

接触条件を考慮したクラックによる波動散乱問題

ELASTIC WAVE SCATTERING BY A CRACK WITH A CONTACT CONDITION

廣瀬壮一*

By Sohichi HIROSE

This paper is concerned with the scattering problem of an elastic wave by a penny-shaped crack with a contact condition. Dynamic contact phenomena may occur on the crack faces which are in advance opened by a small amount when the crack is subjected to the incident wave with a large amplitude. The problem is a boundary-type nonlinear problem, which is solved by using a time-domain boundary integral equation method. Scattered waves at far-field are investigated as well as near-field solutions. It is found that scattered waves by a crack with a contact condition include the higher harmonics, which are not found in the corresponding linear solution.

1. まえがき

従来、クラックによる波動散乱問題の多くは、クラック面が応力ゼロの仮定の下で解析されてきた¹⁾。しかしながら、現実のクラックは、このような仮定を必ずしも満足するものばかりではない。静的釣り合い状態にあるクラックの開口変位が非常に小さい時に、大きい振幅を持った波動が入射する場合にはクラック面において動的接触が発生する可能性がある。例えば、工学的に重要な疲労クラックは一般にその開口変位が非常に小さい。このようなクラックを超音波法を用いて非破壊的に特徴づけようとするときには、クラック面での接触・剥離現象が非破壊評価の精度に何らかの影響を及ぼす可能性がある。また、接触条件を考慮したクラック問題はある種の非線形問題であるので、線形問題には見られなかった散乱挙動を示すことが考えられる。そのような特徴的な散乱現象を用いて逆解析的にクラック面での状態を推定することが可能ではないか。このような背景の下で、本研究は時間域積分方程式法を用いて、接触条件を有するクラックによる波動散乱問題を解析するものである。

クラックによる波動散乱問題において接触条件を考慮したとき、その問題は境界型の動的非線形問題となる。すなわち、クラックを含む固体そのものは常に線形弾性体であるが、クラック面での境界条件は非線形性を示す。したがって、この問題に対して、重ね合わせの原理に基づく周波数域での解析を適用することはできない。ここでは、直接、時間域における境界積分方程式を各時間ステップごとに非線形境界条件を満足させながら時間ステップを進めて解析を行なう。具体的には、3次元円板状クラックに平面P波が入射した

* 工博 岡山大学助手 工学部土木工学科 (〒700 岡山市津島中3-1-1)

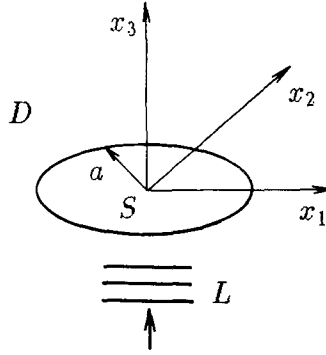


Fig.1 Scattering of an elastic wave by a penny-shaped crack.

ときのクラックによる散乱問題を解析した。クラック近傍における挙動のみならず、遠方場での散乱波動の性質について詳細な検討を行なう。

2. 問題

3次元無限弾性体 D における円板状クラック S を考える (Fig.1 参照)。領域 D は均質等方線形弾性体であると仮定する。その時、全変位場 $\underline{u}$ は次の波動方程式を満足する。

$$c_T^2 \nabla \cdot \nabla \underline{u} + (c_L^2 - c_T^2) \nabla \nabla \cdot \underline{u} = \ddot{\underline{u}} \quad (1)$$

ここに、 c_T 、 c_L はそれぞれ横波、縦波の波速を表わし、ドットは時間に関する微分を示す。さて、クラック S は初期状態 ($t < 0$) において $\hat{u}_i^\infty = \delta_{i3} \pi (1 - 2\nu) / 8(1 - \nu)^{-2} \hat{u}_0 x_3 / a$ (ν : ポアソン比、 a : クラック半径、 $\hat{u}_0$: クラック中央での静的開口変位) なる静的線形変位場にあると仮定する。この時、クラックは次式で与えられる静的開口変位を示す。

$$[\hat{u}_i(\underline{x})] = \delta_{i3} \hat{u}_0 (1 - (x_1^2 + x_2^2)/a^2)^{1/2}. \quad (2)$$

$t \geq 0$ において、クラックには次式で表わされる平面 P 波が入射するものとする。

$$\bar{u}_i(\underline{x}, t) = \delta_{i3} \bar{u}_0 \sin \left(\frac{2\pi (c_L t - x_3)}{T} \right) H(c_L t - x_3) \quad (3)$$

