

多目的計画法を用いた骨組構造の 塑性解析に関する一考察

A STUDY ON THE COLLAPSE LOAD ANALYSIS OF SKELETAL STRUCTURES
USING MULTI-OBJECTIVE PROGRAMMING

三原徹治* 千々岩浩巳** 石川信隆*** 太田俊昭****

by Tetsuji MIHARA, Hiromi CHIJIWA, Nobutaka ISHIKAWA and Toshiaki OHTA

This paper presents a multiobjective programming approach to the collapse load analysis of skeletal structures subjected to non-proportional loadings. The equilibrium condition for non-proportional loaded structure is initially formulated based on the assumption that the non-proportional loading consists of some proportional loadings. Then, two collapse load analysis methods are proposed. The one, named as One load Factor Maximization method (OFM), is formulated as a linear programming (LP) problem that entails the maximization of only a load factor while setting the values of the other load factors. The other, named as Multi load Factor Maximization method (MFM), is formulated as a linear multiobjective problem that entails the maximization of some load factors, and transformed into LP problem by using the satisficing trade-off method. Three frame structures are analyzed by the OFM and MFM to illustrate the scope and application of the approach.

Key words: non-proportional loading, collapse load analysis, skeletal structure, rigid-plastic theory, multiobjective programming, satisficing trade-off method

1. 緒言

塑性解析の目的は、構造物全体の塑性耐力を評価することであり、具体的には構造物が塑性崩壊状態を起こす荷重量（崩壊荷重、終局荷重）を求めることになる。このため、塑性解析に関する従来の研究においては、基準にする荷重量（系）が比例的に変化するという比例荷重を仮定し、その比例係数（荷重係数）の限界値（塑性崩壊荷重係数）を求める手法が多く用いられてきた¹⁾。比例荷重を仮定することにより、慣用の剛塑性理論に基づく解析問題は、荷重係数の最大化を図る線形計画（LP）問題として得られる。しかもこの場合、容易に得られるわずかな数の基本崩壊メカニズムだけを考慮すれば、膨大な数の可能崩壊メカニズムのすべてを見つけ出す必要はなく、LPを用いた効率的な塑性解析が可能である。

しかし、構造物に作用する荷重は、一般に比例荷重とみなすことが適切でない場合が多い。このような一般的な荷重（非比例荷重）を受ける場合における塑性解析を、最適化手法を用いてシステマティックに行う

* 工博 九州共立大学 助教授 工学部土木工学科（〒807 北九州市八幡西区自由ヶ丘1-8）

** 九州大学 助手 工学部土木工学科（〒812 福岡市東区箱崎6-10-1）

*** 工博 防衛大学校 教授 土木工学教室（〒239 横須賀市走水1-10-20）

**** 工博 九州大学 教授 工学部土木工学科（〒812 福岡市東区箱崎6-10-1）

手法については、わずかに石川ら²⁾の研究があるにすぎない。その手法は、死荷重系と活荷重系の2つの荷重系に対してそれぞれ荷重係数を設定し、死荷重係数をあらかじめ与えることにより活荷重係数の最大化を図る問題をLPにより解くものであり、死荷重係数の与え方により崩壊状態における断面力分布、崩壊メカニズム、崩壊時の活荷重係数値等が異なることを明らかにしている。

本研究は、上記研究²⁾をさらに拡張するため、多目的計画法を用いて非比例荷重を受ける骨組構造の一般的な崩壊荷重解析法の確立を企図し、数値計算によりその解析特性を基礎的に検討するものである。その方法は、まず、非比例荷重を複数の比例荷重の重ね合せと仮定したときの崩壊荷重解析に必要な基本条件（平衡条件、降伏条件）を導き、次に、この基本条件と多目的計画法を用いてそれぞれ限定最大化法および多目的最大化法と名付けた2解析手法を提示する。

ここに、限定最大化法とは、複数の荷重係数のうち着目する1つの荷重係数を除く他の荷重係数値を固定し、着目した1つの荷重係数のみ最大化を図る最適化問題であり、他の荷重係数をパラメトリックに指定することにより、多目的計画法におけるPareto解集合³⁾を求めることができる。本法は、荷重係数の数が少ない場合や、あらかじめ荷重係数値のとり得る範囲が小さいことが明かな場合に適用性が良い。また、従来の解析法^{1), 2)}と同様にLPとして定式化されるため、取扱いも容易である。

一方、本来の多目的計画法の観点から複数の荷重係数のそれぞれの最大化を図る多目的線形計画問題として定式化される手法が、多目的最大化法である。この場合、他の荷重係数値を小さくすることにより、ある荷重係数値を大きくすることができ、それらの荷重係数の組合せ（Pareto解）を求めることになるが、ここではその解法に満足化トレードオフ法における補助的スカラー化手法³⁾を用い、単一目的線形計画問題へ変換できることを示す。

数値計算では、まず、最も基本的な2荷重系構造の解析を本研究で提示した2つの解析手法によりそれぞれ行い、提案法の妥当性や適用性および得られる崩壊荷重係数の組合せの性質などについて検討する。さらに、2種類の3荷重系構造の解析を行い、得られるPareto解が有する性質を、比例荷重を仮定した場合や2荷重系の場合との比較から検討する。

