

散乱波動場の位相とその形状決定問題への応用

PHASE SHIFTS IN SCATTERED FAR-FIELDS AND A SHAPE RECONSTRUCTION

北原道弘* 瀬戸恭英** 中川克也***
 Michihiro KITAHARA, Yasuhide SETO and Katsuya NAKAGAWA

The phase shift analysis is carried out to quantify the scattered waveforms. The scattering amplitude of the scattered far-field is first defined. The phase shift is then introduced by expanding the scattered far-field into partial waves with spherical wave components and taking into account the energy relation. The phase shift introduced here represents the shift of phase in the total wave from the phase of an incident wave. The far-field integral representation for the scattered field is utilized to derive the explicit expression of the phase shift. This integral representation is true for an arbitrary flaw shape and it relates to the flaw geometry and boundary conditions on the flaw surface. An application is shown for the problem of shape reconstruction from the information on phase shifts.

1. はじめに

構造部材内に存在する欠陥の性状を超音波を利用して非破壊的に評価する場合、評価の基礎となる基本的な物理量は、欠陥により散乱した波動の振幅と位相であろう。振幅情報に関しては、いわゆるA、B及びCスキャンをはじめとして、すでに多くの実用例が存在する¹⁾。一方、散乱波が有する位相情報に関しては、いまだ十分な活用がなされていないように思われる。ここでは、位相シフトを、入射波に対する全波動場（入射波と散乱波の和）の位相の“ずれ”と定義し、散乱体が存在することにより生じる位相シフトを定量化することを考える。全波動場に対する積分表現をもとに、遠方波動場の積分表現を書き下すことにより、位相シフトに関する積分表現を導く。この位相シフトは、入射波の波数、散乱体形状、散乱体表面上の境界条件に関係しており、入射波、散乱体形状、境界条件を与えれば、位相シフトは一意的に定まる。いくつかの形状について位相シフトの計算例を示した後、応用として、入射波と散乱体表面上の境界条件は既知として、位相シフトを与えたときの散乱体形状の推定問題を考える。

本論文で位相シフト解析に採用する球面部分波分解法は、電磁波²⁾ および理論物理学における粒子の衝突理論³⁾ において広く知られている。本論文における要点は、この部分波分解法を積分方程式と組み合わせることにより、任意形状の欠陥と位相シフトの関係を明らかにすることにある。ここでは、Helmholtz 方程式に対する遠方散乱場の位相解析とその応用に話を絞るが、本手法の考え方自体はそのまま弾性波動問題に適用可能である。

2. 散乱場の積分表現

スカラー場 u に対する散乱問題は、次の Helmholtz 方程式に支配される。

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{in } D \quad (1)$$

ここに、 $k = \omega/c$ は波数、 ω は角振動数、 c は波の速度、 D は考えている外部領域である。いま、全波動場 u を次のように分解する。

$$u = u^I + u^S \quad (2)$$

上式において、 u^I は平面入射波、 u^S は散乱波である (Fig.1)。

* 工博 東海大学助教授 海洋学部海洋土木工学科 (〒424 静岡県清水市折戸 3-20-1)

** 東海大学 海洋学部海洋土木工学科 (〒424 静岡県清水市折戸 3-20-1)

*** 理修 トータルシステム研究所 主任研究員 (〒166 東京都杉並区阿佐谷南 1-18-6)

全波動場 u に対する積分表現は、次のようになる。

$$u(\mathbf{x}) = u^I(\mathbf{x}) + \int_S U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} ds_y - \int_S \frac{\partial U(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) ds_y, \quad \mathbf{x} \in D \quad (3)$$

上式右辺の2つの積分項が散乱波成分 u^S を表しており、 S は散乱体の表面である。また、 U は基本解であり、3次元 Helmholtz 方程式 (1) に対しては、次のように与えられる。

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (4)$$

ここに、 r は場の点 $\mathbf{x}$ と散乱体表面上の点 $\mathbf{y}$ の距離 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ である。

3. 遠方散乱場

3. 1 散乱振幅

入射波を、Fig.2 に示すように、 x_3 軸方向に進む平面波とする。

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{ikx_3} \quad (5)$$

いま、散乱体は x_3 軸に関し回転対称であると仮定する。このとき、遠方において、波動 u は次のように表される。

$$u(\mathbf{x}) = u^I + u^S \sim e^{ikx_3} + \frac{f(\theta)}{x} e^{ikx}, \quad (x \rightarrow \infty) \quad (6)$$

