ橋と見なせる。仮定④から、置換したローゼ橋の桁部の断面積A_gが$A_g=\infty$と考えることができる。したがって、吊床版橋は図-6に示すようなランガー橋に置換することが可能である。これによって、式(6)は次式のように変わる。

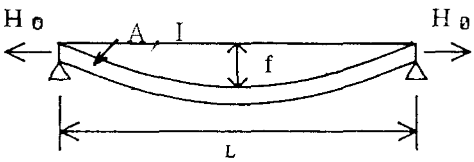


図-5 逆ローゼ橋

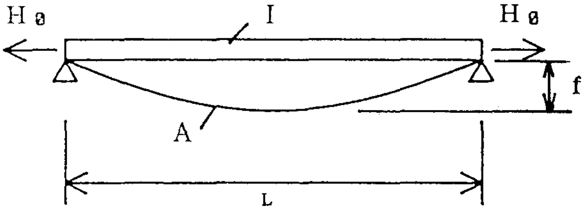


図-6 置換したランガー橋

$$B' = \frac{A}{1+8(f/L)^2+19.2(f/L)^4} \qquad (13)$$

また、吊床版橋には 図-4(b)のように、初期水平力 H_0が作用している。したがって、桁のn次の固有振動数ω_{gn}は軸力を考慮した次のようなω_{gn}' を用いなければならない。

$$\omega_{gn}' = \omega_{gn}\sqrt{1+\frac{\zeta}{n^2}} \qquad (14)$$

ここに、$\zeta = \left(\frac{H_0 L^2}{E I \pi^2}\right)$ (15)

式(13)、(14)を考慮すれば吊り床版橋の振動数方程式は

$$1+\frac{512\beta'}{\pi^6}\sum_n \frac{1}{n^2\{n^4(1+\zeta/n^2)-\bar{\lambda}\}} = 0 \qquad 16)$$

ここに、$n=1,3,5,\cdots$

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1'} \qquad (17) \qquad\qquad \lambda_1' = \omega_{g1}'^2 \qquad (18)$$

$$\beta' = \frac{f^2 B'}{I} \qquad (19)$$

となる。吊り床版橋の場合には、水平張力 H_0とサグ比(f/L) の間に次式

$$H_0 \times \frac{f}{L} = \frac{\rho g L}{8} \qquad (20)$$

が成立する。ここに、gは重力加速度である。式(20)の関係より、式(15)は

$$\zeta = \frac{L^2 \rho g L}{8 E I \pi^2 (f/L)} \qquad (21)$$

となる。以上の式より、吊り床版橋の固有振動数ω($\sqrt{\lambda}$)を計算することができる。得られる振動数は対称振動数ω_m(m=1, 3, ･･･)のみで、逆対称振動数ω_m(m=2, 4, ･･･)は補剛桁の固有振動数と等しくなり、式(14)から求められる。式(16)で算定されたm次の固有振動数ω_m に対応する対称振動のm次の正規化固有モード$\Phi_m(x)$は水平張力を受けるランガー橋の変位式より算定され

$$\Phi_m(x)=C_m\sum_n b_{mn}\left[sin(\frac{n\pi x}{L})\right] \quad (22)$$

ここに、

$$C_m^2=\frac{2}{\rho L}\frac{1}{\sum_n b_{mn}^2} \quad (n=1,3,5,\cdots) \quad (23)$$

$$b_{mn}=\frac{1}{n\{n^4(1+\zeta/n^2)-\lambda_m\}} \quad (n=1,3,5,\cdots) \quad (24)$$