なお、本研究では作用荷重を非比例荷重とすること以外、慣用の剛塑性理論にしたがい、分布荷重は等価な集中荷重に置換できるものとする。

2. 非比例荷重を受ける構造の基本条件

(1) 平衡条件

非比例荷重による崩壊荷重は、基本的には荷重ベクトル自体の変化を考慮して算定されるべきであろうが、最適化手法を用いた効率的な解析には、変動対象をスカラー量とすることが望ましい。よって、本研究では次のように「構造全体における内力と外力は常につり合いを保つ」という平衡条件を導く。

剛塑性理論では、構造物の変形は微小であり、変形前の力のつり合いが変形後も保たれる、すなわち、対象構造の幾何的条件から求められる適合マトリックスが変化しないことを仮定する。この仮定が、作用荷重が非比例荷重の場合でも許容され、さらに、非比例荷重を複数の比例荷重（系）の重ね合せと仮定すると、平衡条件は次式のように導かれる。

$$C^T Q = \sum_{f=1}^I \alpha_f F_f \quad \text{-----} \quad (1)$$

ここに、 C は適合マトリックス、 Q は内力（断面力）ベクトル、 F_f 、 α_f はそれぞれ f 番目の荷重系の基本となる荷重ベクトルおよび荷重係数、 I は作用荷重系の総数であり、上付き添字 T は転置マトリックスを示す記号である。ただし、崩壊荷重解析においては一般に、 C 、 F_f は既知、 Q 、 α_f は未知数であり、荷重量の変化は荷重係数 α_f の変動によって表される。なお、式(1)において $I = 1$ とすると従来の比例荷重を受け

る場合の平衡条件を示す。

(2)降伏条件

次に、どのような荷重が作用しても崩壊状態において内力 Q は降伏面の内側になければならない。よって、 N を降伏面における単位法線マトリックス、 R を塑性容量ベクトルとすると、降伏条件は次のような不等式として得られる。

$$N^T Q \leq R \quad \text{-----} \quad (2)$$

ここで、 N 、 R は本来 Q の値によって変化するものであるが、例えば、1 次応力として軸方向力のみを考慮するトラス構造部材のように、単一断面力の作用を仮定することができる構造では N は一定となり、さらに、組合せ応力を受ける場合にも線形化降伏条件⁴⁾を導入することにより N を既知定数として取扱うことができる。また、 R についても構造物が崩壊状態に至るまで不安定現象が生じないという剛塑性理論の仮定から、定数（既知）とすることができる。したがって、本研究においても、従来の塑性解析に関する研究^{1)・2)}と同様に Q だけを式(2)における未知数とする。

3. 多目的計画法による崩壊荷重解析の基本式

(1)限定最大化法

本法は、ある限定した 1 つの荷重係数のみを最大化する方法で、以下のように多目的計画法における Pareto 解集合³⁾を求めることができる。

いま、平衡条件（式(1)）と降伏条件（式(2)）だけを満足するような $\alpha_i (i=1..I)$ 、 Q は静的許容な状態にある。したがって、崩壊荷重は式(1)、(2)を満足し、しかもちょうど崩壊メカニズムを生起させる荷重として得られることになるが、そのような $\alpha_i (i=1..I)$ の組合せは無限に存在することが予想され、崩壊荷重としてある組合せだけを限定することはできない。しかしながら、例えば、橋梁構造における死荷重と活荷重のように、小さな変動しか認められない（1 つ以上の）荷重系と大きな変動が予想される 1 つの荷重系が作用する場合には、前者の荷重係数値を固定し後者の荷重係数だけを変化させて崩壊荷重を求めることができる。

このとき、塑性解析の下界定理⁵⁾によれば「静的許容な荷重の中で最大のものが真の崩壊荷重」であるため、変化させる 1 個の荷重係数は最大化する必要がある。最大化を図る荷重係数を 1 個に限定することからこのような手法を限定最大化法と呼ぶ。限定最大化法では、式(1)に示す I 個の荷重係数のうち最大化の対象となる J 番目の荷重係数 α_J だけが未知数となり、他はすべて既知となる。よって、その解析基本式は次のような最適化問題として得られる。

$$\text{目的関数: } \alpha_J \rightarrow \max. \quad \text{-----} \quad (3a)$$

$$\text{制約条件: } C^T Q - \alpha_J F_J = \begin{cases} \sum_{i=1}^{J-1} \alpha_i F_i + \sum_{i=J+1}^I \alpha_i F_i & (J \neq 1 \text{ のとき}) \\ \sum_{i=2}^I \alpha_i F_i & (J = 1 \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{-----} \quad (3b)$$

$$N^T Q \leq R \quad \text{-----} \quad (3c)$$

式(3)の各式がいずれも未知数の線形式であることから、限定最大化法は従来の解析法^{1)・2)}と同様に LP を用いて解くことができる。また、式(3)は、 $I = 1$ とすれば比例荷重を仮定する解析基本式に一致し、 $I = 2$ とすれば石川²⁾が提案した解析基本式を与えることから、本法が従来の崩壊荷重解析法を一般的に拡張した手法であることが認められる。

