

滑動を伴う2質点系モデルの調和振動

Harmonic Respnce of 2 DOF System with Isolation Mechanism

松井 邦人*, 井浦 雅司**, 佐々木 利視***, 小坂 郁****

by Kunihito MATSUI, Masashi IURA, Toshimi SASAKI and Iku KOSAKA

The motion of two degrees of freedom system on a rigid foundation subjected to harmonic excitaiotn is examined. When the base is excited by harmonic force, it is found that a periodic motion appears in three different modes : stick-stick mode, stick-slip mode and slip-slip mode. The condition for the three periodic motions to occur are derived in explicit forms. An accuracy of the analytical expressions is confirmed by comparing with the numerical results.

1. はじめに

耐震設計の一方法として、基礎を免震構造とすることが注目されている。主な免震装置として、積層ゴム形式の支承を利用したもの、滑り支承を利用したもの、および弾塑性ダンパー、粘弾性ダンパー、摩擦ダンパー等の利用、また、これらを組み合わせた装置がある。⁽¹⁾ 一方、これらを単純な物理モデルに置き換えて、免震システムとしての有効性の検討が行われてきている。更に、これらの各種物理モデルを数学モデルで分類し、それらの特徴の比較検討もなされている。⁽²⁾

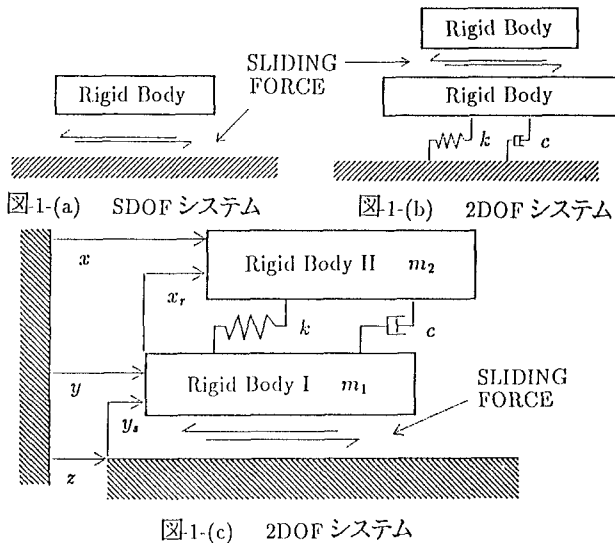
免震システムの中で最も古くから利用されているのは、強震時に基礎と構造の間に滑りを生じることを許すシステムである。その最も単純なモデルとして、Younis と Tadjbakhsh,⁽³⁾ Westermo と Udwardia⁽⁴⁾ および Crandall 等⁽⁵⁾ は、図-1 (a) に示すような基礎上の剛体の挙動について研究している。このモデルにおいて、基礎が調和加振力を受ける時、充分な時間が経過すると剛体は周期運動を示し、この周期運動は、stick-stick, stick-slip, slip-slip の3種類のモードに分類することができる。これらのモードの発生条件は、対象としているモデルが比較的簡単なため、陽な形で求められている。また、文献 (5) では、ランダム加振に対する応答とこの免震システムの有効性が論じられている。

Younis と Tadjbakhsh⁽³⁾ は、図-1 (b) のような2自由度系のモデルを用いて上部構造物の滑りの発生条件を求めている。このモデルは前述のモデルほど単純でないため、彼らは運動方程式を数値積分して、滑りによる相対変位を求めている。松井等⁽⁶⁾ は、このモデルにおいて基礎が調和加振されるとき、周期的な振動が起こることを確認し、これらの3種類のモードが発生する条件を解析的に誘導している。

* Ph.D 東京電機大学 教授 理工学部建設工学科 (〒350-03 埼玉県比企郡鳩山町石坂)
 ** 工博 東京電機大学 助教授 理工学部建設工学科 (同上)
 *** 東京電機大学 講師 理工学部建設工学科 (同上)
 **** アイオワ大学留学中 (前東京電機大学院生)

Mostaghel 等⁽¹⁾、Westermo と Udwadia⁽⁴⁾および Mostaghel と Tanbakuchi⁽⁷⁾は、図-1(c)に示すような基礎上に置かれた2自由度系のモデルを解析している。Westermo と Udwadia⁽⁴⁾は、運動方程式を数値積分することにより前述した3種類の周期運動が、本モデルにも生じる場合があることを示し、これが調和加振に対する応答の重要な部分であることを指摘すると共に、滑動が発生する条件を陽な形で求めている。しかしながら、いずれの論文でも、slip-slip モードの発生条件は陽な形で示されておらず、運動方程式を数値積分することによりその条件を求めている。したがって、数値計算の精度が悪いときには、本来周期運動が生じる条件下においても、数値結果にその周期性が見られない場合がある。

Lin と Tadjbakhsh⁽⁸⁾および Liauw 等⁽⁹⁾は、同様のモデルに水平成分だけでなく鉛直成分のある加振力を与え、鉛直成分が滑動におよぼす影響について調べている。用いているシステムが複雑であるため、数値積分を行い、このシステムの動的挙動を調べている。