ここに、 T は無次元化された周期、 $\bar{u}_0$ は入射波の振幅、 $H(\cdot)$ は Heaviside ステップ関数である。以上のような仮定の下で、全変位場 $\underline{u}$ は次のように表わすことができる。

$$\underline{u} = \hat{\underline{u}} + \bar{\underline{u}} + \underline{u}^{sc} \quad (4)$$

ここに、 $\hat{\underline{u}}$ は初期の静的釣り合い状態における変位、 $\bar{\underline{u}}$ は入射波による変位、 $\underline{u}^{sc}$ は入射波とクラックの相互作用による散乱波変位を表わす。特に、クラック面上での全開口変位 $[u]$ は、 $[\bar{u}] = 0$ より

$$[u] = [\hat{u}] + [u^{sc}] \quad (5)$$

と表わせる。

従来のクラック解析の多くは、クラック面が応力ゼロであるという条件で行なわれてきた。この時、Fig. 1 に示す円板状クラックに対する境界条件は次式のように与えられる。

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{on } S \quad (6)$$

ここに、 σ_{ij} は全波動場の応力成分を表わす。本研究では式(6)に代わって、次のような接触を考慮した境界条件を用いた。

$$\begin{aligned} [u_3] &\neq 0, \quad \sigma_{33} \neq 0, \quad \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0 \quad \text{on } S \\ \sigma_{33} &= 0 \quad \text{on } S_t \\ [u_3] &= 0 \quad \text{on } S_u = S \setminus S_t \end{aligned} \quad (7)$$

上式において S_u と S_t はそれぞれクラック面の接触部分と非接触部分を表わす。

問題は、境界条件(7)、初期条件 $u(x, t)|_{t=0} = \hat{u}(x)$, $x \in D$ 、および遠方での放射条件の下で、偏微分方程式(1)を解くことに帰着される。なお、式(7)に示すように、クラック面上での接線方向の摩擦はないと仮定している。また、ここでは、クラック面に垂直にP波入射を受ける平面クラックを考えている。したがって、法線方向の変数は接線方向の変数と独立になり、 $[u_3]$ と σ_{33} を関係づける式を構成すれば、問題が解けることに留意されたい。簡単のために、以下においては $[u_3]$ と σ_{33} をそれぞれ $[u]$ と σ によって略記する。

3. 数値解法

上述したように、境界条件は非線形であるが、領域 D そのものは常に線形性を保っている。このような問題に対しては、境界積分方程式法を効率的に用いることができる。すなわち、領域 D 内の波動場に対しては線形のクラック問題と全く同様に境界積分方程式を定式化することができるのである。そこで、境界条件(7)を考慮して、トラクション公式を用いると次式を得る。

$$-\bar{\sigma}(x, t) = p.f. \int_S W(x - y, t) * [u(y, t)] dS_y \quad x \in S_t, \quad t \in [0, \infty) \quad (8)$$

$$\sigma(x, t) - \bar{\sigma}(x, t) = \int_S W(x - y, t) * [u(y, t)] dS_y \quad x \in S_u, \quad t \in [0, \infty) \quad (9)$$

ここに $\bar{\sigma}$ は式(3)で与えられる入射波による応力の法線成分を表わし、*は時間に関する合成積、 $p.f.$ は積分の有限部分を表わす。また、式(8)、(9)において W は次式で定義される積分核を表わす。

$$W(x - y, t) = -C_{33kl} C_{33pq} \frac{\partial^2}{\partial x_l \partial x_q} G_{kp}(x - y, t) \quad (10)$$

ここに、 C_{ijkl} は弾性テンソルを示し、 G_{kj} は次式で示される基本解である。

$$\begin{aligned} G_{kj}(x, t) = & \frac{1}{4\pi\rho|x|} \left\{ \left(\frac{3x_k x_j}{|x|^2} - \delta_{kj} \right) \int_{c_L^{-1}}^{c_T^{-1}} \chi \delta(t - \chi|x|) d\chi \right. \\ & \left. + \frac{x_k x_j}{|x|^2} \left[\frac{1}{c_L^2} \delta(t - |x|/c_L) - \frac{1}{c_T^2} \delta(t - |x|/c_T) \right] + \frac{\delta_{kj}}{c_T^2} \delta(t - |x|/c_T) \right\} \quad (11) \end{aligned}$$