ここに、 $\mathbf{x} = (x, \theta, \varphi)$, $x = |\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ であり、極座標の原点は散乱体の中心に位置しているものとする。式 (6) の $f(\theta)$ は散乱振幅と呼ばれ⁴⁾、 θ は x_3 軸から計った散乱角である。散乱振幅 $f(\theta)$ は、散乱体表面の形状、境界条件などに関係しており、式 (6) の意味において、 $f(\theta)$ を決めることと遠方散乱場を決めることは等価となる。

さて、極座標において入射波は次のように遠方表現できる。

$$\begin{aligned} e^{ikx_3} &= e^{ikx \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) i^l j_l(kx) P_l(\cos \theta) \\ &\sim \sum_{l=0}^{\infty} i^l \frac{(2l+1)}{kx} \sin(kx - \frac{l\pi}{2}) P_l(\cos \theta) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{2ikx} \{ e^{ikx} - (-1)^l e^{-ikx} \} P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、Bauer の公式 (文献 5, p.368) と球 Bessel 関数 $j_l(\cdot)$ の遠方における漸近展開を用いた。また、 $P_l(\cdot)$ は Legendre 関数である。さらに、散乱振幅 $f(\theta)$ を完全系 $P_l(\cos \theta)$ により、次のように展開する。

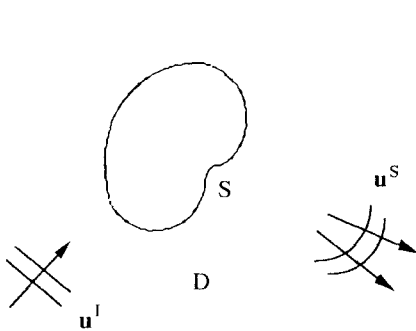


Fig.1 Scattering problem.

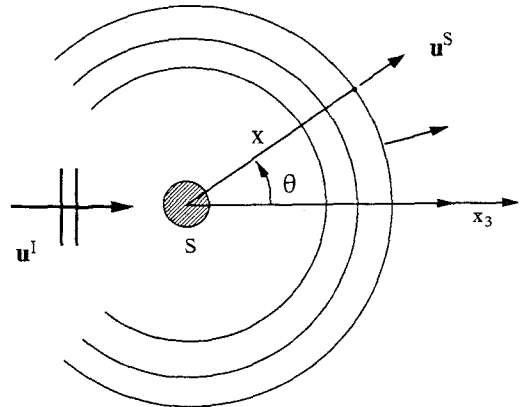


Fig.2 Incident wave and scattered far-field.

$$f(\theta) = \frac{1}{k} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2i} a_l P_l(\cos \theta) \quad (8)$$

ここで、 a_l は未知係数である。式 (7) と (8) を式 (6) に代入して、全波動場 u の遠方表現を得る。

$$u(\mathbf{x}) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{2ikx} \{ (1+a_l)e^{ikx} - (-1)^l e^{-ikx} \} P_l(\cos \theta) \quad (9)$$

3. 2 位相シフト

遠方における全波動場の表現 (9) を参照して、外向きと内向きの波動振幅に関するエネルギー関係より、次式が成立する。

$$|1 + a_l| = 1 \quad (10)$$

上式 (10) より、散乱振幅の係数 a_l を

$$1 + a_l = e^{2i\delta_l} \quad (11)$$

と置くことができる。式 (11) を式 (8) に代入して、散乱振幅に関し、次の表現を得る。

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) [e^{2i\delta_l} - 1] P_l(\cos \theta) \quad (12)$$

ここで、 δ_l の意味について考えるため、全波動場 u の遠方表現 (9) を式 (11) を用いて書き換えると次のようになる。

$$u(\mathbf{x}) \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{kx} e^{i\delta_l} e^{il\pi/2} \sin\left(kx - \frac{l\pi}{2} + \delta_l\right) P_l(\cos \theta) \quad (13)$$

また、入射波 (7) は次のように書ける。

$$u^I(\mathbf{x}) = e^{ikx_3} \sim \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(2l+1)}{kx} e^{il\pi/2} \sin\left(kx - \frac{l\pi}{2}\right) P_l(\cos \theta) \quad (14)$$