本論文では、図-1(c)に示すような免震システムを対象とし、このモデルの基礎に調和加振力が入力した時、上記の3種類の周期運動が発生する条件を解析的に求めることを目的としている。これらの周期運動の発生条件を陽な形で求めるためには、stick-stick モードであるための条件と slip-slip モードの発生条件を求めれば十分である。stick-stick モードについては、Westermo と Udwadia⁽⁴⁾がすでにその条件を求めているので、ここでは、slip-slip モードの発生条件に注目している。ここで対象としている運動は定常的であることから、応答の周期は、加振力の周期と同じであると仮定し、質量比、摩擦係数、減衰定数、入力加速度の振幅等のパラメータを無次元化した形で、slip-slip モードの発生条件を誘導している。したがって、このようなパラメータが与えられると、定常運動に対しては、運動方程式を数値積分することなく発生する振動モードが分かることになる。また、誘導した slip-slip モードの発生条件式が正しいことを、数値積分して得られた結果と比較することにより確認している。

滑動を伴う振動を解析するとき、これまでも数値積分がしばしば用いられている。しかしながら、本論文で用いたモデルの数値結果は、時間ステップの大きさに非常に敏感であることが分かった。そこで、本モデルに関するかぎり、滑動と非滑動の運動状態のそれぞれに対し、厳密解を求めることができることを利用して、効率的に、精度良く応答計算を行った。注意を要する点は、それぞれの運動状態の開始時刻と終了時刻を精度良く求めることである。それらを正確に推定しなければ、数値結果に誤差が蓄積していくことが確認された。

本論文の概要は、以下の通りである。2 節では、本モデルの基本式を整理し、非滑動状態と滑動状態の一般解を求めている。3 節では、slip-slip モードの発生条件を陽な形で求め、3 種類の周期運動が発生する領域を陽な形で示した。4 節では、従来、提案されている時間刻みでは十分な精度を有する数値結果が得られず、変位応答は、周期運動をしながら振動の中心が左右どちらかにずれていくことを示している。5 節では、3 種類のモードが発生する領域を図示し、各種パラメータがこれらの発生条件に及ぼす影響について調べている。6 節に結論を記した。

2. 解析モデルと運動方程式

本研究で使用しているモデルは図-1 (c) に示すように、質量 m_1 と m_2 の 2 つの剛体からなり、剛体 II は剛体 I にばね (ばね定数 k) とダンパー (減衰係数 c) で接続されている。剛体 I と基盤の接触面では、せん断力が $(m_1 + m_2)\mu g$ を越えると、このシステムの上部構造が基盤上を滑動する。滑動が起こらないとき剛体 I と基盤は一体となり、質量 m_2 , 減衰係数 c , ばね定数 k の 1 自由度系として振動する。滑動時には、上部構造は基盤の運動とは無関係に、大きさ一定のクーロン摩擦力を受けながら振動する。動的摩擦係数と静的摩擦係数を等しいと仮定すると、非滑動時と滑動時の運動方程式は次のように書くことができる。

I 非滑動時

$$\ddot{x}_r + 2\xi_0\omega_0\dot{x}_r + \omega_0^2 x_r = -\ddot{z}(t) \quad (1)$$

$$\text{非滑動条件: } |\gamma_1\ddot{x}_r + \ddot{z}| \leq \mu g \quad (2)$$

ここに

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}, \quad \xi_0 = \frac{c}{2\sqrt{km_2}}, \quad \gamma_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

II 滑動時

$$\ddot{x}_r + 2\xi_1\omega_1\dot{x}_r + \omega_1^2 x_r = -\frac{\mu g}{1 - \gamma_1} \text{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \quad (4)$$

$$\ddot{y} = \mu g \cdot \text{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) - \gamma_1\ddot{x}_r \quad (5)$$

ここに、 g は重力加速度であり、さらに

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \gamma_1}}, \quad \xi_1 = \frac{\xi_0}{\sqrt{1 - \gamma_1}} \quad (6)$$

滑動時、接触面には大きさ一定のクーロン摩擦力が生じ、静摩擦係数と動摩擦係数は等しいと仮定している。

滑動発生条件は、

$$|\gamma_1\ddot{x}_r + \ddot{z}| \geq \mu g \quad (7)$$

である。また、滑動が停止する条件は、式 (8) のように表せる。

$$\dot{y} = \dot{z}, \quad |\gamma_1\ddot{x}_r + \ddot{z}| \leq \mu g \quad (8)$$

今、基盤からの入力加速度が $a_0 \sin \omega t$ であるとき、式 (1) の解は $t = t_0$ における初期値 $x_r(t_0)$, $\dot{x}_r(t_0)$ を用と次式のように書くことができる。

ただし、 $\dot{y}(t_0^*), y(t_0^*)$ はそれぞれ $t = t_0^*$ における $y(t)$ の初速度と初期変位である。

3.3 種類の振動モードの発生条件

図-1(c) の系が調和加振力を受けるとき、定常状態において、stick-stick モード、stick-slip モード、slip-slip モードの3種類の振動モードのどれかが現れることが知られている。どの振動モードが現れるかを知るためには、stick-stick モードと stick-slip モード及び stick-slip モードと slip-slip モードの境界条件を示すことができればよい。stick-stick モードと stick-slip モードの境界条件は既に求められているゆえ⁽⁴⁾、ここでは、stick-slip と slip-slip の境界条件を求めることにする。