ここで、式(3)において $\alpha_i (i \neq J)$ をパラメトリックに与えれば、崩壊荷重係数の組合せ（Pareto 解）が逐

次求められ、これらを包絡するとPareto解集合が得られる。すなわち、本解析におけるPareto解とは、いくつかの崩壊荷重係数が同時に最大化を満足するような荷重係数の組合せをいい、その解の集合をPareto解集合という。よって、 $\alpha_i (i \neq j)$ 値に大きな変動が予想される場合においても、考慮する荷重係数の数が少ないときには、本法により異なる崩壊荷重係数の組合せ（Pareto解集合）を容易に求めることができる。ただし、パラメトリックに与える $\alpha_i (i \neq j)$ 値がPareto解集合に含まれないときには解が得られないので、 $\alpha_i (i \neq j)$ 値の設定には留意する必要がある。

(2)多目的最大化法

本法は、2個以上の荷重係数を同時に最大化させる方法で、以下のように多目的計画法における1つのPareto解を得ることができる。前記の限定最大化法の方法では、考慮する荷重係数の数が多く、しかも、最大化する荷重係数を1つに限定することが困難な場合に、パラメトリックに与える荷重係数値の組合せの数が飛躍的に増大する。また、数値計算例において後述するように固定する荷重係数値の与え方によっては、解が得られないこともあるため、限定最大化法の適用は事実上困難となる。よって、ここでは、複数の荷重係数の最大化を意図する多目的問題を次のように設定する。

$$\text{目的関数: } \alpha_i \rightarrow \max. \quad (i = 1..K) \quad \text{-----} \quad (4a)$$

制約条件:

$$C^T Q - \sum_{i=1}^K \alpha_i F_i = \begin{cases} \sum_{i=K+1}^I \alpha_i F_i & (K \neq I \text{ のとき}) \\ 0 & (K = I \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{-----} \quad (4b)$$

$$N^T Q \leq R \quad \text{-----} \quad (4c)$$

ここに、式(4)はK個の未知荷重係数 $\alpha_i (i = 1..K)$ と固定された $(I-K)$ 個の荷重係数 $\alpha_i (i = K+1..I)$ による平衡条件（式(4b)）と降伏条件（式(4c)）を満足させうえて、K個の未知荷重係数 $\alpha_i (i = 1..K)$ のそれぞれを最大にする（式(4a)）多目的線形計画問題を示す。ただし、式(4)では一般性を損なわず、しかも、表記を簡潔にするため、K個の未知荷重係数番号に $i = 1$ から $i = K$ を用いたものであり、そのような並び替えの必要性を意味するものではない。また、式(4)において $K = 1$ とすると、多目的性が失われて式(3)と同じ意味の問題となることから、式(4)の適用には $2 \leq K$ であることが必要である。

一般に、この種多目的問題の解はPareto解（他の目的を犠牲にすることにより、ある目的を改良することができる解）として得られ、式(4)の場合には、他の荷重係数値を小さくすることにより、ある荷重係数値を大きくすることができる荷重係数値の組合せを求めることになる。このような組合せにおいては、当然崩壊メカニズムが形成されることになり、式(4)が崩壊荷重を求める解析法のひとつであることが理解される。よって、式(4)の問題を解いて崩壊荷重係数の組合せを求める手法を多目的最大化法と呼ぶこととする。

式(4)のPareto解（崩壊荷重係数の組合せ）を求めるため、本研究では満足化トレードオフ法における補助的スカラー化手法、すなわち、各目的に対して理想点（以下、下付き添字Sで示す）と希求水準（以下、下付き添字Aで示す）を用いて満足度関数を定義し、各満足度の均一化によりPareto解を求める手法を用いる。式(4)への適用は以下のようである。

まず、式(4a)に示すK個の未知荷重係数最大化に対する満足度関数 $Z_i (i = 1..K)$ は、次式のように表される。

$$Z_i = \frac{\alpha_i - \alpha_{is}}{\alpha_{ia} - \alpha_{is}} \quad (i = 1..K) \quad \text{-----} \quad (5)$$

ただし、 α_{is} 、 α_{ia} はそれぞれ荷重係数 α_i の理想点および希求水準で、 α_{ia} は α_{is} よりも常に小さく、 $\alpha_{ia} - \alpha_{is} < 0$ となる。次に、問題全体の満足度を示す新たな変数をZとし、次のように定める。

$$Z = \max_i Z_i \geq Z_i \quad \text{-----} \quad (6)$$

式(6)に式(5)を代入すると、次の関係が得られる。

$$\alpha_i - (\alpha_{iA} - \alpha_{is}) Z \geq \alpha_{is} \quad (i=1..K) \quad \text{-----} \quad (7)$$