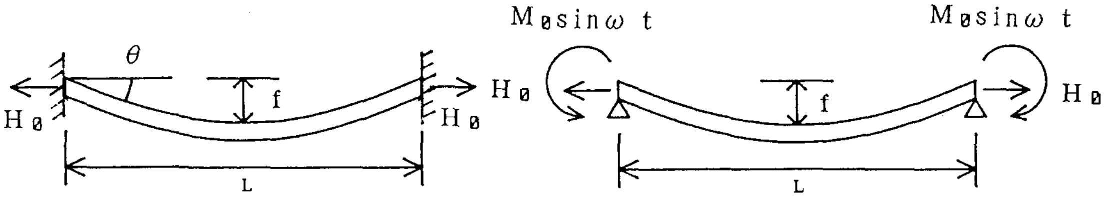
から計算される。また、逆対称振動の正規化固有モードは

$$\Phi_m(x)=\sqrt{\frac{2}{\rho L}}\,sin(\frac{m\pi x}{L}) \quad (m=2,4,6,\cdots) \quad (25)$$

より求められる。

2－2．両端固定の吊床版橋

吊り床版橋は図-4(a)に示すように、床版は橋台で固定されたような形をしており、これを図-7(a) に示すような両端固定のモデルに置換する。この吊床版橋は両端ヒンジの吊床版橋を利用すれば、図-7(b) のように両端にモーメント荷重が作用している系にモデル化することが可能である。この系で両端を固定にするためには、両端でのたわみ角θが0になるようにしてやればよい。したがって、図-6のランガー橋の補剛桁両端に$M_0\ sin\omega t$ が作用した場合の解析を行ない、両支点でのたわみ角$\theta=0$の条件を用いて基礎式を求めることができる。基礎式はランガー橋から導くため、この場合も対称振動、逆対称振動に分けて考える必



(a) 両端固定の吊床版橋　　　(b) モーメント荷重を受ける吊床版橋

図-7 弾性拘束された吊床版橋

要がある。まず、対称振動の場合について述べる。図-7(b) の系のたわみの式を微分して、たわみ角の算定式を求め、両端固定の条件式(両支点で$\theta=0$)を用いると次式が得られる。

$$\sum_n \frac{4n\pi}{\rho L^2(\omega_{gn}'^2-\omega^2)}\left(p_g\frac{L}{n\pi}-\frac{n\pi}{L}M_0\right)=0 \quad (n=1,3,5,\cdots) \quad (26)$$

この式を無次元化すると

$$\frac{4L^3}{EI\pi^2}\sum_n\frac{1}{n^2\{n^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}\}}p_g-\sum_n\frac{n^2}{n^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}}(\frac{M_0}{L})\Big\}=0 \quad (27)$$

ここに、n=1, 3, 5, ･･･

となる。また、ランガー橋では補剛桁とアーチ部が一体となって振動する条件より

$$\left\{\frac{512\beta}{\pi^6}\sum_n \frac{1}{n^2\{n^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}\}}+1\right\}p_g-\frac{512\beta}{\pi^4}\sum_n \frac{1}{n^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}}\left(\frac{M_0}{L}\right)=0 \qquad (28)$$

ここに、$n=1,3,5,\cdots$

式(27)、(28)をまとめると

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_g \\ M_0/L \end{bmatrix}=0 \qquad (29)$$

ここに、

$$A_{11}=1+\frac{512\beta}{\pi^6}\sum_n \frac{1}{n^2\{n^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}\}} \qquad (30a)$$

$$A_{12}=-\frac{512\beta}{\pi^4}\sum_n \frac{1}{\pi^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}} \qquad (30b)$$

$$A_{21}=-\frac{1}{\pi^2}\sum_n \frac{1}{n^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}} \qquad (30c)$$

$$A_{22}=-\sum_n \frac{n^2}{n^4(1+\zeta/n^2)-\overline{\lambda}} \qquad (30d)$$

これより、振動数方程式は次式となる。

$$Det\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix}=0 \qquad (31)$$

式(31)から、系の対称振動数ω_m(m=1, 3, ･･･)が求められる。対応するm次の固有モードは

$$\Phi_m(x)=c_m\varphi_m(x) \qquad (32a)$$

$$\varphi_m(x)=\sum_n(b_{mn}+c_{mn})\ sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \qquad (32b)$$

$$c_m=\sqrt{\frac{1}{(\rho L/2)\sum_n(b_{mn}+c_{mn})^2}} \qquad (n=1,3,5,\cdots) \qquad (32c)$$

$$b_{mn}=\frac{1}{n\{n^4(1+\zeta/n^2)-\lambda_m\}} \qquad (32d) \qquad c_{mn}=\frac{M/L^2}{p_g}\frac{\pi^2}{n\{n^4(1+\zeta/n^2)-\lambda_m\}} \qquad (32e)$$