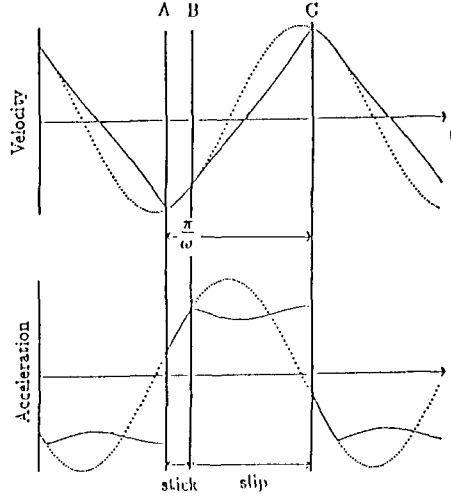


図-2 系の速度応答及び加速度応答 ——— 剛体I(y) ----- 基盤(z)

基盤が調和運動するとき、系は基盤と同じ周期で調和振動するものと仮定する。図-2 は、stick-slip モードのときの剛体Iと基盤の速度及び加速度履歴である。本図は、A点とB点の間で剛体Iと基盤が一体となり運動しており、B点とC点の間では剛体Iが基盤上を滑動している状態である。B点がA点と一致するとき、stick-slip モードから slip-slip モードへ移行する。今、B点に対応する時刻を t_0^* 、C点に対応する時刻を t_1^* とすると、slip-slip モードが発生するとき、 $t_1^* - t_0^* = \pi/\omega$ となる。この関係を式(5)に代入し、 $t = t_1^*$ と置き、また解の周期性を考慮すると

$$\begin{bmatrix} x_r(t_1^*) \\ \dot{x}_r(t_1^*) \end{bmatrix} = A_{sl}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \begin{bmatrix} x_r(t_0^*) \\ \dot{x}_r(t_0^*) \end{bmatrix} + B_{sl}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) = - \begin{bmatrix} x_r(t_0^*) \\ \dot{x}_r(t_0^*) \end{bmatrix} \quad (21)$$

が得られる。 $x_r(t_0^*), \dot{x}_r(t_0^*)$ について解くと式(22)のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_r(t_0^*) \\ \dot{x}_r(t_0^*) \end{bmatrix} = - \left[A_{sl}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) + I \right]^{-1} B_{sl}\left(\frac{\pi}{\omega}\right) \quad (22)$$

ここに、I は単位行列である。

さらに、式(16),(17)を式(22)に代入して整理すると、

$$x_r(t_0^*) = \frac{\alpha_0 \mu g}{\omega_0^2 a_0} \operatorname{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \frac{\sinh \phi - \frac{\omega_1}{\sqrt{1-t_1^2}} \sin \psi}{\cosh \phi + \cos \psi} \quad (23)$$

$$\dot{x}_r(t_0^*) = \frac{\alpha_0 \mu g}{\omega_0^2 a_0} \operatorname{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \frac{\frac{\omega_1}{\sqrt{1-t_1^2}} \sin \psi}{\cosh \phi + \cos \psi} \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} x_r(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} = A_{st}(\tau) \begin{bmatrix} x_r(t_0) \\ \dot{x}_r(t_0) \end{bmatrix} + B_{st}(\tau) \quad (9)$$

ここで

$$A_{st}(\tau) = e^{-\xi_0 \omega_0 \tau} \begin{bmatrix} \frac{\xi_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sin \omega'_0 \tau + \cos \omega'_0 \tau & \frac{1}{\omega'_0} \sin \omega'_0 \tau \\ -\frac{\omega_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sin \omega'_0 \tau & -\frac{\xi_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sin \omega'_0 \tau + \cos \omega'_0 \tau \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$B_{st}(\tau) = \frac{a_0}{\omega_0^2} \begin{bmatrix} e^{-\xi_0 \omega_0 \tau} \left[-b \left[\frac{\xi_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sin \omega'_0 \tau + \cos \omega'_0 \tau \right] - \frac{a\omega}{\omega'_0} \sin \omega'_0 \tau \right] + a \sin \omega \tau + b \cos \omega \tau \\ e^{-\xi_0 \omega_0 \tau} \left[\frac{b\omega_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sin \omega'_0 \tau + a\omega \left[\frac{\xi_0}{\sqrt{1-\xi_0^2}} \sin \omega'_0 \tau - \cos \omega'_0 \tau \right] \right] + a\omega \cos \omega \tau - b\omega \sin \omega \tau \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$a = -\frac{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) \cos \omega t_0 + 2\xi_0 \frac{\omega}{\omega_0} \sin \omega t_0}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\xi_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (12)$$

$$b = -\frac{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) \sin \omega t_0 - 2\xi_0 \frac{\omega}{\omega_0} \cos \omega t_0}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\xi_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (13)$$

$$\tau = t - t_0, \quad \omega'_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \xi_0^2} \quad (14)$$