式(6)または式(7)は、各 α_i に関する満足度関数 Z_i が問題全体の満足度 Z を越えないという条件を示している。また、式(6)から Z は Z_i ($i=1..K$)の最大値であるため、 Z を最小化することにより他の Z_i に比較して大きな値を持つ Z_i も小さな値に変化し、結果的に、各 Z_i の均一化が実現されることになる。結局、式(4)は式(4b, c)および式(7)を満足しながら Z の最小化を図る次のような単一目的線形問題に変換される。

$$\text{目的関数: } Z \rightarrow \min. \quad \text{-----} \quad (8a)$$

$$\text{制約条件: } C^T Q - \sum_{i=1}^K \alpha_i F_i = \begin{cases} \sum_{i=K+1}^I \alpha_i F_i & (K \neq I \text{ のとき}) \\ 0 & (K = I \text{ のとき}) \end{cases} \quad \text{-----} \quad (8b)$$

$$N^T Q \leq R \quad \text{-----} \quad (8c)$$

$$\alpha_i - (\alpha_{iA} - \alpha_{is}) Z \geq \alpha_{is} \quad (i=1..K) \quad \text{-----} \quad (8d)$$

式(8)を用いれば、ある与えられた理想点と希求水準に対する崩壊荷重係数の組合せの1つをLPにより求めることができ、他の崩壊荷重係数の組合せを求めるトレードオフも容易である。ただし、式(8b)に示す固定する荷重係数 α_i ($i=K+1..I$)値は、限定最大化法と同様にPareto解集合に含まれる必要がある。

4. 2 荷重系構造の崩壊荷重解析

(1) 構造形式および荷重系

本法の妥当性と適用性を検討するため、最も基本的な2 荷重系構造を対象とした数値計算を行う。数値計算に用いた構造形式を図-1(a)に示す。図中、 M_p は各要素の全塑性モーメント容量であり、全要素一定 ($M_p = 5.0wL$) とする。作用荷重は、図-1(b), (c)に示すように、荷重係数 α_1 に比例する水平比例荷重 ($f=1$) と荷重係数 α_2 の垂直比例荷重 ($f=2$) とを同時に作用させ、全体として非比例荷重載荷となっている。

(2) 限定最大化法による解析

上記構造・荷重系の崩壊荷重を求めるため、まず限定最大化法の適用を試みた。

2 荷重系構造では固定する荷重係数も最大化する荷重係数もともに1 個であるので、当初、 α_2 を固定する荷重係数とし、その値を0.0から順次大きな値へ変化させ、それぞれについて式(3)を用いて α_1 の最大化を行った。 α_2 の固定値 $\alpha_2(\text{given})$ と得られた α_1 の最大値の関係を図-2(a)に示す。図から、 α_1 の最大値は、 $\alpha_2(\text{given}) = 0.0 \sim 1.111$ の範囲では一定 ($= 2.222$) であり、 $\alpha_2(\text{given}) = 1.111 \sim 1.667$ のとき線形に減少していることがわかる。また、 $\alpha_2(\text{given})$ に1.667より大きな値を与えた場合には解が存在せず (すなわち、本計算例の場合、 α_2 がPareto解においてとり得る値は $0.0 \leq \alpha_2 \leq 1.667$ の範囲)、計算が異常終了することが認められた。

逆に、 α_1 を固定し、 α_2 を最大化する計算結果を図-2(b)に示す。ただし、図-2(b)の座標軸は図-2(a)と同様である。 $\alpha_1(\text{given}) =$

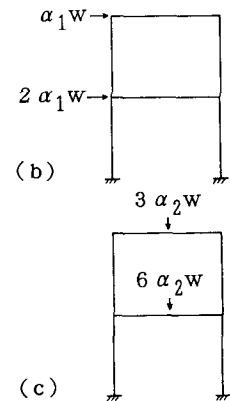
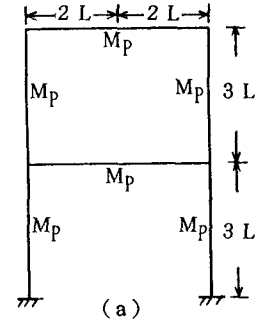


図-1 2 荷重系構造: (a) 構造形式 (b) 荷重系 ($f=1$) (c) 荷重系 ($f=2$)

0.0～1.667では α_2 の最大値は一定(=1.667)、1.667より大きくすると α_2 の最大値は減少するが、その限界は $\alpha_1(\text{given})=2.222$ であることを示している。また、図-2(b)の線分BCで表される解集合は、図-2(a)の線分BCと一致することが認められる。

図-2(a), (b)より、非比例荷重を受ける場合の崩壊荷重（崩壊荷重係数の組合せ）は一意に定まらず、図-2(a), (b)を重ね合せた点A, B, C, Dを結ぶ線上のすべての点が崩壊荷重を与えることがわかる。ただし、限定最大化法では、そのような解集合のうち $\alpha_1(\alpha_2)$ を最大化する場合には線分CD(AB)の解集合を求めることができないこともわかる。なお、本計算例において $\alpha_1=\alpha_2(=\alpha)$ 、すなわち、比例荷重を仮定したとき、崩壊荷重係数 $\alpha^c=1.667$ であり、図-2(a)および図-2(b)のC点における $\alpha_1=\alpha_2$ 値と一致することもわかった。