上記全波動場 u と入射波 u^I の遠方表現を比べると、 δ_l は全波動場 u の入射波 u^I に対する位相シフトを表していることがわかる。

3. 3 遠方散乱場の積分表現

式 (4) における基本解は、次のように、原点を中心とする球面部分波に展開することが出来る。

$$\frac{e^{ikr}}{4\pi r} = \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(ky) h_l^{(1)}(kx) P_l(\cos \chi), \quad (x > y) \quad (15a)$$

$$= \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(kx) h_l^{(1)}(ky) P_l(\cos \chi), \quad (y > x) \quad (15b)$$

ここで、座標値 x, y, χ などは Fig.3 に定義されている。また、 $h_l^{(1)}(\cdot)$ は球 Hankel 関数である。さて、Legendre 関数の加法定理より、場の点 $\mathbf{x} = (x, \theta, \varphi)$ と散乱体表面上の点 $\mathbf{y} = (y, \bar{\theta}, \bar{\varphi})$ を挟む角 χ は $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の角座標 θ, φ と $\bar{\theta}, \bar{\varphi}$ により次のように分離出来る。

$$P_l(\cos \chi) = P_l(\cos \theta) P_l(\cos \bar{\theta}) + 2 \sum_{m=1}^l \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \bar{\theta}) \cos m(\varphi - \bar{\varphi}) \quad (16)$$

ここに、 $P_l^m(\cdot)$ は Legendre 陪関数である。式 (16) を用いて、 $x > y$ に対し、式 (15a) を次のように書くことが出来る。

$$\begin{aligned} \frac{e^{ikr}}{4\pi r} &= \frac{ik}{4\pi} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) j_l(ky) h_l^{(1)}(kx) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \bar{\theta}) \\ &\quad + [\cos m(\varphi - \bar{\varphi}) \text{を含む項}] \end{aligned} \quad (17)$$

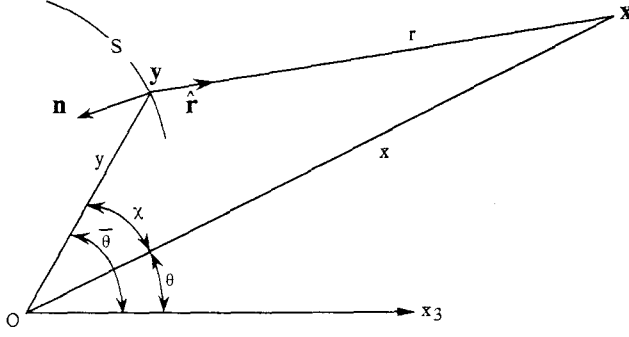


Fig.3 Geometrical relation.

遠方における球 Hankel 関数 $h_l^{(1)}(\cdot)$ の挙動は

$$h_l^{(1)}(kx) \sim (-i)^{l+1} e^{ikx} / kx, \quad (x \rightarrow \infty) \quad (18)$$

であり、式 (17) と (18) より、基本解 (4) の遠方における表現は次のようになる。

$$\begin{aligned} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \sim \frac{-1}{4\pi} \frac{e^{ikx}}{x} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^{l+2} j_l(ky) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \bar{\theta}) \\ &\quad + [\cos m(\varphi - \bar{\varphi}) \text{を含む項}], \quad (x \rightarrow \infty) \\ &\equiv U^{\text{far}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (19)$$

式 (19) を積分表現 (3) に代入して、全波動場 u に対する遠方表現を得る。

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &\sim e^{ikx_3} + \frac{e^{ikx}}{x} \left[\frac{-1}{4\pi} \int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^{l+2} j_l(ky) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_y \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4\pi} \int_S u(\mathbf{y}) i k \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^{l+2} j_l(ky) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_y \right], \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、次の関係

$$\begin{aligned} \frac{\partial U(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} &= n_i(\mathbf{y}) \frac{\partial U(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial y_i} = -ik \left(1 + \frac{i}{kr} \right) \mathbf{n} \cdot \hat{\mathbf{r}} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \\ &\sim -ik \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) U^{\text{far}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad (x \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (21)$$

を使用した。また、 $\mathbf{n}(\mathbf{y})$ は領域 D から見た散乱体表面上の単位外向き法線ベクトル、 $\hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y})$ は散乱体表面上の点 $\mathbf{y}$ から遠方の点 $\mathbf{x}$ に向く単位ベクトルである (Fig.3 参照)。