次に、式 (4) の解を $t = t_0^*$ における初期値 $x_r(t_0^*)$, $\dot{x}_r(t_0^*)$ を用いて書くと、次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} x_r(t) \\ \dot{x}_r(t) \end{bmatrix} = A_{sl}(\tau^*) \begin{bmatrix} x_r(t_0^*) \\ \dot{x}_r(t_0^*) \end{bmatrix} + B_{sl}(\tau^*) \quad (15)$$

ここで

$$A_{sl}(\tau^*) = e^{-\xi_1 \omega_1 \tau^*} \begin{bmatrix} \frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \sin \omega'_1 \tau^* + \cos \omega'_1 \tau^* & \frac{1}{\omega'_1} \sin \omega'_1 \tau^* \\ -\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \sin \omega'_1 \tau^* & -\frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \sin \omega'_1 \tau^* + \cos \omega'_1 \tau^* \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$B_{sl}(\tau^*) = \frac{a_0}{\omega_0^2} \text{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \begin{bmatrix} \frac{\mu g}{a_0} \left\{ e^{-\xi_1 \omega_1 \tau^*} \left(\frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}} \sin \omega'_1 \tau^* + \cos \omega'_1 \tau^* \right) - 1 \right\} \\ -\frac{\mu g}{a_0} \frac{\omega_1}{\sqrt{1-\xi_1^2}} e^{-\xi_1 \omega_1 \tau^*} \sin \omega'_1 \tau^* \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\tau^* = t - t_0^*, \quad \omega'_1 = \omega_1 \sqrt{1 - \xi_1^2} \quad (18)$$

更に、滑動時における剛体 I の速度と変位は式 (4) を積分することにより式 (17), (18) となる。

$$\dot{y}(t) = \mu g \cdot \text{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \tau^* - \gamma_1 \{ \dot{x}_r(t) - \dot{x}_r(t_0^*) \} + \dot{y}(t_0^*) \quad (19)$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \mu g \cdot \text{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \tau^{*2} - \gamma_1 \{ x_r(t) - x_r(t_0^*) - \dot{x}_r(t_0^*) \tau^* \} + \dot{y}(t_0^*) \tau^* + y(t_0^*) \quad (20)$$

ただし、

$$\phi = (\frac{\pi \xi_0}{1 - \gamma_1}) / (\frac{\omega}{\omega_0}) \quad (25)$$

$$\psi = (\pi \sqrt{\frac{1 - \xi_1^2}{1 - \gamma_1}}) / (\frac{\omega}{\omega_0}) \quad (26)$$

定常振動時において常に滑動するためには、滑動終了時が次の逆向きの滑動開始時となる。即ち、滑動終了時に、式 (7) の滑動発生条件を満足しなければならない。slip-slip モードの状態では t_1^* のかわりに t_0^* を滑動終了時刻と見なしてもさしつかえないゆえ式 (7) より、

$$\begin{aligned} & | \gamma_1 \ddot{x}_r(t_0^*) + a_0 \sin \omega t_0^* | = \\ & | \gamma_1 \{ -2\xi_0 \omega_0 \dot{x}_r(t_0^*) - \omega_0^2 x_r(t_0^*) - a_0 \sin \omega t_0^* \} + a_0 \sin \omega t_0^* | \geq \mu g \end{aligned} \quad (27)$$

式 (23)、(24) を式 (27) に代入し、整理すると式 (28) が得られる。

$$| (1 - \gamma_1) \frac{a_0}{\mu g} \sin \omega t_0^* + c_1 | \geq 1 \quad (28)$$

ここに、

$$c_1 = -\gamma_1 \operatorname{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \frac{\frac{\xi_1}{\sqrt{1 - \xi_1^2}} \sin \psi + \sinh \phi}{\cos \psi + \cosh \phi} \quad (29)$$

一方 stick-slip モードから slip-slip モードに変わる転移点では、基礎 I の速度は剛体の速度と一致する。従って、 $t = t_0$ で

$$\dot{y}(t_0^*) = \dot{z}(t_0^*) \quad (30)$$

また周期性の条件より、

$$\dot{y}(t_1^*) = -\dot{y}(t_0^*) \quad (31)$$

常に slip-slip 状態になっているとき、 $t = t_1^*$ と $\tau^* = t_1^* - t_0^* = \pi/\omega$ を式 (19) に代入し、式 (30)、(31) を用いると、

$$2 \frac{a_0}{\omega} \cos \omega t_0^* = \mu g \operatorname{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \frac{\pi}{\omega} + 2\gamma_1 \dot{x}_r(t_0^*) \quad (32)$$

また上式に、式 (24) を代入して整理すると次式を得る。

$$\frac{a_0}{\mu g} \cos \omega t_0^* = c_2 \quad (33)$$

ここに

$$c_2 = \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\gamma_1 (\frac{\omega}{\omega_0}) \frac{\sin \psi}{\sqrt{(1 - \gamma_1)(1 - \xi_1^2)}}}{\cosh \phi + \cos \psi} \right] \operatorname{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) \quad (34)$$