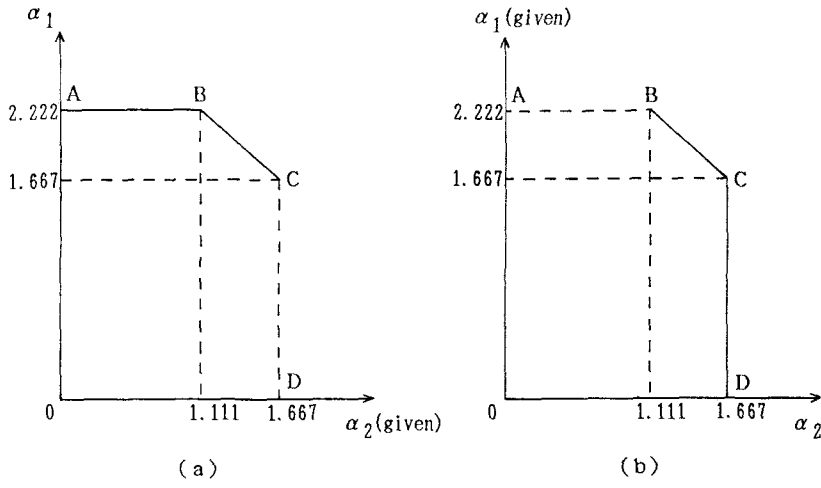


図-2 2 荷重系構造:限定最大化法による解
(a) $\alpha_2(\text{given}) \sim \alpha_1$ 関係 (b) $\alpha_1(\text{given}) \sim \alpha_2$ 関係

(3)多目的最大化法による解析

次に、多目的最大化法による解析を行った。式(8)による解析計算において、対象構造は2 荷重系(1=2)であるので、2 荷重係数のいずれをも最大化の対象(K=2)とし、理想点と希求水準には $\alpha_{1s}=\alpha_{2s}=10.0$ 、 $\alpha_{2A}=1.5$ を用い、 α_{1A} を0.1～3.0の範囲内で変化させた。

図-3および表-1は、その結果の一部を表している。図-3は、 α_{1A} とPareto解(α_1^P, α_2^P)の関係を図示した

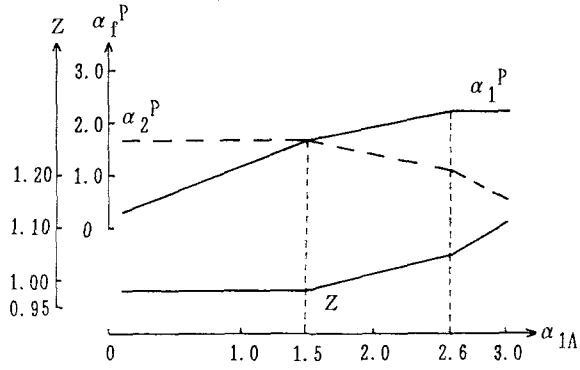


図-3 2 荷重系構造:多目的最大化法による解
($\alpha_{1A} \sim \text{Pareto解}, Z$ 関係)

表-1 2 荷重系構造:多目的最大化法による解 ($\alpha_{1A} \sim \text{Pareto解関係}$)

Case	α_{1A}	α_1^P	α_2^P	Z
①	0.1	0.2941	1.6667	0.9804
②	1.5	1.6667	1.6667	0.9804
③	1.6	1.7160	1.6174	0.9862
④	2.5	2.1875	1.1458	1.0417
⑤	2.6	2.2222	1.0661	1.0511
⑥	3.0	2.2222	0.5556	1.1111

$\alpha_{1s}=\alpha_{2s}=10.0, \alpha_{2A}=1.5$

もので、問題全体の満足度を示すZ値の変化もあわせて示している。表-1は図-3に示したPareto解のうち、6個の特徴的な解をCase番号①～⑥として整理したものである。

図-3より、 α_{1A} の増大につれて、 α_2^P が一定($=1.667$)の領域($\alpha_{1A} \leq 1.50$)、 α_1^P が一定($=2.222$)の領域($2.60 \leq \alpha_{1A}$)およびその中間の領域(α_1^P の増加と α_2^P の減少が同時に認められる領域)が、明確に区分されることがわかる。それらの領域に対応してZ値の変化も異なる傾向を示しているが、その連続性が保たれていることから式(4)に示す多目的線形問題のPareto解を満足化トレードオフ法により求める解法(式(8))の妥当性が確認される。ただし、Zの値は、式(5)、(6)の定義から推察されるように、希求水準がPareto解集合の理想点側にあるとき $1.00 < Z$ 、反対側にあるとき $Z < 1.00$ となる(表-1、図-4参照)³⁾。

表-1から、Case①～③では設定した希求水準値 α_{1A} よりPareto解 α_1^P の方が大きく、Case④～⑥では逆の関係が得られていることがわかる。希求水準を「この程度の荷重係数値であってほしい」という要求とみれば、Case④～⑥の要求は α_1 の最大化に対して厳しいものであったと評価することもできるが、崩壊荷重解析の観点から特筆すべきことは、本手法を用いれば希求水準値 α_{1A} をどのように設定しても(ただし、 α_{1A} は常に α_{1S} より小さい)1つの崩壊荷重係数の組合せを得ることができ、計算パラメータの設定に特別な配慮を必要としない点である。これは、計算パラメータの与え方によっては異常終了する場合がある限定最大化法との計算上の最大の相違点である。

