

初期応力を受ける逆対称クロス・アングルプライ積層板の振動

VIBRATION OF ANTISYMMETRIC CROSS-PLY AND ANGLE-PLY
LAMINATED PLATES UNDER INITIAL STRESS

三上 隆* 朴 勝振** 芳村 仁***

BY Takashi MIKAMI, Sung Jin PARK and Jin YOSHIMURA

This paper deals with vibrations of angle-ply and cross-ply laminated plates under initial stress. The collocation method is used to analyze these problems. The solutions are obtained for the Yang, Norris and Stavsky (YNS) theory which includes shear deformation and rotary inertia effects. A variety of problems are solved to show the effect of initial stress on the vibration frequencies.

1. はじめに

積層板は軽量化が必須な宇宙構造物等の構造要素としてその使用は増々増加している。積層板は、強い異方性を示すとともに薄板の場合でも面内・面外剛性に対して面外せん断剛性が極めて小さいのが特徴であり、その力学的特性を明らかにすることが重要な課題となっている。そのため最近では、座屈問題や自由振動問題に関する研究が盛んに行われ、その状況は幾つかのレビュー論文^{1,2)}によってうかがうことができる。しかしながら、構造物に対する荷重条件が次第に厳しくなる今日では、構造物の安定性を検討する基礎的資料として、初期応力の作用するときの振動特性の変化を把握しておく必要があるが、積層板に対する研究は周辺単純支持の逆対称クロス・プライ板（プライ配向角を θ と記せば、 $\theta=0^\circ$ と $\theta=90^\circ$ の組み合わせから成る板）を扱った Yang らの論文³⁾が見受けられる程度であり極めて少ないのが実状である。

このような観点から、本論文では単純支持された相対する2辺上に一様な初期応力が作用する場合の逆対称クロス・プライおよび逆対称アングル・プライ積層板（ $+\theta$ と $-\theta$ の組み合わせから成る板）を対象にし、初期応力の固有振動数特性に及ぼす影響を明らかにする。

積層板理論には Yang, Norris および Stavsky の1次せん断変形理論 (YNS 理論)⁴⁾を採用し、解析手法には選点法⁵⁾を用いる。初期応力下の動的基礎方程式を導く過程では、Sun⁶⁾によって始めて Timoshenko 梁の解析に導入され、その後 Hinton⁷⁾, Dawe⁸⁾によって Mindlin 板の解析に用いられた曲率項（‘Curvature term’, 振動問題での回転慣性と同様な役割を果たす）を考慮に入れた。その結果、初期応力が作用しないいわゆる無負荷下の固有振動数が既知であれば、それを用いて初期応力作用時の固有振動数を決定出来る算定式が得られた。

* 工博 北海道大学助教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)
 ** 工修 北海道大学大学院 工学研究科博士後期課程 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)
 *** 工博 北海道大学教授 工学部土木工学科 (〒060 札幌市北区北13条西8丁目)

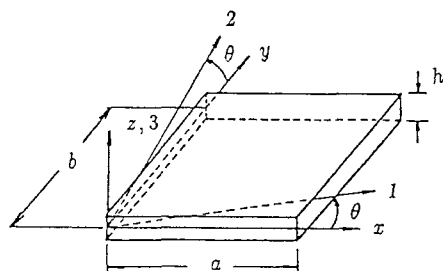


図 - 1 座標軸と材料主軸の関係

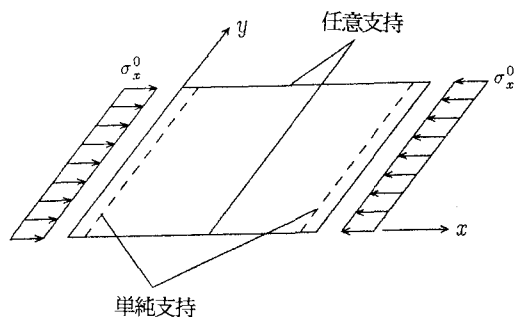


図 - 2 一様な初期圧縮応力を受ける積層板

2. 解析モデルと基礎方程式

平板の厚さは一様とし h で表す。板厚中央面に座標 (x, y) 、それらに垂直な座標 z を定める。積層板を構成する各ラミナは均質な直交異方性弾性材料とし、各ラミナの密度および厚さは同じとする。材料の直交異方性主軸を $(1, 2, 3)$ で表し、主軸 3 は z 軸に平行で、主軸 1 と 2 はそれぞれ x と y に対し傾き角度 θ (プライ配向角) だけ傾いているものとする。材料主軸 $(1, 2)$ 方向の弾性係数 E_1, E_2 、ポアソン比 ν_{12}, ν_{21} 、およびせん断弾性係数 G_{12}, G_{13}, G_{23} で与えられるものとする。座標軸と材料主軸の関係を図 - 1 に示す。

積層板は $x=0$ と $x=a$ で単純支持され、図 - 2 に示されるように単位長さ当り一様な初期圧縮応力 σ_x^0 (圧縮力 $N_x^0 = h\sigma_x^0$) を受けるものとする。

さて、初期応力を受ける積層板の基礎方程式は、ひずみエネルギー、運動エネルギー、前述の曲率項を考慮した初期応力による仕事を用いて、Hamilton 原理より次のように表される。

$$\left. \begin{aligned} N_{x,x} + N_{xy,y} - h\sigma_x^0 u_{,xx} - \rho h u_{,tt} &= 0 \\ N_{y,y} + N_{xy,x} - h\sigma_x^0 v_{,xx} - \rho h v_{,tt} &= 0 \\ Q_{x,x} + Q_{y,y} - h\sigma_x^0 w_{,xx} - \rho h w_{,tt} &= 0 \\ M_{x,x} + M_{xy,y} - Q_x - \frac{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{x,xx}}{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{y,xx}} - \rho (h^3/12) \psi_{x,tt} &= 0 \\ M_{y,y} + M_{xy,x} - Q_y - \frac{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{y,xx}}{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{y,xx}} - \rho (h^3/12) \psi_{y,tt} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、コンマ (,) に続く添字は偏微分を表し、 $(u, v, w) = (\text{中央面の } x, y, z \text{ 方向の変位})$ 、 $(\psi_x, \psi_y) = (x-z, y-z \text{ 平面の回転角})$ 、 $\rho = \text{密度}$ 、 $t = \text{時間}$ 、 $(N_x, N_y, N_{xy}, Q_x, Q_y) = \text{合応力}$ 、 $(M_x, M_y, M_{xy}) = \text{合モーメント}$ である。式 (1) の $\frac{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{x,xx}}{\sigma_x^0 (h^3/12) \psi_{y,xx}}$ は、曲率項の考慮により現われたものである。