Mostaghel 等⁽¹⁾ によると、slip-slip モードが発生する瞬間において

$$\operatorname{sgn}(\dot{z} - \dot{y}) = \frac{\gamma_1 \ddot{x}_r + \ddot{z}}{|\gamma_1 \ddot{x}_r + \ddot{z}|} \quad (35)$$

の関係がある。式 (35) の関係を用いて式 (28) を書き直すと、式 (36) が得られる。

$$\left| \frac{a_0}{\mu g} \right|^2 \sin^2 \omega t_0^* \geq F_0^2 \quad (36)$$

ただし、

$$F_0^2 = \left[1 + \gamma_1 \frac{\frac{\xi_1}{\sqrt{1-\xi_1}} \sin \psi + \sinh \phi}{\cos \psi + \cosh \phi} \right]^2 \quad (37)$$

式 (33) を用いて式 (36) より $\sin \omega t_0^*$ を消去すると、slip-slip モードの発生条件が式 (38) のように求まる。

$$\left| \frac{a_0}{\mu g} \right| \geq \sqrt{c_2^2 + \left(\frac{F_0}{1-\gamma_1} \right)^2} \quad (38)$$

式 (38) の不等式は、slip-slip モードの発生条件を示したものである。

stick-slip モードが発生する条件は、すでに文献 (4) に示されている。それを用いると 3 種類のモードがそれぞれ発生する条件は、以下のように示すことができる。

i) stick-stick モードの発生条件

$$\sqrt{\frac{1}{(c_3+1)^2 + c_4^2}} \geq \left| \frac{a_0}{\mu g} \right| \quad (39)$$

ii) stick-slip モードの発生条件

$$\sqrt{c_2^2 + \left(\frac{F_0}{1-\gamma_1} \right)^2} \geq \left| \frac{a_0}{\mu g} \right| \geq \sqrt{\frac{1}{(c_3+1)^2 + c_4^2}} \quad (40)$$

iii) slip-slip モードの発生条件

$$\left| \frac{a_0}{\mu g} \right| \geq \sqrt{c_2^2 + \left(\frac{F_0}{1-\gamma_1} \right)^2} \quad (41)$$

ただし、

$$c_3 = \frac{\gamma_1 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} (1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\xi_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (42)$$

$$c_4 = \frac{-2\frac{\omega^3}{\omega_0^3} \xi_0 \gamma_1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + (2\xi_0 \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (43)$$

剛体 II の質量 m_2 が 0 に近づくとき、本モデルは図-1(a) のモデルに近づくことを意味している。 $m_2 = 0$ となると、 $\gamma_1 = 0$ であり、式 (41) より

$$\left| \frac{a_0}{\mu g} \right| \geq \frac{\sqrt{\pi^2 + 4}}{2} \quad (44)$$

が得られる。この結果は Younis と Tadjbakhsh⁽³⁾ が図-1(a) に対して求めた slip-slip モードの発生条件と一致している。

4. 数値解析

滑動を伴う動的応答を求める際に、これまで数値積分がしばしば用いられてきた。Mostaghel 等⁽¹⁾は、本研究と同じモデルを用いて動的解析を行い、滑動の開始時刻と停止時刻は、使用する時間刻み幅にかなり影響を受けることを示している。そして彼らは時間刻み幅として

$$\Delta t \leq \min \left[\frac{\tau}{20}, \frac{\tau_g}{20}, 0.02 \right] \quad (45)$$

を提案している。ここに、 $\tau = 2\pi/\omega_0$ と $\tau_g = 2\pi/\omega$ は 0.02 秒より長いと仮定している。また彼らは応答量は滑動開始と停止時刻の正確さに非常に敏感であると述べている。著者等もこの事が真実であり、時間刻みの選択には特に注意しなければならないことを確認した。このモデルでは、式(1)と式(4),(5)に関して厳密解が得られているから Newmark β 法や Runge-Kutta 法を用いてこれらの運動方程式を積分する必要はない。非滑動条件式(2)を満足するとき、動的応答は式(1)の解で表せる。初速度、初期変位は 0 と仮定すると、非滑動状態がまず最初に現れる。 $|\gamma_1 \ddot{x}_r + \ddot{z}|$ が μg を越えると、滑動が生じるため、式(1)のかわりに式(4),(5)を用いる。非滑動状態及び滑動状態で厳密解を求めることができるから、それぞれの領域で計算した応答量は正確で時間刻み幅 Δt の影響を受けない。応答の計算結果に誤差が含まれるとすると、滑動開始と停止時刻の推定の不正確さに起因する。図-3(a),(b)は、 $\Delta t=0.05$ と $\Delta t=0.01$ としたときの剛体 I と基礎の変位、速度、加速度の時刻歴を示したものである。周期性はあるものの、変位応答は振動の中心が時間の経過とともにずれていくことがわかる。そしてこのずれは、 Δt が大きいほど大きくなっている。次に図-3-(b)と同様の条件で計算を行うが、非滑動から滑動、滑動から非滑動に移る区間だけ Δt を更に 1/100 にして計算し、滑動の開始と停止の時刻の精度を上げた結果を図-3(c)に示す。この図より定常状態に達するともはや変位応答の中心にずれは生じていないことがわかる。図-3(d)は、図-3(c)に対応する剛体 I と剛体 II の相対変位速度、加速度の時刻歴であり、外力と同じ周期で振動していることがわかる。