図-4は、図-3に示す計算結果からPareto解集合を図示したものである。図-4が図-2(a)、(b)を重ね合せた場合に一致することから、限定最大化法による解が多目的最大化法によるPareto解の一部であることがわかる。なお、図-4の点 A_3 、 A_4 はそれぞれ表-1に示すCase③、④の希求水準点であり、同様に点 P_3 、 P_4 は各CaseのPareto解である。点 A_3 (A_4)と理想点(10.0, 10.0)を通る直線(図中、破線で示す)のPareto解集合との交点が点 P_3 (P_4)に一致しており、満足化トレードオフ法を用いた本解析法では希求水準値の変更によって異なる崩壊荷重係数の組合せ(Pareto解)を得ることが理解できる。また、図-5に本計算例で得られた崩壊メカニズムの一部を図示する。図-5(a)は、図-4における線分AB上の解を与える崩壊メカニズム(下層の枠メカニズム)を示し、水平荷重系だけによって崩壊メカニズムが生起されている。図-5(c)に示す下層はりのはりメカニズムは、図-4の線分CD上で得られる崩壊メカニズムであり、下層はりに対する垂直荷重のみにより生起している。これらに対して、図-4の線分BC上では考慮した2荷重系のいずれもが関与する組合せメカニズムが得られ、例えば、図-4のE点($\alpha_1^P = 1.919$, $\alpha_2^P = 1.414$)では図-5(b)に示す組合せメカニズムが生起した。

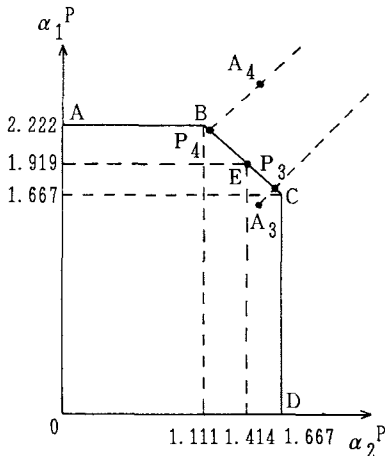


図-4 2荷重系構造:Pareto解
(崩壊荷重係数の組合せ)

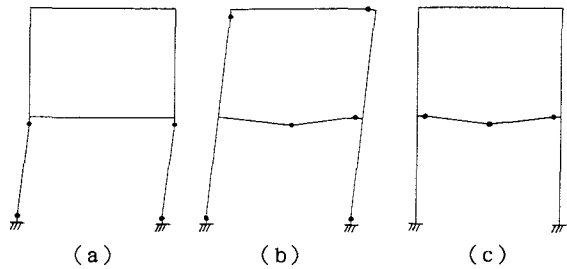


図-5 2荷重系構造:崩壊メカニズム
(a)図-4の線分ABのメカニズム
(b)図-4の線分BC(点E)のメカニズム
(c)図-4の線分CDのメカニズム

5. 3 荷重系構造の崩壊荷重解析

前節において最も基本的な 2 荷重系構造について提案手法の妥当性と適用性を確認することができたので、ここでは、さらに荷重系が増えた場合の崩壊荷重の特性を検討するため、2 種類の 3 荷重系構造の解析を行う。

(1) 2 層 1 スパンラーメン

図-6は、図-1に示した 2 荷重系構造の垂直荷重系をさらに 2 つに分け、3 荷重系とした 2 層 1 スパンラーメンを示す。この構造・荷重系の Pareto 解集合 (図-7) を限定最大化法を用いて以下のように求めた。

まず、 $\alpha_1 = 0.0$, $\alpha_3 = 0.0$ に固定し α_2 を最大化することにより α_2^P 軸上の Pareto 解、すなわち、点 A' (0.0, 1.667, 0.0) を得る。次に、 $\alpha_2 = 1.667$, $\alpha_3 = 0.0$ として α_1 の最大化により点 B' が求まり、点 B' の α_1 , α_2 値を固定して α_3 を最大化して点 B を特定できる。以下、同様にして他の端点を特定し、最終的に Pareto 解集合として図-7に示す凸多面体を得た。

図-7から、Pareto 解集合に関して次のことがわかる。

- ① Pareto 解集合は、各軸上の端点 A', D', E を通る座標軸に平行な平面で形成される直方体 (図-7に破線で表示) の内部に位置する凸多面体である。
- ② 3 つの荷重係数のすべてが関与する Pareto 解集合は、図-7に斜線を付した 1 平面だけである。
- ③ 端点 B の荷重係数値 $\alpha_1^P = \alpha_2^P = \alpha_3^P = 1.667$ は、3 荷重を比例荷重 ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$) と仮定したときの崩壊荷重係数 $\alpha^c (= 1.667)$ と一致する。
- ④ 点 B を通り $\alpha_1^P \sim \alpha_3^P$ 平面に平行な面上の点 A, B, C, D を結んだ線 (図-7に一点鎖線で示す) は、図-4に示す 2 荷重系構造としたときの Pareto 解集合に一致する。