合応力、合モーメントと変位成分の関係式は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= A_{11}u_{,x} + A_{12}v_{,y} + B_{11}\psi_{x,x} + B_{16}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ N_y &= A_{12}u_{,x} + A_{22}v_{,y} + B_{22}\psi_{y,y} + B_{26}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ N_{xy} &= A_{66}(u_{,y} + v_{,x}) + B_{16}\psi_{x,x} + B_{26}\psi_{y,y} \\ M_x &= B_{11}u_{,x} + B_{16}(u_{,y} + v_{,x}) + D_{11}\psi_{x,x} + D_{12}\psi_{y,y} \\ M_y &= B_{26}(u_{,y} + v_{,x}) + B_{22}v_{,y} + D_{12}\psi_{x,x} + D_{22}\psi_{y,y} \\ M_{xy} &= B_{16}u_{,x} + B_{26}v_{,y} + D_{66}(\psi_{x,y} + \psi_{y,x}) \\ Q_x &= A_{55}(w_{,x} + \psi_x) \\ Q_y &= A_{44}(w_{,y} + \psi_y) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

なお、逆対称アングル・プライ積層板では $B_{11}=B_{22}=0$ 、逆対称クロス・プライ積層板では $B_{16}=B_{26}=0$ である。 A_{ij}

は伸び剛性, B_{ij} は曲げ-伸びカップリング剛性および D_{ij} は曲げ剛性と呼ばれるもので, N 枚のラミナから成る積層板では次のように表される。

$$\begin{aligned} A_{ij} &= K_{ij}^2 \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \quad (i, j = 4, 5), \quad A_{ij} = \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ B_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \quad (i, j = 1, 2, 6), \quad D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N Q_{ij}^{(k)} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \quad (i, j = 1, 2, 6) \\ &\dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで, K_{ij}^2 はせん断補正係数, 添字 k は k 番目のラミナを表し, h_k は中央面 ($z=0$) から k 番目のラミナの上面までの距離であり, $Q_{ij}^{(k)}$ はプライ配向角, 弾性係数, ポアソン比, せん断弾性係数に依存する弾性定数である。

式 (2) を式 (1) に代入すれば, 積層板の運動方程式は変位成分のみで表わされ次のように得られる。

$$\begin{aligned} &A_{11}u_{,xx} + A_{12}u_{,xy} + A_{66}(u_{,yy} + v_{,xy}) + B_{11}\psi_{x,xx} + B_{16}(2\psi_{x,xy} + \psi_{y,xx}) + B_{26}\psi_{y,xy} \\ &\quad - h\sigma_x^0 u_{,xx} - \rho h u_{,tt} = 0 \\ &A_{12}u_{,xy} + A_{22}v_{,yy} + A_{66}(u_{,xy} + v_{,xx}) + B_{22}\psi_{y,yy} + B_{16}\psi_{x,xx} + B_{26}(\psi_{x,yy} + 2\psi_{y,xy}) \\ &\quad - h\sigma_x^0 v_{,xx} - \rho h v_{,tt} = 0 \\ &A_{55}(w_{,xx} + \psi_{x,x}) + A_{44}(w_{,yy} + \psi_{y,y}) - h\sigma_x^0 w_{,xx} - \rho h w_{,tt} = 0 \\ &B_{11}u_{,xx} + B_{26}v_{,yy} + B_{16}(2u_{,xy} + v_{,xx}) + D_{11}\psi_{x,xx} + D_{12}\psi_{y,xy} + D_{66}(\psi_{x,yy} + \psi_{y,xy}) \\ &\quad - A_{55}(w_{,x} + \psi_x) - \sigma_x^0 (h^3/12)\psi_{x,xx} - \rho (h^3/12)\psi_{x,tt} = 0 \\ &B_{16}u_{,xx} + B_{22}v_{,yy} + B_{26}(u_{,yy} + 2v_{,xy}) + D_{12}\psi_{x,xy} + D_{22}\psi_{y,yy} + D_{66}(\psi_{x,xy} + \psi_{y,xx}) \\ &\quad - A_{44}(w_{,y} + \psi_y) - \sigma_x^0 (h^3/12)\psi_{y,xx} - \rho (h^3/12)\psi_{y,tt} = 0 \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

$x=0$ と $x=a$ では次のような単純支持とする。

$$\left. \begin{array}{l} \text{アングル・プライ積層板: } u = w = \psi_y = N_{xy} = M_x = 0 \\ \text{クロス・プライ積層板: } v = w = \psi_y = N_x = M_x = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$y=0$ と $y=b$ では次の境界条件の組み合わせで規定される。

$$\left. \begin{array}{l} \text{固 定 (C): } u = v = w = \psi_x = \psi_y = 0 \\ \text{自 由 (F): } N_y = N_{xy} = Q_y = M_y = M_{xy} = 0 \\ \text{単純支持 (S)[アングル・プライ積層板のとき]: } v = w = \psi_x = N_{xy} = M_y = 0 \\ \text{単純支持 (S)[クロス・プライ積層板のとき]: } u = w = \psi_x = N_y = M_y = 0 \end{array} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