ここに、 $\delta(\cdot)$ はDiracのデルタ関数、 ρ は密度を表わす。

式(8)と(9)を選点法を用いて離散化すれば、 $[u]$ あるいは σ を未知数とする非線形連立方程式系を構成することができる。時間軸を微小間隔 Δt に等分割し、クラック面を Q 個の小要素に分割したとする。時刻 $t = M\Delta t$ において以下の離散式を得る。

$$\begin{bmatrix} \tilde{W}^0 & 0 \\ \tilde{W}^0 & -\mathbf{1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u]^M \\ \tilde{\sigma}^M \end{Bmatrix} = - \sum_{m=1}^{M-1} \begin{bmatrix} \tilde{W}^{M-m} \\ \tilde{W}^{M-m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} [u]^m \\ \tilde{\sigma}^m \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}^M \\ \tilde{\sigma}^M \end{Bmatrix} \quad (12)$$

ここに、 $\mathbf{1}$ は単位マトリックスであり、 $[u]^m$ や $\tilde{\sigma}^M$ の上添字 m 、 M は時間ステップを表わす。また、 $\tilde{W}^{M-m}$ は次式で定義されるマトリックス成分を示す。

$$(W)_{pq}^{M-m} = \int_{S_q} \int_{(m-1)\Delta t}^{(m+1)\Delta t} W(x_p - y, M\Delta t - \tau) \phi_q(y) \eta_m(\tau) d\tau dS_y \quad (p, q = 1, \dots, Q) \quad (13)$$

ただし、 x_p ($p=1, \dots, Q$) はフィールド点である。また、 ϕ_q は q 番目の要素上の開口変位 $[u]$ に対する空間的内挿関数であり、 η_m は時刻 $t=m\Delta t$ での開口変位に対する時間に関する内挿関数を表わす。後で示す解析例においては、 $[u]$ を時間に関しては一次関数で表わし、空間に関してはクラック先端に位置する要素を除いて一定要素によって近似した。クラック先端の要素に対しては、開口変位を $\sqrt{\varepsilon}$ (ε : クラック先端からの距離) の分布形を持つ静弾性問題の解によって内挿した。

フィールド点が S_u の領域に属するか、 S_t の領域に属するかは、あらかじめ確定したものではなく、各時間ステップにおいて境界条件(7)が満足されるように決定される。この意味において、式(12)は非線形である。したがって、各々の時間ステップにおいて解の収束のための繰り返し計算が必要となる。実際の計算における解の収束性はかなり速く、各時間ステップにおいて多くとも3回程度の繰り返し計算で安定した解が得られた。なお、積分核の具体的な表現や超特異性の取り扱いについては文献2)を参照されたい。また、具体的な数値計算のためのアルゴリズムについては文献3)を参照されたい。

一度、式(12)よりクラック開口変位 $[u]$ が決定されたならば、その解を次式で与えられる散乱波の積分表現に代入することにより、任意点の散乱波を計算することができる。

$$u_k^{sc}(x, t) = \int_S C_{33pq} \frac{\partial}{\partial y_q} G_{kp}(x - y, t) * [u(y, t)] dS_y \quad x \in D \quad (14)$$

特に、 $|x| \gg |y|$ での遠方における散乱波は、 $|x - y| \approx |x| - \hat{x} \cdot y$ ($\hat{x} = x/|x|$) なる近似を式(14)に導入することにより、かなり簡潔に書き下すことができる²⁾。例えば、遠方散乱波の縦波成分 u_L^{sc} は次のように書ける。

$$u_L^{sc}(x, t) = \frac{1}{4\pi|x|} \Omega_L(\hat{x}, t - |x|/c_L) \quad (15)$$

ただし、 Ω_L は次式で与えられる遠方場での縦波振幅である。

$$\Omega_L(\hat{x}, t - |x|/c_L) = \frac{c_L^2}{c_t^3} \left(\frac{c_L^2}{c_t^2} - 2 + 2\hat{x}_3\hat{x}_3 \right) \int_S [\dot{u}(y, t - |x|/c_L + \hat{x} \cdot y/c_L)] dS_y \quad (16)$$

4. 解析例

数値計算において用いた様々なパラメータは以下の通りである。時間刻み幅は $c_\tau t/a = 0.05$ とし、円形のクラック面は452個の四角形要素に分割した。なお、ここでの問題は軸対称問題であるので、その対称性を利用して12個の独立なフィールド点のみを考慮して、解くべきマトリックスの次元を減少させている。なお、四角形要素は軸対称問題には相容れないものであるが、今後の一般的問題への応用を考慮してここでは近似的に四角形要素を用いた。また、弾性体のポアソン比は0.25とし、入射波の振幅 $\bar{u}_0$ と初期の静的開口変位 $\hat{u}_0$ の比は1とした。さらに、入射波の周期は $T=3$ とした。