逆対称振動は補剛桁のみにモーメント荷重 $M_0\ sin\omega t$が作用した場合の式となる。この式で固定端でのたわみ角$\theta=0$の条件から、振動数方程式が得られ、次式となる。

$$\sum_n \frac{n^2}{n^4(1+\zeta/n^2)-\lambda}=0 \qquad (n=2,4,6,\cdots) \qquad (33)$$

求められる振動数は逆対称振動数ω_m(m=2, 4, ･･･)で、対応するm次の正規化モードはたわみの式より

$$\Phi_m(x)=c_m\varphi_m(x) \qquad (34a)$$

$$\varphi_m(x)=\sum_n \frac{n}{n^4(1+\zeta/n^2)-\lambda_m} sin(\frac{n\pi x}{L}) \quad (n=2,4,6,\cdots) \tag{34b}$$

ここで、C_mは式(32c)、(32d)、(32e)を用いて求める。ただし、m=2,4,6,・・・である。

3．平面解析の妥当性

提案する方法は鉛直振動を対象とした平面解析であるが、この方法の妥当性を検討するために、愛媛県新居浜市滝の宮カントリークラブ内にあるひぐらし橋と熊本県八代郡泉村の梅の木轟公園吊り橋（梅の木橋と略す）を例にとり、提案法で求めた値と3次元の離散解析解、実測値とを比較した。ひぐらし橋、梅の木橋の諸元を表-1に記す。また、図-8に離散モデルを図示し、表-2には換算断面積、換算弾性係数を表記している。ただし、換算断面積（A）は断面構成材料の全断面積とし、換算弾性係数（E）は式(36)より求めた。

$$A=A_s+A_p+A_c \tag{35}$$

$$E=(A_sE_s+A_pE_p+A_cE_c)/A \tag{36}$$

ここに、A_s、A_p、A_c はそれぞれ、鉄筋、ＰＣ鋼棒、コンクリートの断面積であり、E_s、E_p、E_c はそれぞれ、鉄筋、ＰＣ鋼棒、コンクリートの弾性係数である。表-3にはひぐらし橋、表-4には梅の木橋の固有振動数を示している。表中の実測値のうち、ひぐらし橋は住友建設(株)[(5)]、梅の木橋は筆者らが測定した値である。

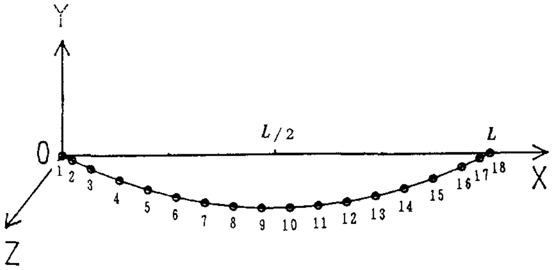


図-8 離散モデル

表-3、4から、吊床版橋の種類によらず、提案法による値、3次元解析値、実測値がよく一致していることが分かる。このことより、吊床版橋のような細長い橋の場合には、面内、面外、ねじりの連成が小さく、提案法の様に鉛直振動だけを取り出して解析しても十分な精度で計算可能である。このことは3次元解析で得られるモードと提案法で得られるモードの比較からも推察できる。提案法で解析した固有振動数の境界条件による差は両端ヒンジと両端固定で 8%前後と小さく、振動状態は弦の振動に近いと考えられる。しかし、表-3、4 のひぐらし橋、梅の木橋の実測値と解析値を比較すると、両端固定の方が両端ヒンジよりも実測値に近く、境界条件は両端固定と考える方が妥当であろう。