4. 位相シフトの積分表現

遠方における全波動場の表現式 (20) と 散乱振幅の定義 (6) を比べて、 $\exp(ikx)/x$ の係数として、散乱振幅に対する次の積分表現を得る。

$$\begin{aligned} f(\theta) &= \frac{-1}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} + i k \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \right\} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^{l+2} j_l(ky) P_l(\cos \theta) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_y \\ &= \frac{1}{2ik} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1)(-i)^{l+2} \left[\frac{-2ik}{4\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} + i k \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \right\} j_l(ky) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_y \right] P_l(\cos \theta) \end{aligned} \quad (22)$$

さらに、散乱振幅に対する 2 つの表現式 (22) と (12) を比べて、位相シフトに対する次の積分表現を得る。

$$e^{2i\delta_l} - 1 = -(-i)^{l+1} \frac{k}{2\pi} \int_S \left\{ \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} + i k \mathbf{n}(\mathbf{y}) \cdot \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) u(\mathbf{y}) \right\} j_l(ky) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_y, \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (23)$$

与えられた入射波の波数 k ，散乱体形状 S ，さらに散乱体表面上で与えられた境界条件 u （または $\partial u/\partial n$ ）に対し，散乱体表面上の $\partial u(\mathbf{y})/\partial n$ （または $u(\mathbf{y})$ ）が分かれば，右辺はすべて既知量となり，位相シフト $\delta_l(l=0,1,2,\dots)$ を上式 (23) により決定する事が出来る．式 (23) の境界上の物理量 ($u, \partial u/\partial n$) は，散乱体表面で規定された境界条件に対し，次の境界積分方程式を解くことにより決定出来る．

$$c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = u^I(\mathbf{x}) + \int_S U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} ds_y - \int_S \frac{\partial U(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{\partial n_y} u(\mathbf{y}) ds_y, \quad \mathbf{x} \in S \quad (24)$$

Bessel 関数の原点に関する漸近展開より， $j_l(ky)$ の原点近傍の挙動は次のように書ける．

$$j_l(ky) \sim \frac{(ky)^l}{(2l+1)!!} \left(1 - \frac{(ky)^2}{2(2l+3)} + \dots\right), \quad ky \rightarrow 0 \quad (25a)$$

ここに，

$$(2l+1)!! = (2l+1)(2l-1)(2l-3)\dots 5 \cdot 3 \cdot 1 \quad (25b)$$

である．これより，入射波の波長 $\lambda(=2\pi/k)$ が散乱体の代表長と比較して大きい場合，即ち入射波の波数 k が小さい場合には，式 (23) から得られる $\delta_l(l=0,1,2,\dots)$ の l に関する収束性はかなり良いことが期待できる．

散乱体形状が球形の場合，位相シフトの積分表現式 (23) の右辺は解析的に積分できて，位相シフト δ_l の解析解を得ることができる．Table 1 は，散乱体表面 S 上の境界条件 $u=0$ の場合について，位相シフト δ_l の $l(=0,1,2,\dots)$ に関する収束性を $ak=0.1$ と 0.5 の場合について検討した結果である．ここで， a は球の半径， k は入射波の波数である．

Table1 Convergence of phase shifts δ_l ($l=0,1,2,\dots$) for sphere.

ak=0.1			ak=0.5		
l	BEM δ_l	EXACT δ_l	l	BEM δ_l	EXACT δ_l
0	-5.64E+0	-5.73E+0	0	-2.82E+1	-2.87E+1
1	-1.85E-2	-1.90E-2	1	-2.03E+0	-2.08E+0
2	E-5	E-5	2	-2.93E-2	-3.74E-2
3	E-7	E-7	3	E-4	E-4

Table2 Phase shifts δ_l ($l=0,1,2,\dots$) for $ak=1.0$.

	sphere	semi-sphere	semi-sphere	strip-sphere
				
l	δ_l	δ_l	δ_l	δ_l
0	-3.32E+1	-2.25E+1	-4.50E+1	-4.50E+1
1	-1.20E+1	-9.63E+0	-3.53E+0	-1.31E+0
2	-9.12E-1	-9.00E-1	-8.51E-1	-8.38E-1
3	-1.95E-2	-3.40E-2	-7.92E-3	-3.10E-1
4	E-5	E-3	E-3	E-3