Fig.2(a)はクラックのほぼ中央 ($r=0.05a$) におけるクラック開口変位の散乱波成分 (動的部分) $[u_3^{sc}]$ と垂直応力 σ_{33} の経時変化を示したものである。 $[u_3^{sc}]/\hat{u}_0 = -0.9987$ の時、すなわち、全開口変位が0とな

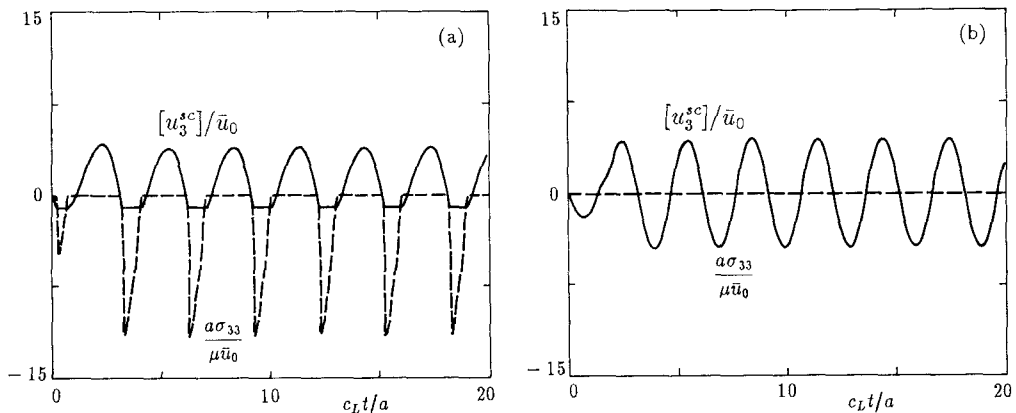


Fig.2 Time variation of the crack-opening displacement and the normal stress at $r/a=0.05$;
(a): crack with a contact condition, (b): stress-free crack.

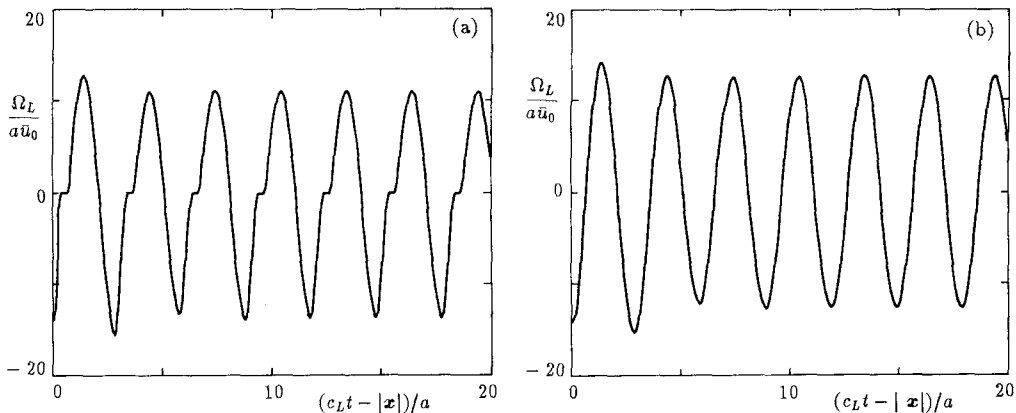


Fig.3 Far-field longitudinal amplitude Ω_L of the backscattered wave as a function of time;
(a): crack with a contact condition, (b): stress-free crack.

る時、クラック面で接触が始まり、それと同時に垂直応力 σ_{33} が鋭いピーク値を示している。その後、応力値はしだいに減少し、クラック面が離れると同時に垂直応力も0となる。第1周期 ($0 < c_L t/a < 3$) においては開口変位、応力共に過渡的な挙動を示すが、第2周期目以降 ($c_L t/a \geq 3$) は非線形性を保ちつつも、 $T=3$ なる周期性を持つ定常的な応答を示していることがわかる。Fig.2(b)は、接触条件を考慮せずに、常にクラック面での応力がゼロという仮定で行なった線形解析の結果である。Fig.2(a)と同様に、開口変位 $[u_3^{sc}]$ と垂直応力 σ_{33} の経時変化を示している。Fig.2(a)に比べて、開口変位は滑らかな挙動を示し、当然ながら、応力は常にゼロとなっている。また、第2周期目以降は、Fig.2(a)の非線形の場合と同様、周期 $T=3$ なる定常応答を示している。