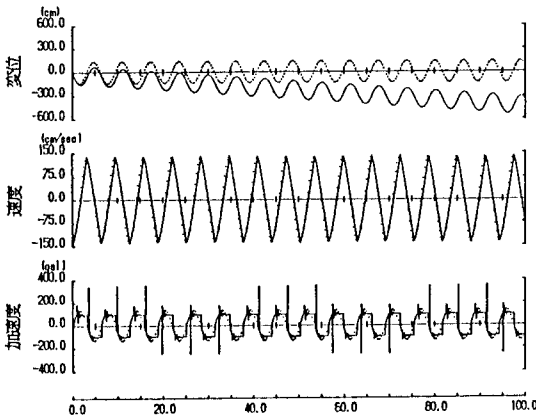


図-3.(a) 系の時刻歴応答 (— y, - - - z, $\gamma_1 = 0.5$, $\xi_0 = 0.1, \omega_0 = 10.0, \omega = 1.0, \alpha_0 = 137.2, \mu = 0.1, \Delta t = 0.05$)

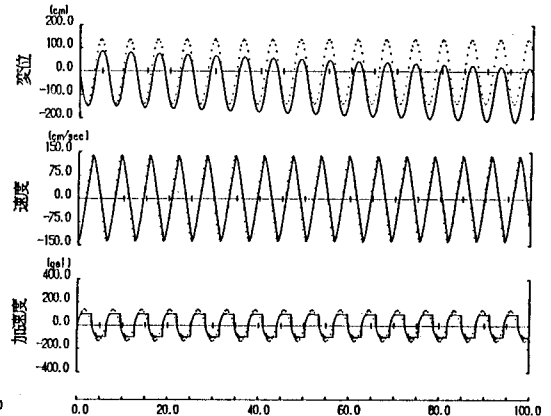


図-3.(b) 系の時刻歴応答 (— y, - - - z, $\gamma_1 = 0.5$, $\xi_0 = 0.1, \omega_0 = 10.0, \omega = 1.0, \alpha_0 = 137.2, \mu = 0.1, \Delta t = 0.01$)

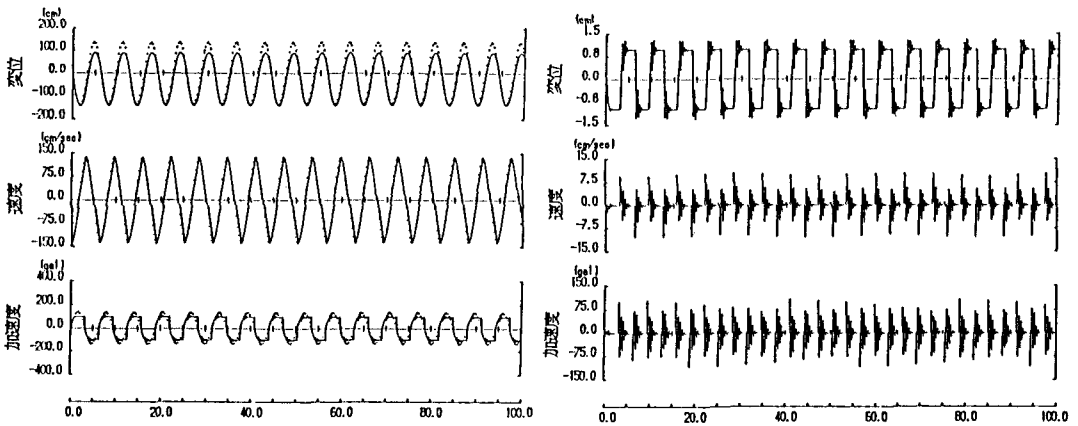


図-3-(c) 系の時刻応答 (—— y , x , $\gamma_1 = 0.5$, $\xi_0 = 0.1, \omega_0 = 10.0, \omega = 1.0, \sigma_0 = 137.2, \mu = 0.1, \Delta t = 0.01$)

図-3-(d) 系の時刻応答 (—— x , $\gamma_1 = 0.5, \xi_0 = 0.1$, $\omega_0 = 10.0, \omega = 1.0, \sigma_0 = 137.2, \mu = 0.1, \Delta t = 0.01$)

5. 3 種類の振動モードの発生領域

定常状態で 3 種類の振動モードの発生条件は式 (39)-(41) に示した。ここでは、これらのモードの発生する領域を無次元量 $a_0/\mu g, \omega/\omega_0, \xi_0$ 及び γ_1 を用いて図示している。図の縦軸を $a_0/\mu g$ 、横軸を ω/ω_0 とした。なお理論解の正しさを数値計算結果と比較することにより確認している。 $a_0/\mu g$ は、Westermo と Udwadia⁽⁴⁾ が定義したパラメータの逆数であるが、slip-slip モードの発生領域をより正確に示すのに都合が良い。