表-1 ひぐらし橋・梅の木橋の諸元

諸量		ひぐらし橋	梅の木橋
支　間	L(cm)	6300.0	10500.0
基本サグ量	f(cm)	187.0	310.0
初期水平力	H(kgf)	269500.0	445300.0
全断面積	A(cm^2)	3675.0	3875.0
ｺﾝｸﾘｰﾄの弾性係数	E(kgf/cm^2)	3.5×10^5	3.5×10^5
ポアソン比	ν	0.15	0.15
断面二次	I_y(cm^4)	13820000.0	12590000.0
モーメント	I_z(cm^4)	125000.0	120000.0
ねじり係数	J(cm^4)	280800.0	430000.0
単位長さ当りの質量	ρ(kgf·sec^2/cm^2)	0.010390	0.010832

表-2 換算断面積・換算弾性係数

換算量 ＼ 材料と橋の種類	ｺﾝｸﾘｰﾄ		ＰＣ鋼棒		鉄筋		換算値	
	ひぐらし	梅の木	ひぐらし	梅の木	ひぐらし	梅の木	ひぐらし	梅の木
断面積 (cm^4)	3609.2	3766.9	50.1	80.2	15.7	27.9	3675.0	3875.0
弾性係数 (kgf/cm^2)	3.5×10^5	3.5×10^5	2.0×10^6	2.0×10^6	2.1×10^6	2.1×10^6	3.8×10^5	4.0×10^5

4．固有振動数の無次元量解析

ここでは表-1に記した梅の木橋の諸元を用いて吊り床版歩道橋の鉛直固有振動数の特性を調べた。解析は両端固定と考えて無次元量解析を行い、図-9に示すようなサグ比と固有振動数に関する変化曲線を得た。図中の変化曲線は式(30a)～(31) において ω/ω_{g1}の値を仮定してλを求め、それに対する β' すなわち f/Lを求めることによって簡単に得られる。縦軸はサグ比(f/L) 横軸は補剛桁の１次モードの固有振動数に対する比(ω/ω_{g1}) を表わし、図中の横軸方向の実線と各次数の交点は、梅の木橋の振動数である。したがって、サグ比 (f/L) が決定されれば、対象としている吊床版橋の振動数は図-9から簡単に求められる。

図-9より、サグ比の変化 (サグ比と張力は反比例) は固有振動数に大きな影響をおよぼし、１次モードと 2次モード、 3次モードと 4次モード、 5次モードと6次モード、･･･の固有振動数の大小関係が逆転するサグ比の存在することが分かる。

表-3 ひぐらし橋の固有振動数の比較 (Hz)

振動の種類			実測値	提案法		離散モデル(立体)	
				両端ﾋﾝｼﾞ	両端固定	両端ﾋﾝｼﾞ	両端固定
面内	対称	1次	1.53	1.3227	1.4319	1.2901	1.4780
		3次	2.22	2.1481	2.1701	2.0801	2.1100
		5次	3.76	2.9790	3.4869	2.7901	3.4127
	逆対称	2次	1.18	0.8764	1.0389	0.8581	1.0426
		4次	2.80	2.1089	2.4883	2.0094	2.4617
		6次	5.00	3.8938	4.5449	3.6095	4.4347
面外		1次	1.95			1.9493	
ねじり		1次	3.54			3.5155	
		2次	5.00			4.9887	

表-4 梅の木橋の固有振動数の比較(Hz)