3. 解析手法および固有方程式

$x=0, a$ で式 (5) の単純支持条件を満足する変位関数として, Levy 型の次式を採用する。

$$\left. \begin{array}{l} u(x, y, t) = hU(\eta) \cdot \phi_1(\xi) \cdot e^{i\omega t}, \quad v(x, y, t) = hV(\eta) \cdot \phi_2(\xi) \cdot e^{i\omega t} \\ w(x, y, t) = hW(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t}, \quad \psi_x(x, y, t) = X(\eta) \cdot \cos m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \\ \psi_y(x, y, t) = Y(\eta) \cdot \sin m\pi\xi \cdot e^{i\omega t} \end{array} \right\} \dots\dots (7)$$

ここで, ω =固有円振動数, m = x 方向の半波数, $\xi=x/a$, $\eta=y/b$, $U(\eta)$, $V(\eta)$, $W(\eta)$, $X(\eta)$ および $Y(\eta)$ は未知関数であり, $\phi_1(\xi)$ と $\phi_2(\xi)$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{array}{l} \text{逆対称アングル・ブライ積層板:} \quad \phi_1(\xi) = \sin m\pi\xi, \phi_2(\xi) = \cos m\pi\xi \\ \text{逆対称クロス・ブライ積層板:} \quad \phi_1(\xi) = \cos m\pi\xi, \phi_2(\xi) = \sin m\pi\xi \end{array} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

変位関係式(7)を式(1)に代入すれば、次の $\eta(=[0,1])$ に関する 2 階 5 元連立方程式が得られる。

$$[C_1]\{Z'''\} + [C_2]\{Z'\} + [C_3]\{Z\} - \Omega^2[C_4]\{Z\} - k[C_5]\{Z\} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここで $(\quad)' = d(\quad)/d\eta$, $\{Z\}^T = (U, V, W, X, Y)$, k および Ω^2 は次式で表わされる座屈応力係数および固有振動数パラメーターである。

$$k = \sigma_x^0 a^2 / (E_2 h^2), \quad \Omega^2 = \rho \omega^2 a^4 / (E_2 h^2) \quad \dots\dots\dots (10)$$

さらに, $[C_1] \sim [C_5]$ は 5×5 の係数マトリックスである。ここで後の展開に必要なマトリックス $[C_4]$ と $[C_5]$ を示せば以下となる。

$$\left. \begin{array}{l} [C_4] = \text{Diag} \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 1 & 1/12 & 1/12 \end{array} \right) \\ [C_5] = \text{Diag} \left(\begin{array}{ccccc} m^2 \pi^2 & m^2 \pi^2 & m^2 \pi^2 & m^2 \pi^2 / 12 & m^2 \pi^2 / 12 \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$y=0(\eta=0)$ と $y=b(\eta=1)$ で規定される境界条件は式(9)に類いな次式で表わされる。

$$[C_6]\{Z'\} + [C_7]\{Z\} = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで $[C_6] \sim [C_7]$ は 10×5 の係数マトリックスである。

式(9),(12)の解法として、ここでは近似解法であるが少ない自由度で高精度な解が得られる M 次 shifted Legendre 多項式 $P_M^*(\eta)$ の零点を選点とする選点法を採用する。この解法による固有値問題の定式化の詳細は文献5)に譲るが、その概略は次のようである。

式(7)に現れる関数 $(u, v, w, \psi_x, \psi_y)$ の近似関数の各々には、関数 η の端点 $(\eta_0=0, \eta_{M+1}=1)$ および多項式 $P_M^*(\eta)=0$ の零点 $\eta_i (i=1 \sim M)$ から成る $M+2$ 個の点における関数値で表される Lagrange 多項式を用いる。近似関数に含まれる $5(M+2)$ 個の未知量に対する条件式は、 $5M$ 個は微分方程式の残差条件より、残り 10 個は境界条件より得られ、考察している問題は代数方程式系の固有値問題に変換される。

以下に、上述の過程をマトリックス表現する。

a) 基礎微分方程式の残差条件 (5M個の条件)

$$[\alpha_c]\{\delta_c\} + [\alpha_e]\{\delta_e\} - k[\gamma_c]\{\delta_c\} - \Omega^2[\rho_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ここで、添字 c と e はそれぞれ選点および端点に関するマトリックス、ベクトルを表し、 $[\alpha_c]$ は $5M \times 5M$ 次のマトリックス、 $[\rho_c]$ と $[\gamma_c]$ はそれぞれ式(11)のマトリックス $[C_4]$ と $[C_5]$ の成分よりなる $5M \times 5M$ 次の対角マトリックス、 $[\alpha_e]$ は $5M \times 10$ 次のマトリックス、 $\{\delta_c\}$, $\{\delta_e\}$ はそれぞれ $5M$ 次および 10 次のベクトルである。

b) 境界条件式 (10 個の条件)

$$[\beta_c]\{\delta_c\} + [\beta_e]\{\delta_e\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに、 $[\beta_c]$ は $10 \times 5M$ 次、 $[\beta_e]$ は 10×10 次のマトリックス。

c) 固有方程式

式(13),(14)よりベクトル $\{\delta_e\}$ を消去すれば、選点における関数値を成分とするベクトル $\{\delta_c\}$ を固有ベクトルとする次の固有方程式が得られる。

$$([\alpha] - k[\gamma_c] - \Omega^2[\rho_c])\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $[\alpha] = [\alpha_c] - [\alpha_c][\beta_c]^{-1}[\beta_c]$ である。

式(15)は、初期応力 σ_x^0 を受ける積層板の固有振動に関する基礎式であるが、考察している問題の固有振動について解析し固有振動数の初期応力による変化を調べて、それが零になるときの応力値をもって座屈応力とする安定問題の動的判定法¹²⁾の基礎式でもある。この判定法を本研究の問題に適用すれば、保存系の安定問題であるので、Divergence形の座屈応力が得られることになる。これについては、数値例で例証する。

式(15)には特別な場合として次の固有値問題が含まれる。

座屈方程式： $[\rho_c]=0$ とおけば次式が得られる。

$$([\alpha] - k[\gamma_c])\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (16)$$