図-4(a) は $\xi_0 = 0.05, \gamma_1 = 0.1$ とした時、3 種類の振動モードの発生領域を示している。実線は、stick-stick モードと stick-slip モードの境界、破線は stick-slip モードと slip-slip モードの境界を示している。4. で述べた数値解析法により得られた結果も、同図に示した。これより両者の一致度が非常によいことが明かである。図-4(b) は、 $\xi_0 = 0.05, \gamma_1 = 0.9$ の時の結果である。図-4(a) のときと同様、理論的に求めた 3 種類の振動モードの発生の境界は、4. で述べた数値解析結果と非常によく一致しており、理論解の妥当性が明らかにされている。

図-5(a) は、 $\gamma_1 = 0.5$ で ξ_0 をパラメータとしたとき、stick-stick モードと stick-slip モードとの境界線を示している。 $\omega/\omega_0 < 0.7$ および $\omega/\omega_0 > 3.0$ の範囲内では、 ξ_0 の値にかかわらず境界線はほぼ一致していることがわかる。図-5(b) は $\xi_0 = 0.05$ で γ_1 をパラメータとし、stick-stick モードと stick-slip モードの境界線を示している。 $\omega/\omega_0 < 0.5$ の範囲では γ_1 の値にかかわらず境界はほぼ一致しているが、 ω/ω_0 が大きくなると γ_1 が大きいほど境界線の値が大きくなっている。

図-6(a) は、 $\gamma_1 = 0.5$ で ξ_0 をパラメータとしたとき stick-slip モードと slip-slip モードの境界線を示している。stick-stick モードと stick-slip モードの境界線がなめらかであるのに対し、この境界線は複雑で 7 個のピークが現れている。図-6(b) は、 $\xi_0 = 0.05$ で γ_1 をパラメータとしたとき、stick-slip モードと slip-slip モードの境界を示している。この図から γ_1 が大きくなるほどモードが発生し難くなることが明かである。

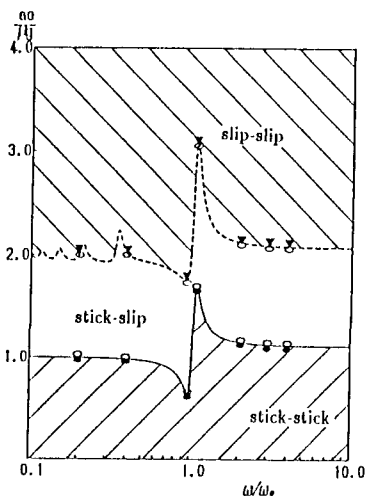


図4-(a) 各振動モードの起こる領域

($\xi_0 = 0.05, \gamma_1 = 0.1$ 次を示す記号はニガム・ジェニングス法によって得られた数値結果を使用した。●:stick-stick モード
○:stick-slip モード ▼:slip-slip モード)

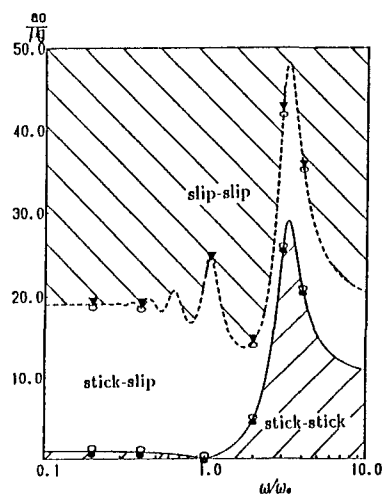


図4-(b) 各振動モードの起こる領域

($\xi_0 = 0.05, \gamma_1 = 0.9$ 次を示す記号はニガム・ジェニングス法によって得られた数値結果を使用した。●:stick-stick モード
○:stick-slip モード ▼:slip-slip モード)

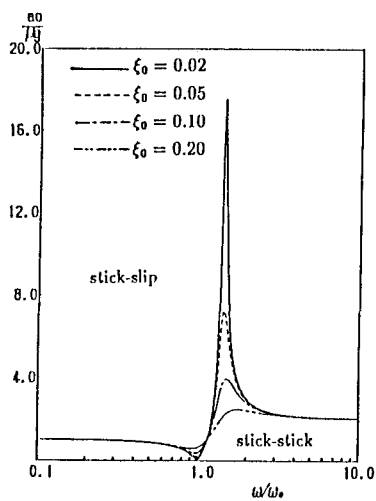


図5-(a) stick-stick モードと stick-slip モードの境界 ($\gamma_1 = 0.5$)

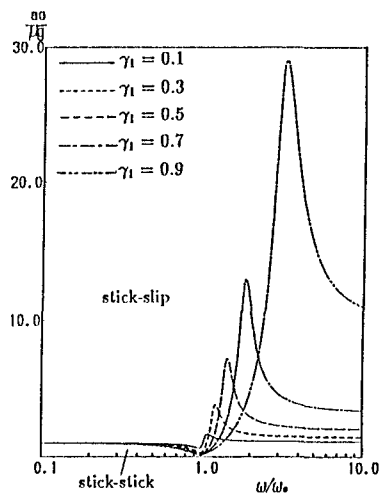


図5-(b) stick-stick モードと stick-slip モードの境界 ($\xi_0 = 0.05$)