振動の種類			実測値	提案法		離散モデル(立体)	
				両端ﾋﾝｼﾞ	両端固定	両端ﾋﾝｼﾞ	両端固定
面内	対称	1次	0.95	0.8767	0.9400	0.8632	0.9319
		3次	1.43	1.3317	1.3348	1.2792	1.2880
		5次	1.94	1.7399	1.9091	1.6751	1.8844
	逆対称	2次	0.70	0.6223	0.6829	0.6152	0.6871
		4次	1.47	1.3122	1.4447	1.2807	1.4415
		6次	2.25	2.1264	2.3488	2.0338	2.3132
面外		1次	0.75			0.7508	
ねじり		1次	2.56			2.4846	
		2次	4.64			4.4637	

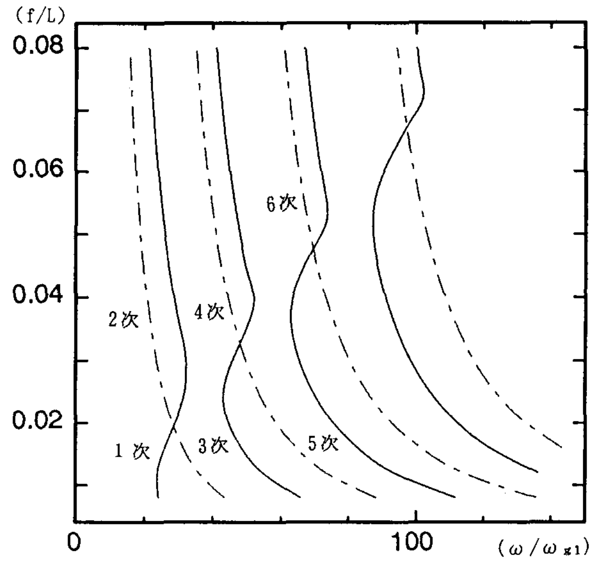


図-9サグ比と固有振動数(両端固定)

5．結論

本研究では、両端の支持条件をヒンジと固定の二つの場合について調べたが、提案した方法を用いれば両端を弾性支点と考えて基礎式を導き、支持条件が振動特性に及ぼす影響を調べることも可能である。しかし、梅の木橋の 6次モードの固有振動数を除いて、実測値＞解析値 となっており、境界条件の他にスパン長の取り方についても検討する必要があろう。また、現在までに架設された吊り床版歩道橋のサグ比は0.025～0.030

の橋が多く、この範囲のサグ比では最小固有振動数の振動モードが 2次(逆対称振動)となり、サグ比が0.03付近で 3次モードと 4次モードの固有振動数の大小関係が逆になることは興味深い。特に、1次モードと2次モードの固有振動数が近接するサグ比や3次モードと4次モードの固有振動数が近接するサグ比付近の振動性状は大きく異なることが予想される。したがって、このサグ比付近での応答がどのような特性を示すかは今後の研究課題となろう。さらに、文献(6) の方法によって振動感覚を考慮した使用性の検討[7]にも役立つと考えられる。なお、本研究の一部は土木学会年次講演会[8]で発表した。

参考文献

(1) 住友建設(株)：ＰＣ吊床版橋、Tecnical Report No.2。
(2) 前田設計(株)：梅の木轟吊橋設計計算書。
(3) 則武・熊谷：プレストレストコンクリート吊床版橋、道路とコンクリート、No.80、pp4～11、1988年6月。
(4) 吉村・平井：補剛アーチ橋およびつり橋の動的共通解析、土木学会論文集、第115号、pp1～11、1965年3月。
(5) 住友建設(株)：吊床版橋振動試験結果報告書。
(6) 小堀・梶川：単一動荷重に対する道路橋の振動感覚、土木学会論文報告集、第248号、pp11～23、1976年
(7) 梶川・津村・角本：ＰＣ吊床版歩道橋の振動とその使用性、構造工学論文集、Vol.36A、pp685～695、1990年 3月。
(8) 水田・平井・元田：吊床版歩道橋の固有振動数特性について、土木学会第46回年次学術講演会、pp902～903、1991年9月。

（１９９１年9月３０日受付）