無負荷時 ($\sigma_x^0=0$) の固有振動方程式： $[\gamma_c]=0$ とすれば次式が得られる。

$$([\alpha] - \Omega^2[\rho_c])\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

初期応力の変化による固有振動数の変化を知るためには、まず式(16)を用いて座屈解析を行い座屈応力 ($k_{cr} = \sigma_{cr}^0 a^2 / E_2 h^2$) を求める。次に、任意の初期応力 σ_x^0 と座屈応力との比 $\lambda = k/k_{cr} (= \sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0)$ を用いて、一連の初期応力に対する固有値解析を次式によって行えばよい。

$$([\alpha] - \lambda k_{cr}[\gamma_c])\{\delta_c\} - \Omega^2[\rho_c]\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

さて、無負荷時の固有振動方程式(17) および座屈方程式(16)を用いれば、座屈係数と固有円振動数の間に成立する関係式が以下のように得られる。式(16)は次のようにも表示できる。

$$([\alpha] - k m^2 \pi^2 [\gamma_c^*])\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

ここで、マトリックス $[\gamma_c^*]$ は前述したマトリックス $[\gamma_c]$ と $[\rho_c]$ の成分の特性より次式で表わされる。

$$[\gamma_c^*] = [\rho_c] \quad \dots\dots\dots (20)$$

したがって、式(20)を用いれば、式(19)の固有値 $k m^2 \pi^2$ と式(17)の固有値 Ω^2 を等置することにより、座屈係数 k と固有円振動数 Ω の間に成立する次式が得られる。

$$k = \Omega^2 / m^2 \pi^2 \quad \dots\dots\dots (21)$$

すなわち、 $x(\xi)$ 方向波数 $m (=1 \sim \infty)$ に対する最低次の固有円振動数 $\Omega_{m1} (m=1 \sim \infty)$ を用いて、式(21)より $k_m (m=1 \sim \infty)$ を計算すれば最小の k_m が求めたい座屈応力係数 k_{cr} を与えることになる。なお式(21)は曲率項を考慮することによってのみ成立する関係式である。

初期応力の固有振動数に及ぼす影響は、式(18)を用いて直接行えるが、以下に述べる関係式によっても行うことができる。いま座屈応力を与える $\xi(x)$ 方向波数を m_* とし、式(20)および式(21) $[\bar{\Omega}_{m_*1}^2 = k_{cr} m_*^2 \pi^2]$ を用いて、式(18)を再記すれば次式となる。

$$([\alpha] - (\lambda \bar{\Omega}_{m_*1}^2 m^2 / m_*^2 + \Omega_{mn}^2) [\rho_c])\{\delta_c\} = \{0\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここで、 Ω_{mn} は初期応力下の $\xi(x)$ 方向、 $\eta(y)$ 方向波数がそれぞれ m, n の固有振動数である。次に、式(22)における $(\lambda \bar{\Omega}_{m_*1}^2 m^2 / m_*^2 + \Omega_{mn}^2)$ を固有値として式(17)と比較すれば明らかなように、この固有値は初期応力が作用しない場合の固有値 $\bar{\Omega}_{mn}^2$ に等しくならなければならない。したがって次式が得られる。

$$\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \bar{\Omega}_{m_*1}^2 m^2 / m_*^2 \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式を用いれば、初期応力下 ($\lambda = \sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0$) の固有振動数 Ω_{mn} は、式(17)より求められる無負荷の固有振動数 $\Omega_{m*1}, \bar{\Omega}_{mn}$ より容易に決定できる。なお、式(23)は非載荷辺の境界条件に無関係に成立する。

4. 数値計算例

数値計算に用いたせん断補正係数は、 $K_{44}^2 = K_{55}^2 = 5/6$ である。また内部選点数 M には、逆対称アングル・プライ積層板の振動問題の解析結果⁵⁾より判断して、 $M=13$ を用いた。

1) 解析手法の精度

逆対称アングル・プライ積層板の振動問題に対する精度検討は文献 5)で行っているのので、ここでは逆対称アングル・プライ積層板の座屈問題と逆対称クロス・プライ積層板の振動・座屈問題について記述する。用いたラミナのも材料特性は、 $E_1/E_2=40$, $G_{12}=G_{13}=0.5E_2$, $G_{23}=0.6E_2$, $\nu_{12}=0.25$ である。

表 - 1 に四辺単純支持されたアングル・プライ積層板 ($b/h=10$) の座屈問題の結果を、1 次せん断変形理論による伝達マトリックス解⁹⁾ および混合法による有限要素解¹⁰⁾の比較で示す。

曲率項を考慮した解 (本解析法) はそれを無視した解に比べて小さいか、あるいは等しくなければならないが、この点は表 - 1 から確認できる (この数値例は Navier 解を仮定することにより厳密に解くことができ、本解析法および伝達マトリックス解は厳密解に一致している)。曲率項の解に与える影響は比較的小さい (この例では、3%程度)。これは曲率項の果す役割が振動問題における回転慣性項と同様なため、低次モードでは顕著に現れないからである。なお、本研究で曲率項を取り入れたのは、理論的に式 (21) および式 (23) が成立し、この式を用いれば無負荷時の固有振動数より座屈応力の算定および初期応力下の固有振動数の算定が可能であり、また座屈・振動問題相互の解の精度の検討が行えるからである。

表 - 1 座屈係数 k_{cr} の比較 (逆対称アングル・プライ積層板)

a/b	$N=2$			$N=6$		
	本解析法	文献 9)	文献 10)	本解析法	文献 9)	文献 10)
1	17.239	17.553	17.552	32.166	32.459	32.458
2	68.116	69.809	69.809	128.663	129.836	129.833
3	151.667	155.079	155.071	289.491	292.132	292.124

表 - 2 は四辺単純支持されたクロス・プライ積層板の振動 (初期応力が作用しない場合)・座屈問題の解を、せん断変形・回転慣性の影響を無視したいわゆる古典理論による結果¹¹⁾と比較したものである。これによれば、アスペクト比 a/b および積層数 N ($N=\infty$ は曲げ - 伸びカップリング剛性 $B_{ij}=0$ となるので直交異方性解となる) によらず、 $b/h \geq 100$ であれば理論の相違による差はほとんどなくなる。