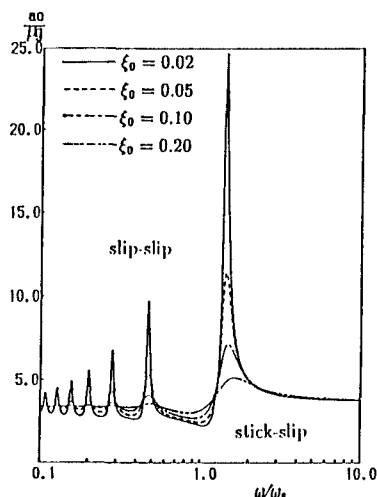


図6-(a) stick-slip モードと slip-slip モードの境界 ($\gamma_1 = 0.5$)

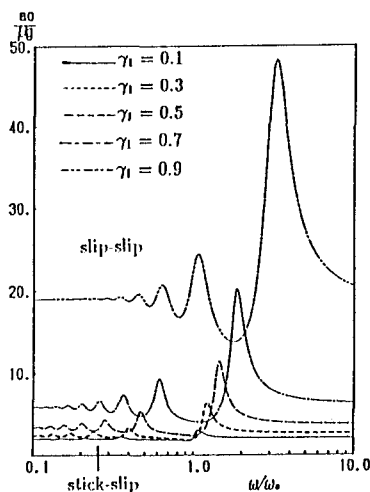


図6-(b) stick-slip モードと slip-slip モードの境界 ($\xi_0 = 0.05$)

6. 結論

3 種類の調和振動モードが発生する条件を解析的に誘導した。また正確な数値計算を得る手法を提案し、その数値結果と比較することにより理論結果の正しいことを確認した。この結果を用いることにより、運動方程式を解くことなく、どのモードが現れるかを知ることができる。

3 種類の調和振動モードの境界条件より以下のことが明らかになった。

- i) 3 種類の振動モードの発生条件は、 $a_0/\mu g$, ω/ω_0 , ξ_0 , γ_1 , で表わせる。
- ii) stick-stick モードと stick-slip モードの境界は、 $\omega/\omega_0 < 0.5$ の範囲内においては、 γ_1 や ξ_0 の値にかかわらず、ほぼ同一の曲線となる。
- iii) stick-stick モードと stick-slip モードの境界は $\omega/\omega_0 < 0.3$ と $\omega/\omega_0 > 3.0$ の範囲内において、 ξ_0 の値にかかわらずほぼ一致する。
- iv) $\omega/\omega_0 < 0.5$ において、 γ_1 の値にかかわらず stick-stick モードと stick-slip モードの境界はほぼ一致する。 ω/ω_0 が十分大きくなると、 γ_1 が大きいほどこの境界の値は大きい。
- v) stick-slip モードと slip-slip モードの境界は、複雑な曲線を示し多くのピークが現れる。また、このピークは ξ_0 が小さいほど鋭い。
- vi) γ_1 が大きい程、一般に slip-slip モードは発生しにくい。

謝辞

本研究は、東京電機大学総合研究所プロジェクト Q63-S11 の一部として行ったものです。ここに記し関係者各位に感謝致します。大久保昌知君（東京電機大学建設工学科4年）には、大いに原稿作成に協力してくれたことを記し、ここに謝意を表します。

参考文献

1. N. Mostaghel, M. Hejazi and J. Tanbakuchi, 'Response of sliding structures to harmonic support motion', Earthquake eng. struct. dyn. 11, 355-366 (1983).
2. L. Su, G. Ahmadi and I. G. Tadjbakhsh, 'A comparative study of performance of various vase

- isolation systems, Part1: Shear beam structures' , Earthquake eng. struct. dyn. 18, 11-32 (1989).
3. C. J. Younis and I. G. Tadjbakhsh, 'Response of sliding rigid structure to base excitation' , J. eng. mech. ASCE 110, 417-432 (1984).
 4. B. Westermo and F. Udawadia, 'Periodic response of a sliding oscillator system to harmonic excitation' , Earthquake eng. struct. dyn. 11, 135-146 (1983).
 5. S. H. Crandall, S. S. Lee and J. H. Williams, Jr, 'Accumulated slip of a friction-controlled mass excited by earthquake motions' , J. appl. mech. ASME 41, 1094-1098 (1974).
 6. K. Matsui, M. Iura, T. Sasaki and I. Kosaka, 'Periodic response of a rigid block resting on a footing subjected to harmonic excitation' , Earthquake eng. struct. dyn. 20, 683-697(1991).
 7. N. Mostaghel and J. Tanbakuchi, 'Response of sliding structures to earthquake support motion' , Earthquake eng. struct. dyn. 11, 729-748 (1983).
 8. B. C. Lin and I. G. Tadjbakhsh, 'Effect of vertical motion of friction-driven isolation systems' , Earthquake eng. struct. dyn. 14, 609-622 (1986).
 9. T. C. Liauw, Q. L. Tian and Y. K. Cheung, ' Structures on sliding base subject to horizontal and vertical motions' J. struct. eng. ASCE 114, 2119-2129 (1988).

(1991 年 9 月 30 日受付)