Fig.3(a)、(b)は、それぞれFig.2(a)、(b)に対応して、入射方向の遠方での散乱波（いわゆる、backscattered wave）の縦波振幅 Ω_L （式(16)参照）の経時変化を示している。Fig.3(a)における階段的挙動はクラック閉口の影響であると考えられる。これらの図より遠方での散乱波も第2周期目以降は周期 $T=3$ の定常的応答を示すことがわかる。

遠方での散乱波動の性質をもう少し詳細に検討するために、Fig.3における第2周期目以降の定常的応答部分のフーリエ振幅 $|\tilde{\Omega}_L|$ をFFTを用いて求めた。結果を、Fig.3(a)、(b)に対応して、Fig.4(a)、(b)に示す。

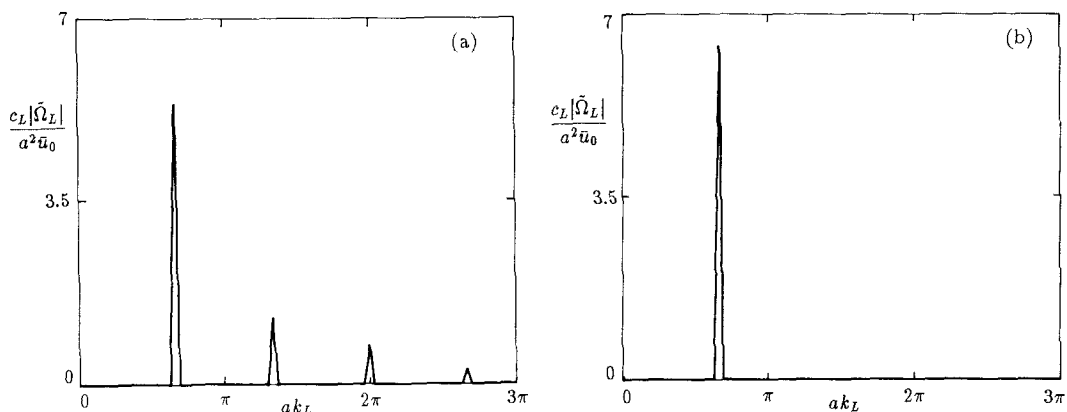


Fig.4 Fourier amplitude of the backscattered wave at far-field as a function of wavenumber;
(a): crack with a contact condition, (b): stress-free crack.

Fig.4(b)からわかるように、クラック面での接触を考慮しない場合には、入射波（周期 $T=3$ 、波数 $ak_L=2/3\pi$ ）と同じフーリエ成分しか存在しないことがわかる。これは、問題が線形であるがゆえの当然の結果である。一方、クラック面の接触を考慮したFig.4(a)においては、入射波の波数に対応する $ak_L=2/3\pi$ のみならず、より高周波域においてもフーリエ成分が存在することがわかる。しかも、その高周波成分は、入射波の波数の整数倍 $ak_L=n \times 2/3\pi$ ($n=1,2,\dots$) においてのみ発生していることがわかる。これは、いわゆるHigher Harmonics⁴⁾と呼ばれるもので、非線形波動に特有の性質を示している。

5. おわりに

本研究では、時間域境界積分方程式法を用いて接触を考慮したクラックによる波動散乱問題を解析した。クラック近傍における動的挙動のみならず、遠方場での散乱波動の性質について詳しく検討を行なった。接触を考慮しない線形問題の解との比較により、接触を考慮したクラックからの散乱波はHigher Harmonicsと呼ばれる入射波には含まれない高周波成分を有することがわかった。Higher Harmonicsの工学的な有用性については今後の検討を必要とするが、その性質を利用して疲労クラックの開口量の推定などへの応用が考えられる。

参考文献

- 1) 廣瀬壮一、定量的非破壊評価 (QNDE) とフラクチャーメカニクス、構造工学論文集、Vol.35A、pp.269-278、1989.
- 2) S.Hirose and J. D. Achenbach, Time-domain boundary element analysis of elastic wave interaction with a crack, Int. J. Num. Meth. Eng., Vol.28, pp.629-644, 1989.
- 3) 廣瀬壮一、クラックの動的接触問題、土木工学における非破壊評価シンポジウム講演論文集、1991.
- 4) Achenbach, J. D., O. K. Parikh, Ultrasonic detection of nonlinear mechanical behavior of adhesive bonds, in D. O. Thompson and D. E. Chimenti (eds.), Review of Progress in Quantitative Nondestructive Evaluation Vol.10B, Plenum Press, New York, pp.1837-1844, 1991.

(1991年9月30日受付)