以上の数値例より明らかなように、本手法は振動・座屈問題に対して良好な結果を与えることがわかる。

表 - 2 基本固有振動数 Ω_{11} と座屈係数 k_{cr} の比較
(逆対称クロス・プライ積層板)

(a) 基本固有振動数 Ω_{11}						(b) 座屈係数 k_{cr}					
a/b	N	本解析法			文献 11)	a/b	N	本解析法			文献 11)
		$b/h=10$	$b/h=100$	$b/h=500$				$b/h=10$	$b/h=100$	$b/h=500$	
1	2	10.355	11.155	11.164	11.164	1	2	10.864	12.607	12.628	12.628
	4	14.860	17.186	17.215	17.215		4	22.373	29.926	30.026	30.030
	6	15.445	18.082	18.115	18.117		6	24.169	33.127	33.248	33.252
	∞	15.878	18.767	18.804	18.805		∞	25.543	35.685	35.825	35.831
2	2	29.431	31.292	31.312	31.313	2	2	43.456	50.430	50.510	50.513
	4	43.191	49.230	49.303	49.305		4	89.494	119.705	120.104	120.120
	6	44.429	51.870	51.955	51.960		6	96.678	132.507	132.991	133.009
	∞	44.429	53.888	53.983	53.984		∞	102.173	142.742	143.300	143.323

2) 初期応力の固有振動数に及ぼす影響

数値計算に用いた積層板は、非載荷辺が固定の正方形板とし、各ラミナは特に断わりのない限りグラファイト/エポキシの特性 $E_1/E_2=40$, $G_{12}=G_{13}=0.6E_2$, $G_{23}=0.5E_2$, $\nu_{12}=0.25$ を有するものとする。

(a) 逆対称アングル・プライ積層板

ここでは、プライ配角度 θ 、異方性の度合いを表す縦弾性係数比 E_1/E_2 および板厚比 a/h をパラメータにとり解析する。

図-3は各パラメータを変化させたときの座屈係数 k_{cr} を積層数 $N=2, 4, 6, \infty$ について示したものである。

図-3(a)は $k_{cr}-\theta$ 曲線を示し、 k_{cr} の最大値は $N=2$ で $\theta \approx 34^\circ$, N の増加とともに $\theta \approx 30^\circ$ で得られている。 k_{cr} は N の増加とともに、 $N=\infty$ の直交異方性板のそれに接近するが、これは曲げ-伸びカップリング剛性 (B_{ij}) の影響が積層数の増加とともに弱くなるからである。図中の * 印は、 $\xi(x)$ 方向の座屈モードが $m=1$ から $m=2$ および $m=2$ から $m=3$ に移り変わる点 (尖点) である。図-3(b) と 3(c) はそれぞれ、 $k_{cr}-E_1/E_2$ および $k_{cr}-a/h$ 曲線を示す (k_{cr} は $m=2$ で生じる)。式 (21) を参照すれば、 E_1/E_2 と a/h の k_{cr} に与える影響はそれらが固有振動数に与える影響に類似なものであることが理解でき、前論文⁵⁾ で指摘したように「パラメータ E_1/E_2 と a/h に対する座屈係数 k_{cr} の変化率は、各パラメータの値が小さい領域で著しい」ことがわかる。

図-4は、初期応力の状態を $\lambda (= \sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0) = 0, 0.25, 0.5, 0.75$ と変化させ、最低次の固有振動数 Ω^* に与える影響を、各パラメータに対して示した (プライ配向角 θ は図-4(a)、縦弾性係数比 E_1/E_2 は図-4(b) および板厚比 a/h は図-4(c))。図より次のようなことがわかる。

[1] $\Omega^*-\theta$ 曲線は不連続点を有する複雑な様相を呈し、プライ配向角に大きく依存する。この不連続点は初期応力の増加とともに明確になり、1つは $k_{cr}-\theta$ 曲線に現れる尖点、もう1つは最低次固有振動数を与える振動モードが $m=1$ から $m=2$ に移る尖点 ($\lambda=0.5$ では $\theta=80^\circ$, $\lambda=0.75$ では 58°) である。

初期応力の作用による固有振動数の低下は、プライ配向角 θ に大きな影響を受け、 θ の増加とともに大きくなる。しかもその度合は積層数 N に依存していない。

[2] 初期応力の作用による固有振動数の低下は、パラメータ ($a/h, E_1/E_2$) によらず一定である。 $\lambda=0$ のときの固有振動数と比較して、 $\lambda=0.25, 0.5, 0.75$ では最大で 10, 25, 40% の低下であり、この低下率は積層数にもほとんど依存しない。