Table 1 で“EXACT”の列が δ_l の解析解を表し，“BEM”の列は境界要素法により数値的に境界上の物理量 $\partial u / \partial n$ を求め、式 (23) の右辺を評価し δ_l を求めた結果である。この意味における数値解と解析解の対応は良好であり、また、この Table における結果より位相シフト δ_l の l に関する収束性はかなり早いことがわかる。

Table 2 は、 $ak = 1.0$ の場合について、各種形状による位相シフト量 δ_l の違いを調べた結果である。境界条件は、Table 1 と同様 $u = 0$ である。幾何形状として、球、下半球（入射波の進行方向から見て）、上半球、中央バンド状の球の一部を選んだ。この場合は、すべて境界要素法を利用した数値解である。

5. 逆問題への応用

遠方波動場の入射波に対する位相シフト δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) が計測できたとして、散乱体の形状 S を決める一手法について考える。

境界条件は散乱体の表面上で既知であり、 $u = 0$ とする。このとき、位相シフト δ_l に対する積分表現 (23) と境界上の未知量 $\partial u / \partial n$ を決めるための積分方程式 (24) は次のようになる。

$$e^{2i\delta_l} - 1 = -(-i)^{l+1} \frac{k}{2\pi} \int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} j_l(ky) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (l = 0, 1, 2, \dots) \quad (26)$$

$$\int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} = -u^I(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in S \quad (27)$$

いま、入射波 u^I (よって、入射波の波数 k) と遠方で観測された各部分波の位相シフト δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) が与えられたとき、式 (26) と (27) は散乱体形状 S と境界上の未知量 $\partial u / \partial n$ を決めるための連立方程式系と見ることができる。

一般に、散乱体形状 S は無限の自由度を有している。式 (26) も各 δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) について、無限個存在し、原理的には、形状 S を表現する無限個のパラメータを決定することができる。実際には、形状 S は有限個のパラメータ β_j ($j = 1, 2, \dots, n$) で表現するのが普通であろう。このとき β_j を決定するために、式 (26) より δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots, n-1$) に対応する n 個の方程式を選ぶことができる。また先に、Table 1 および 2 に示した結果に見るように、位相シフト δ_l の l に対する収束は、少なくとも、低周波数域においては速く、第 0 次項 δ_0 が卓越している。そこで、 n 個の形状パラメータを決めるための方程式の選び方として、 n 個の異なる波数 (k_j , $j = 1, 2, \dots, n$) に対する第 0 次の位相シフト $\delta_0(k_j)$ に対応する n 個の方程式

$$e^{2i\delta_0(k_j)} - 1 = -(-i)^{l+1} \frac{k_j}{2\pi} \int_S \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_{\mathbf{y}}} j_l(k_j y) P_l(\cos \bar{\theta}) dS_{\mathbf{y}}, \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (28)$$

を選ぶことも出来る。ただし、この場合には、境界上の未知量 $\partial u / \partial n$ を決めるための積分方程式 (27) も、 n 個の異なる入射波の波数 (k_j , $j = 1, 2, \dots, n$) に対して解くものとする。

いま、散乱体形状として x_3 軸に関して回転対称な回転楕円面を考える。

$$\left(\frac{x_1}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{a}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{b}\right)^2 = 1 \quad (29)$$

ここに、 a , b は回転楕円面の主軸の長さである (Fig.4 参照)。回転楕円面を表す 2 つのパラメータ a , b を決めるために、ここではニュートン法を採用することとし、パラメータ a , b に関する 2 つの非線形方程式を考える。

$$\begin{aligned} F_1(a, b) &= 0 \\ F_2(a, b) &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

微小パラメータ増分 Δa , Δb に対し、

$$\begin{aligned} F_1(a + \Delta a, b + \Delta b) &= 0 \\ F_2(a + \Delta a, b + \Delta b) &= 0 \end{aligned} \quad (31)$$

を仮定すると、修正量 Δa , Δb を決めるための方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F_1}{\partial b} \Delta b &= -F_1(a, b) \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} \Delta a + \frac{\partial F_2}{\partial b} \Delta b &= -F_2(a, b) \end{aligned} \quad (32)$$