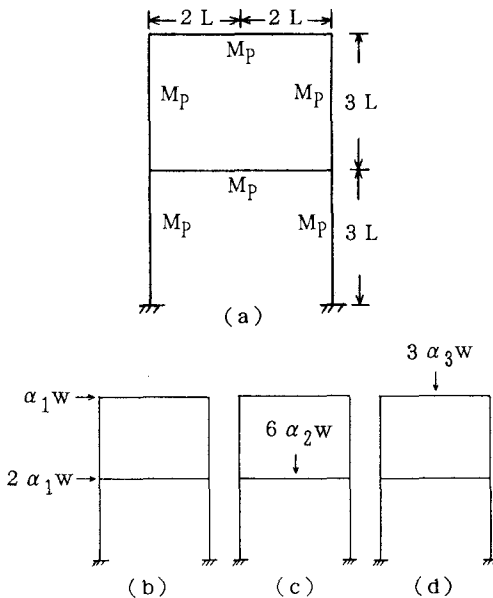


図-6 3 荷重系構造 (2 層 1 スパンラーメン):
(a) 構造形式 (b) 荷重系 ($f=1$)
(c) 荷重系 ($f=2$) (d) 荷重系 ($f=3$)

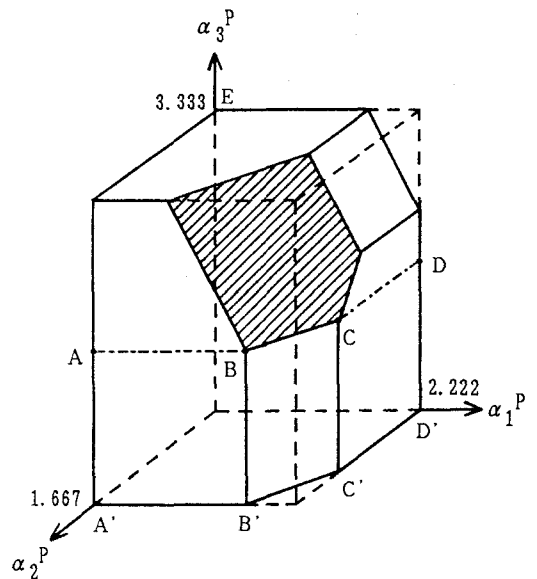


図-7 3 荷重系構造 (2 層 1 スパンラーメン):
Pareto 解 (崩壊荷重係数の組合せ)

(2) 1層2スパンラーメン

図-8に示す1層2スパンラーメン ($M_{P1}=12.0$ tf・m, $M_{P2}=9.0$ tf・m, $P_1=15.0$ tf, $P_2=12.0$ tf, $P_3=12.0$ tf) についても、限定最大化法により Pareto解集合の端点を表-2に示すように求めた。

これを図示すると、図-9が得られ、本例においても、Pareto解集合は凸多面体を形成し、3つの荷重係数のすべてが関与するPareto解集合は図-9の斜線を付した1平面だけである。

なお、理想点 $(\alpha_{1s}, \alpha_{2s}, \alpha_{3s}) = (10.0, 10.0, 10.0)$ 、希求水準 $(\alpha_{1A}, \alpha_{2A}, \alpha_{3A}) = (1.0, 1.0, 1.0)$ として、多目的最大化法によって求めたPareto解は、 $(0.975, 0.975, 0.975)$ となり、図-9の斜線を付した平面上の点Pであることを確認した。さらに、このP点の荷重係数値 $\alpha_1^P = \alpha_2^P = \alpha_3^P = 0.975$ は、3荷重系を比例荷重 ($\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$) と仮定したときの崩壊荷重係数 $\alpha^c = 0.975$ と一致した。

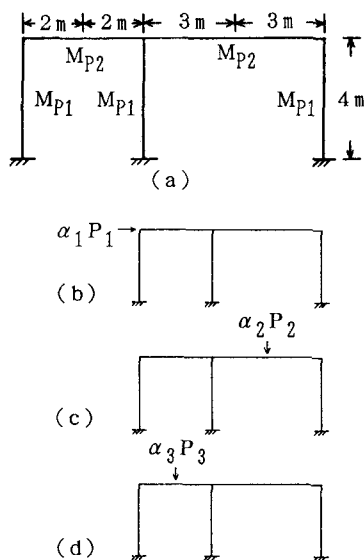


図-8 3荷重系構造(1層2スパンラーメン): (a)構造形式 (b)荷重系(f=1) (c)荷重系(f=2) (d)荷重系(f=3)

表-2 3荷重系構造(1層2スパンラーメン): Pareto解の端点座標

α_1^P	1.25	1.25	1.05	0.00	1.05	1.25	1.25	0.00	0.00	0.75	0.95	0.95
α_2^P	0.00	0.67	1.00	1.00	1.00	0.67	0.00	0.00	1.00	1.00	0.67	0.00
α_3^P	0.00	0.00	0.00	0.00	0.75	0.75	0.75	1.50	1.50	1.50	1.50	1.50