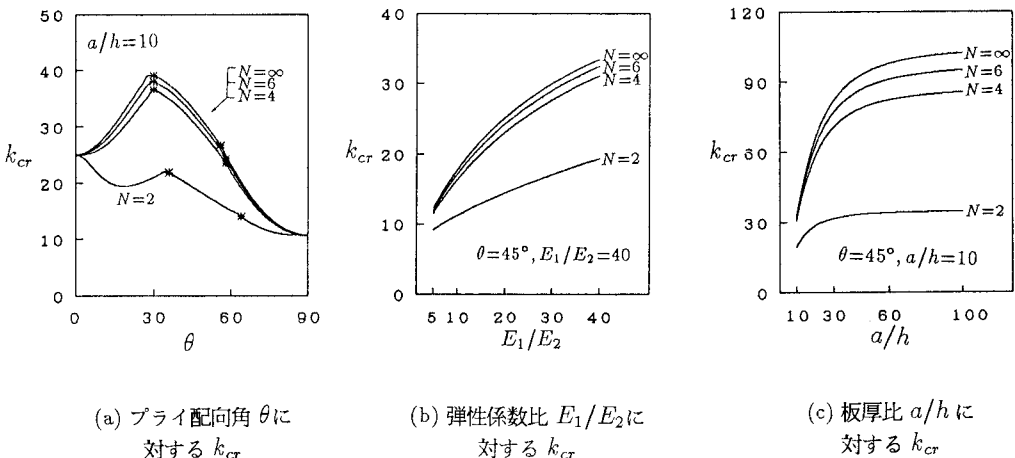
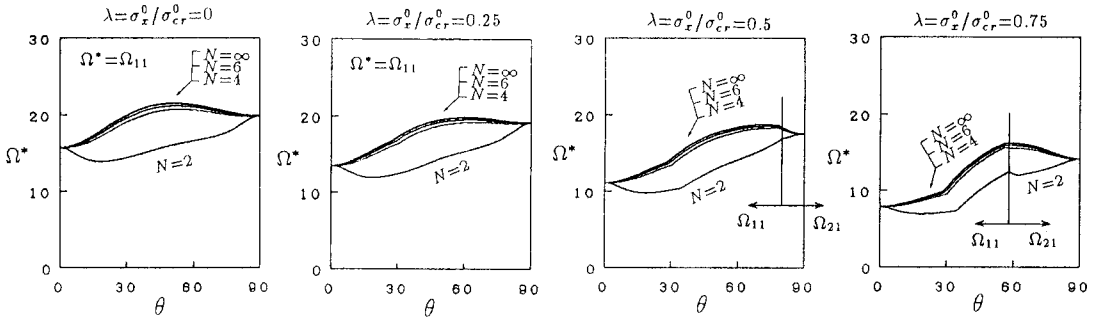
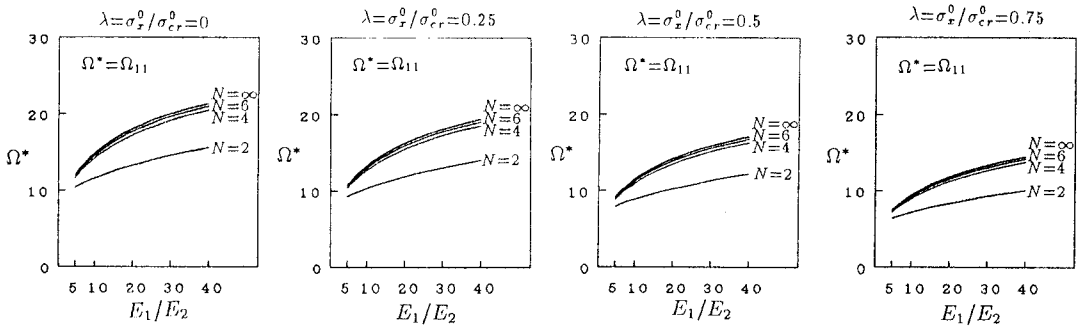


図-3 種々のパラメータ ($\theta, E_1/E_2, a/h$) に対する座屈応力係数 k_{cr}
(逆対称アングル・プライ積層板)

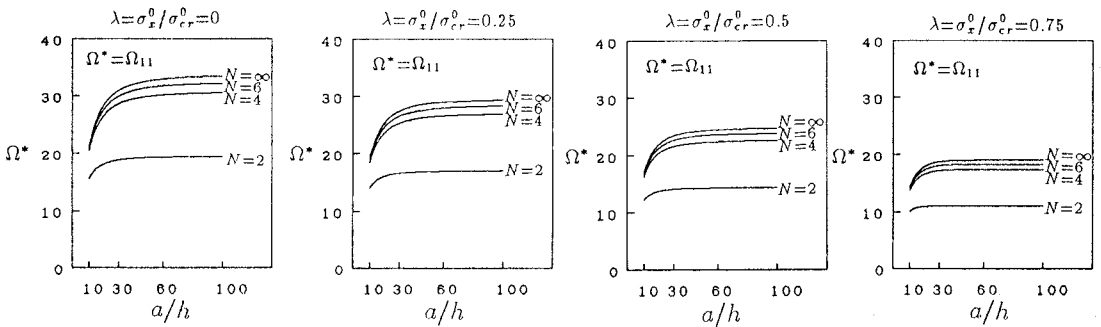
図-5(a) および 5(b) にはそれぞれ $N=2$ および $N=6$ における $\lambda - \Omega_{mn}/\Omega_0$ 曲線を示す ($\theta=45^\circ, a/h=10$)。横軸 Ω_{mn}/Ω_0 は初期応力が作用しない場合の最小固有振動数 Ω_0 で基準化した固有振動数の大きさを表す ($N=2$ で $\Omega_0=15.629$, $N=6$ で $\Omega_0=21.006$)。図中の (m, n) は, $(\xi$ 方向の波数, η 方向のモード次数) を示す。図で, $\Omega_{mn}/\Omega_0=0$ で $\lambda=1$ を与える $(m, n)=(2, 1)$ は座屈波形を表す。これは動的安定解析により, 座屈応力を求めたことに同等であり, Divergence 形の座屈応力であることを示している¹²⁾。



(a) プライ配向角 θ に対する $\Omega^*(a/h=10)$



(b) 弾性係数 E_1/E_2 に対する $\Omega^*(\theta=45^\circ, a/h=10)$



(c) 板厚比 a/h に対する $\Omega^*(\theta=45^\circ, E_1/E_2=40)$

図-4 初期応力 ($\lambda=\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0$) の基本固有振動数 Ω^* に与える影響
(逆対称アングル・プライ積層板)