これより、 Δa , Δb に対する次の表現を得る。

$$\begin{Bmatrix} \Delta a \\ \Delta b \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial a} & \frac{\partial F_1}{\partial b} \\ \frac{\partial F_2}{\partial a} & \frac{\partial F_2}{\partial b} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} F_1(a, b) \\ F_2(a, b) \end{Bmatrix} \quad (33)$$

2つのパラメータ a, b を決めるための2つの方程式 (30) として, ここでは, 2つの波数 k_1, k_2 に対する第0次の位相シフト $\delta_0(k_1), \delta_0(k_2)$ の積分表示式 (28) を選ぶ. 対応する境界上の未知量 $\partial u / \partial n$ を決めるための積分方程式 (27) と共に, 逆解析に必要な方程式系は次のようになる.

$$F_1(a, b) = \frac{-(-i)k_1}{2\pi} \int_{S(a,b)} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} j_0(k_1 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y - [e^{2i\delta_0(k_1)} - 1] \quad (34a)$$

$$F_2(a, b) = \frac{-(-i)k_2}{2\pi} \int_{S(a,b)} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} j_0(k_2 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y - [e^{2i\delta_0(k_2)} - 1] \quad (34b)$$

$$\int_{S(a,b)} \frac{\partial u(\mathbf{y})}{\partial n_y} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y = -u^I(\mathbf{x}) \quad \text{for } k = k_1 \text{ and } k_2. \quad (35a, b)$$

仮定した a, b に対し, 入射波の波数 $k = k_1$ ($k = k_2$) について, 式 (35a) (式 (35b)) により $S(a, b)$ 上の未知量 $\partial u / \partial n$ を求め, 式 (34a) (式 (34b)) の右辺に代入する. 式 (33) により修正量 $\Delta a, \Delta b$ を計算し, 修正量が許容値に収まるまで繰り返す. 問題は, 式 (33) におけるパラメータ a, b による微分の評価である. 関数 F_1 と F_2 は, 一般に形状パラメータに関し非線形となるため, ここでは, 微分を, 定義に従い数値的に評価する. 例えば, $\partial F_1(a, b) / \partial a$ の (a^0, b^0) における値は次のようになる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1(a^0, b^0)}{\partial a^0} &= \frac{-(-i)k_1}{2\pi} \left[\int_{S(a^0 + \Delta\alpha, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} j_0(k_1 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y \right. \\ &\quad \left. - \int_{S(a^0, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} j_0(k_1 y) P_0(\cos \bar{\theta}) dS_y \right] / \Delta\alpha \end{aligned} \quad (36)$$

ここに, $\Delta\alpha$ は数値微分のための微小パラメータであり, 右辺第1, 第2項の表面 $S(a^0 + \Delta\alpha, b^0)$ 及び $S(a^0, b^0)$ 上の未知量 $\partial u / \partial n$ は, 波数 k_1 に対する境界積分方程式

$$\begin{aligned} \int_{S(a^0 + \Delta\alpha, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y &= -u^I(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S(a^0 + \Delta\alpha, b^0) \\ \int_{S(a^0, b^0)} \frac{\partial u}{\partial n} U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) dS_y &= -u^I(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in S(a^0, b^0) \end{aligned} \quad (37)$$

を解いて評価する.

Fig.5 に回転楕円面 ($a = 1, b = 0.5$) に対する上記反復過程の収束状況を示す. この図において, 2つのパラメータの初期値は, $a^0 = b^0 = 2.5$ と選び, 式 (34a, b) における第0次の位相シフト量 $\delta_0(k_1)$ と $\delta_0(k_2)$ は, Table 3 における $ak_1 = 0.1$ と $ak_2 = 0.5$ に対応する $\delta_0(l = 0)$ の値 (BEM) を用いた. 図より, 第6回目の反復で, 回転楕円形に収束していることがわかる.

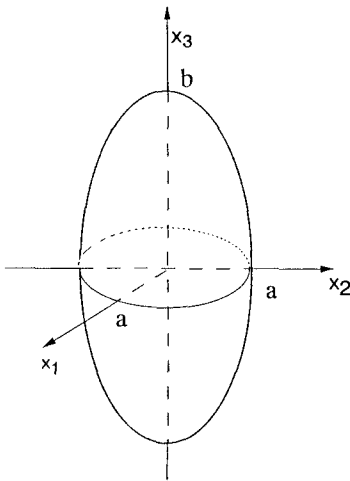


Fig.4 Ellipsoidal surface with revolutionary symmetry.