以上、Pareto解集合を表示することができる3荷重系構造について、その崩壊荷重の特性を調べたが、K荷重系構造において上記計算例のように限定最大化法を用いて Pareto解が示す凸多面体の端点を求める場合に必要な解析計算回数Nは次のように算定される。

$$N = K(K-1) + 1 \sim \sum_{i=1}^K \frac{K!}{(K-i)!} \quad (9)$$

式(9)は、Nは荷重系の設定によって、 α_i^P ($f=1..K$) が互いに全く関連をもたない場合 (Pareto解集合が例えば図-7の破線で示されるような場合) における最小回数からすべての α_i^P ($f=1..K$) が相関を示す場合の最大値までの幅を有することを示している。式(9)より、 $K=4$ のとき $N=13 \sim 64$ 、 $K=5$ のとき $N=21 \sim 325$ が得られ、 α_i^P ($f=1..K$) が互いに全く関連をもたない場合が非常にまれなことを考慮すると、4荷重系以上の構造では、多大な計算量を必要とし、さらに、視覚的な表示が不可能なため、結局、パラメトリックな計算 (計算パラメータの設定に留意が必要) に頼らざるを得ないことになる。これに対して、多目的最大化法は希求水準 (理想点値より小さければどのような値でもよい) を変化させることにより、種々の崩壊荷重が求められる手法であるため、Pareto解集合自体の特定は困難であるが、「この程度の荷重係数値であってほしい」という要求を希求水準値として設定することによりトレードオフが容易なため、4荷重系以上の崩壊荷重解析には有効な手法であると思われる。

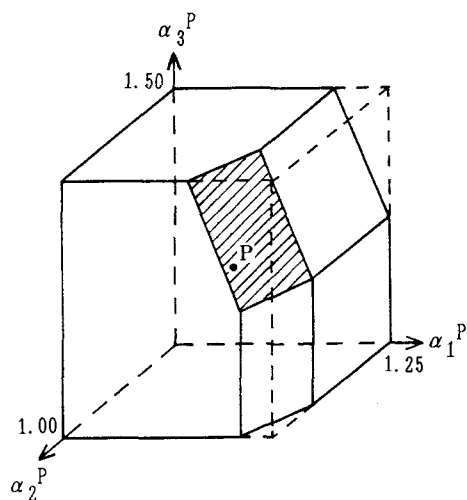


図-9 3荷重系構造(1層2スパンラーメン): Pareto解 (崩壊荷重係数の組合せ)

6. 結 言

本研究は、多目的計画法を用いて非比例荷重を受ける骨組構造の一般的な崩壊荷重解析法の確立を企図したもので、限定最大化法および多目的最大化法と名付けた2解析手法を提示するとともに、2荷重系および3荷重系構造の解析例によって非比例荷重による崩壊荷重特性の検討を行った。本研究で得られた成果・知見を列挙すると以下ようになる。

- (1)最適化手法を用いた効率的な塑性解析に必要な平衡条件を、非比例荷重を複数の比例荷重(系)の重ね合せと仮定することにより、荷重量の変化を複数の荷重係数の変動で表現できる形式として導くことができた。
- (2)複数の荷重係数のうち着目する1つの荷重係数を除く他の荷重係数値を固定し、着目した荷重係数のみを最大化する限定最大化法の基本式をLPとして定式化した。
- (3)本来の多目的計画法の観点から複数の荷重係数のそれぞれの最大化を図る多目的線形計画問題として定式化される手法(多目的最大化法)を提示し、満足化トレードオフ法による解法がLPとして得られることを示した。
- (4)限定最大化法は従来の崩壊荷重解析法を一般的に拡張した手法であり、多目的最大化法の特殊な場合であることが認められた。
- (5)荷重係数のパラメトリックな数値計算により、限定最大化法による解は、多目的最大化法によるPareto解集合を与えることが認められた。また、Pareto解集合は凸多面体を形成し、限定最大化法により2, 3荷重系構造に限り、比較的容易に表示できることを確認した。しかし、4荷重系以上の解析に対しては、多目的最大化法の方が有効であると思われる。
- (6)さらに、実際の構造設計における組合せ荷重に対しても本法の応用を検討中である。

謝 辞

本研究を行うにあたり、甲南大学理学部応用数学科中山弘隆教授より満足化トレードオフ法に関して親身なご指導を受けた。また、数値計算には九州共立大学情報処理センターおよび同学工学部土木工学科学生山下保君のご助力を得た。記して厚く謝意を表する。

参 考 文 献

- 1)例えば、Cohn, M.Z., Ghosh, S.K. and Parimi, S.R.:Unified Approach to Theory of Plastic Structures, Proc. of ASCE, No.EM5, pp.1133~1158, 1972. 10.
- 2)石川信隆, 大野友則, 岡元北海:非比例荷重を受ける骨組構造物の崩壊荷重解析と最適塑性設計, 防衛大学校理工学研究報告, 第15巻, 第3号, pp. 353~370, 1977.
- 3)中山弘隆:多目的計画に対する満足化トレードオフ法の提案, 計測自動制御学会論文集, 第20巻第1号, pp. 29~35, 1984. 1.
- 4)石川信隆, 大野友則, 岡元北海:立体骨組構造の最適塑性設計に関する一考察, 土木学会論文報告集, 第279号, pp. 45~59, 1978. 11.
- 5)石川信隆, 大野友則:入門・塑性解析と設計法, 森北出版, 1988. 5.

(1991年9月30日受付)