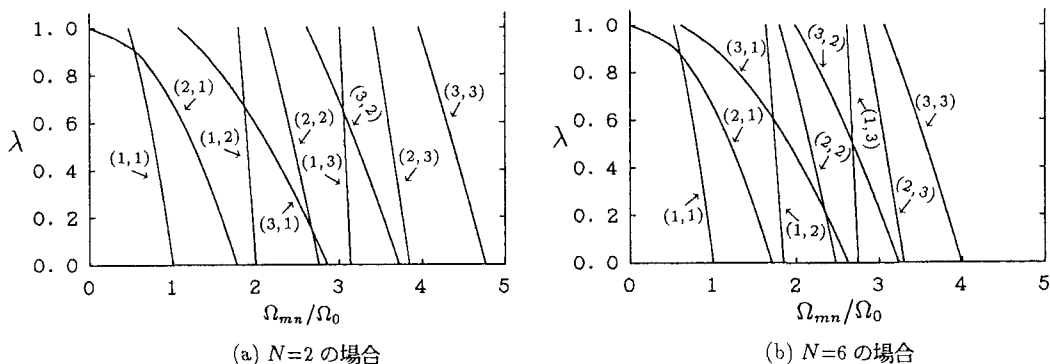


図-5 固有振動数 Ω_{mn} に及ぼす初期応力 $\lambda = (\sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0)$ の影響
(逆対称アングル・プライ積層板, $\theta=45^\circ, a/h=10$)

b) 逆対称クロス・プライ積層板

ここでは、縦弾性係数比 E_1/E_2 および板厚比 a/h をパラメータにとり解析する。

図-6(a)には $a/h=10$ における $k_{cr} - E_1/E_2$ 曲線を、図-6(b)には $E_1/E_2=40$ における $k_{cr} - a/h$ 曲線を示す。いずれの場合も座屈モードは波数 $m=2$ である。なお各パラメータの座屈係数 k_{cr} に与える影響は前述の逆対称アングル・プライ積層板に同じである。

図-7は初期応力状態を $\lambda=0, 0.25, 0.5, 0.75$ と変化させた際の最低次固有振動数 Ω^* に与える影響をみたものである(図-7(a)に $\Omega^* - E_1/E_2$ 曲線、図-7(b)に $\Omega^* - a/h$ 曲線を示す)。初期応力の作用による固有振動数の低下は、パラメータ ($E_1/E_2, a/h$) によらず一定である。 $\lambda=0$ ときの固有振動数と比較して、 $\lambda=0.25, 0.50, 0.75$ では最大で10,25,40%の低下であり、この低下率は積層数 N にほとんど依存しない。

図-8は、図-5に同様な $\lambda - \Omega_m/\Omega_0$ 曲線を示したもので、基準化に用いた無負荷の最小固有振動数 Ω_0 は $N=2$ で $\Omega_0=15.152$ 、 $N=6$ で $\Omega_0=20.236$ である。

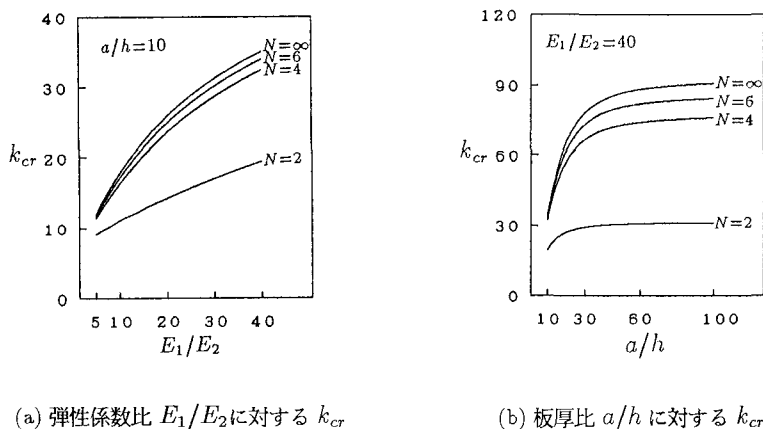
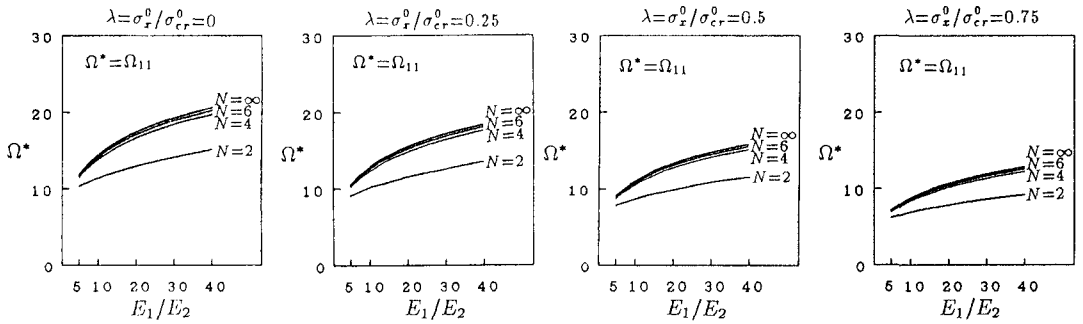
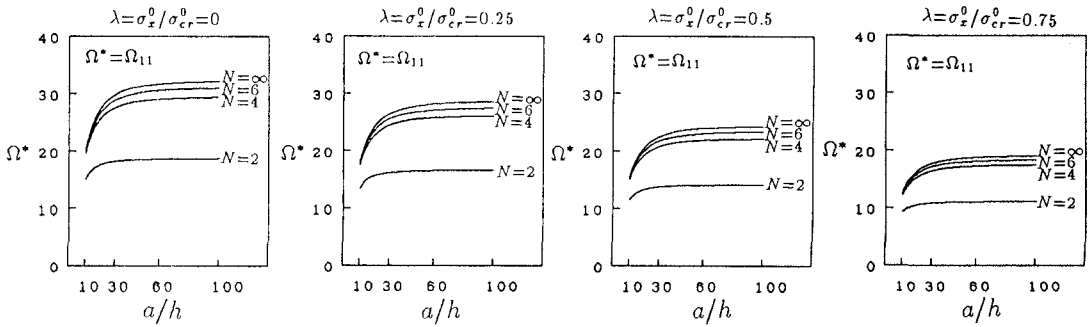


図-6 パラメータ E_1/E_2 と a/h に対する座屈応力係数 k_{cr}
(逆対称クロス・プライ積層板)