Table3 Phase shifts δ_l ($l = 0, 1, 2, \dots$) for ellipsoid of revolution ($b/a = 1/2$).

l	$ak=0.1$ δ_l	$ak=0.5$ δ_l
0	-4.60E+0	-2.35E+1
1	-5.84E-2	-6.89E-1
2	E-4	-8.39E-2
3	E-7	-1.98E-3
4	E-8	E-4

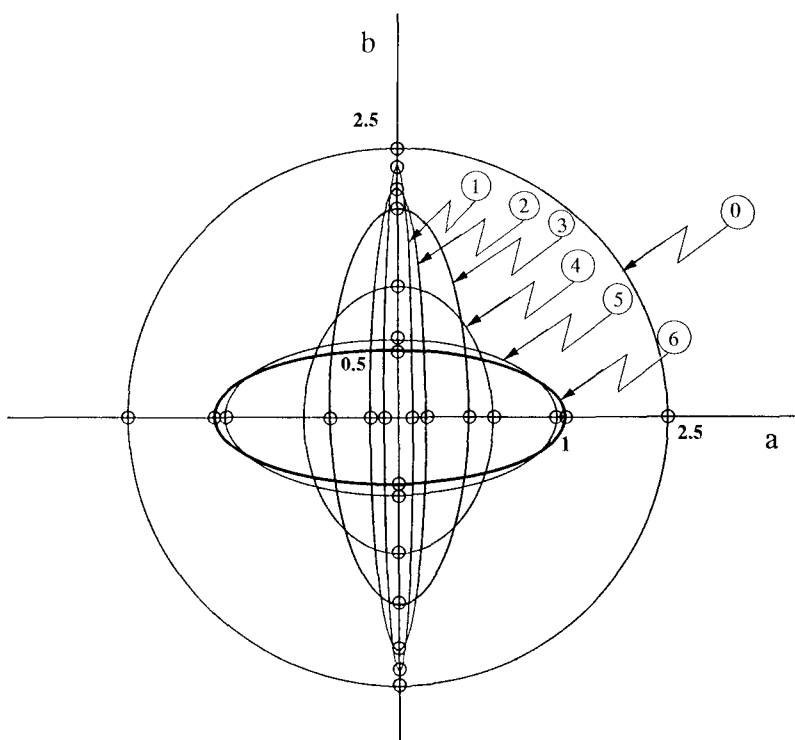


Fig.5 Convergence process for ellipsoid of revolution with $a = 1, b = 0.5$
(Initial parameters: $a^0 = b^0 = 2.5$).

6. おわりに

超音波による非破壊評価への応用を目的として、欠陥により散乱された散乱波動が有する位相情報に着目し、散乱全波動場の入射波に対する位相シフト量を求める積分表現を導いた。この積分表現は、波動の伝播媒質が音場という制限はつくものの、任意形状の3次元散乱体について成立し、位相シフト量が入射波の波数、散乱体の形状、散乱体表面上の境界条件などによって決まることを表している。この位相シフトに関する積分表現の応用として、入射波の波数および散乱体表面上の境界条件が既知の場合、遠方散乱場の位相シフト量が与えられたときの、散乱体形状の一推定法について考えた。この結果より、ここで導いた散乱全波動場の位相シフト量は、散乱体の形状推定に利用できることが示された。

今後、実験との対応、本手法の弾性波動問題への拡張など、より現実的問題への応用を考えながら、散乱波動が有する位相情報をより有効に活用する方法について検討したい。

参考文献

- 1) Thompson, R.B. and Thompson, D.O.: Ultrasonics in nondestructive evaluation, Proc. IEEE, Vol.73, pp.1716-1755, 1985.
- 2) 砂川重信: 理論電磁気学, 第2版, pp.230-248, 紀伊国屋書店, 1964.
- 3) Goldberger, M.L. and Watson, K.M.: Collision Theory, John Wiley & Sons, 1964.
- 4) Gubernatis, J.E., Domany, E. and Krumhansl, J.A.: Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials, J. Appl. Phys., Vol.48, pp.2804-2811, 1977.
- 5) Watson, G.N.: A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 2nd Ed., Cambridge Univ. Press, 1966.

(1991年9月30日受付)