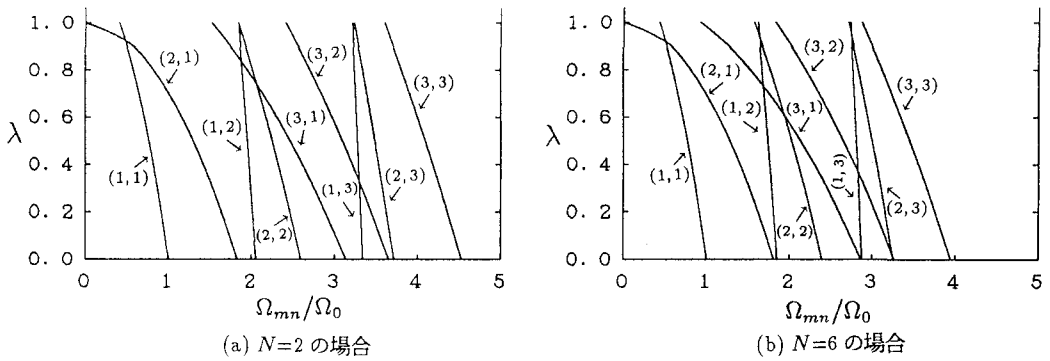


(a) 弾性係数比 E_1/E_2 に対する Ω^* ($a/h=10$)



(b) 板厚比 a/h に対する Ω^* ($E_1/E_2=40$)

図-7 初期応力 ($\lambda=\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0$) の基本固有振動数 Ω^* に与える影響
(逆対称クロス・プライ積層板)



(a) $N=2$ の場合

(b) $N=6$ の場合

図-8 固有振動数 Ω_{mn} に及ぼす初期応力 $\lambda=(\sigma_x^0/\sigma_{cr}^0)$ の影響
(逆対称クロス・プライ積層板, $a/h=10$)

5. 結論

単純支持された相対する二辺上に一様な圧縮応力が作用する場合の逆対称クロス・アングルプライ積層板の自由振動解析を行った。

初期応力を受ける正方積層板の基本固有振動数特性について、非載荷辺が固定の場合を例にとり、プライ配向角 θ 、縦弾性係数比 E_1/E_2 および板厚比 a/h と主とした数値パラメータ解析を行い、次のことが明かとなった。

- (1) 初期応力の作用による固有振動数の低下は、プライ配向角 θ に大きく依存する。低下の度合はプライ配向角が大きい程著しい。
- (2) 初期応力の作用による固有振動数の低下の度合は、弾性係数比 E_1/E_2 および板厚比 a/h によらずほぼ一定である。しかも積層数にはほとんど影響されない。

単純支持された相対する二辺上に一様な初期圧縮応力が作用する逆対称クロス・アングルプライ積層板の固有振動数は、次式によっても算定できる。

$$\Omega_{mn}^2 = \bar{\Omega}_{mn}^2 - \lambda \bar{\Omega}_{m+1}^2 m^2 / m_*^2$$

ここで

m, n = 振動モードにおける x, y 方向の半波数, Ω_{mn} = 初期応力下の無次元化固有振動数。

$\bar{\Omega}_{mn}$ = 非負荷状態で無次元化固有振動数, $\lambda (= \sigma_x^0 / \sigma_{cr}^0)$ = 作用応力と座屈応力の比。

$m_*, \bar{\Omega}_{m+1}$ = $\text{Min}_j [\bar{\Omega}_{j1}^2 / (\pi^2 j^2)]$ を満たす j と $\bar{\Omega}_{j1}$ 。

上式を用いれば非載荷辺の任意境界条件に対して、初期応力を受ける積層板の固有振動数は無負荷の自由振動解析の結果のみより算定できる。なお、上式は各ラミナの密度が同じ場合に成立することに留意されたい。

最後に、本研究は平成3年度科学研究補助金（一般研究(c)）によるものの一部であることを付記し、関係各位に謝意を表します。

参考文献

- 1) Leissa, A.W. : Recent studies in plate vibrations : 1981-85, Part II. Complicating effects, Skock Vib. Dig., Vol.18, p.23, 1986.
- 2) Leissa, A.W. : A review of laminated composite plate buckling, *Appl Mech Rev.*, Vol.40, p.575, 1987.
- 3) Yang, I.H. and Shieh, V.A. : Vibrations of initially stressed thick, rectangular orthotropic plates, *J. Sound Vib.*, Vol.119, p.545, 1987.
- 4) Yang, P.C., Norris, C.H. and Stavsky, T. : Elastic wave propagation in heterogeneous plates, *Int. J. Solids Struct.*, Vol.2, p.665, 1965.
- 5) 芳村仁・三上隆・朴勝振：逆対称アングル・プライ積層板の自由振動，構造工学論文集 Vol.37A, p.911, 1991.
- 6) Sun, C.T. : On the equations of Timoshenko beam under initial stress, *J. Appl. Mech.*, Vol.39, p.282, 1972.
- 7) Hinton, E. : Buckling of initially stressed Mindlin plates using a finite strip method, *Comput. Struct.*, Vol.8, p.99, 1978.
- 8) Dave, J.E. : Buckling and vibration of plate structures including shear deformation and related effects, In *Aspects of the Analysis of Plate Structures* (D.J.Dawe, R.W.Horsington, A.G.Kamtekar, and G.H.Little, eds), Clarendon Press, Oxford, p.73, 1985.
- 9) Khdeir, A.A. : Stability of antisymmetric angle-ply laminated plates, *Proc. of ASCE*, Vol.115, No.5, p.952, 1989.

- 10) Putcha,N.S. and Reddy,J.N. : Stability and natural vibration analysis of laminated plates by using a mixed element based on a refined plate theory, *J.Sound Vibr.*, Vol.104, p.285, 1986.
- 11) Jones,R.M. : Buckling and vibration of unsymmetrically laminated cross-ply rectangular plates, *AIAA J.*, Vol.11, No.12, p.1626, 1973.
- 12) Bolotin,V.V. : *Nonconservative Problems of the Theory of Elastic Stability*, Pergamon Press, 1963.

(1991年9月30受付)