

周期亀裂を含む亀裂損傷体の平均弾性について

ON OVERALL ELASTICITY OF SOLID DAMAGED BY PERIODICALLY DISTRIBUTED CRACKS

堀 宗朗* 三浦 尚**

by Munee HORI and Takashi MIURA

This paper seeks an analytical approach to evaluate effects of the arrangement of microcracks on the loss of elasticity of a damaged solid. The crack arrangement is modeled by an oblique periodic structure, which has not been fully studied since boundary conditions cannot be prescribed. With the aid of previous researches, the oblique periodic structure problem can be formulated in a general manner. And the overall elasticity of a solid damaged by oblique periodic distribution of cracks can be computed. Results of numerical computation suggest that the crack arrangement is of less importance.

1. 序

内部に微小亀裂が発生する場合、発生した微小亀裂の形状や配置等によって、材料の弾性が大きく変化することが知られている。例えば、岩盤・岩石のような地盤材料¹⁾では、内部亀裂が弾性の低下や異方性に及ぼす影響は大きい。また、コンクリート²⁾や金属³⁾には、微小亀裂の発生に起因して弾性等が低下し、劣化を生じることがある。したがって、亀裂によって損傷を受けた材料の挙動や劣化をより正確に予測するためには、材料内部の亀裂の発生状況を基にした弾性の低下の予測が必要であると思われる。

破壊力学やマイクロメカニクス理論の発展に伴い、適当に分布した亀裂群を含む亀裂損傷体の平均弾性の推定がなされている（既存の研究は参考文献4)を参照）。このような解析では、平均弾性が亀裂の配置によって決定される亀裂間の相互作用の影響を受けることが指摘されている。実際の材料において亀裂配置をコントロールすることが困難であるため、理論解析として亀裂の周期的な分布を仮定したいくつかの試みがなされているが⁵⁾、一般的な3次元を設定した解析はされていない。そこで、本論文では、亀裂配置が弾性に及ぼす影響を調べるために、周期亀裂群を含む材料の平均弾性の解析方法を検討することを目的とする。

周期構造と3次元周期亀裂群問題に関して得られた知見^{6),7)}を基に、斜交周期構造を用いて、より一般的な3次元亀裂配置を考える。ここで、斜交周期構造とは、図1が示すように、周期性が直交しないベクトルによって表されるものである。後述するように、周期性が直交するベクトルによって与えられる通常の直

* Ph.D. 東北大学講師 工学部土木工学科 (〒980 宮城県仙台市青葉区青葉)

** 工博 東北大学教授 工学部土木工学科 (〒980 宮城県仙台市青葉区青葉)

交周期構造と異なり、斜交周期構造は境界条件が不定となるため、著者らの知る限り、一般的な解析手法が確立されていない。

本論文は次のように構成される。第2章では斜交周期構造弾性問題の一般的な定式化を示し、それを基に斜交周期構造の物理場のフーリエ級数展開が見かけ上直交周期構造の場合と同じであることが第3章で証明される。最後に、第4章において周期亀裂群を含む材料の平均弾性が解析され、簡単な例題の数値計算の結果を用いて、亀裂配置が平均弾性に及ぼす影響が検討される。

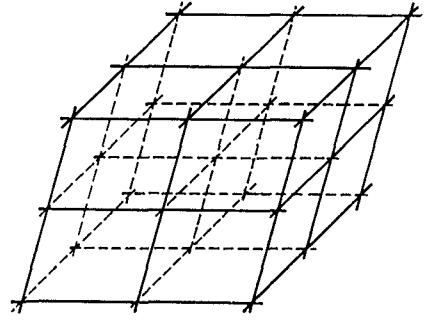


図1 斜交周期構造

2. 斜交周期構造の数学的性質

3次元斜交周期構造を v とし、 $\{2L^i\}$ をその斜交周期ベクトルとする。斜交周期ベクトルによって、単位体 u は、 $\{x \mid x = \sum X_i L^i, -1 < X_i < 1\}$ として与えられる。1辺の長さが2である立方体の単位体 $U \equiv \{X \mid -1 < X_i < 1\}$ を持つ直交周期構造を V とし、 $\{e_i\}$ と $\{E_i\}$ を v と V の直交基底ベクトルとすると、 V から v の線形変換 L は次のように定義される。

$$L \equiv L^i \otimes E_i \equiv (L^i)_j e_j \otimes E_i; \quad x = L \cdot X. \quad (2.1a)$$

なお、本論文では、 $\otimes$ 、 $\cdot$ 、 $:$ はテンソル積、1次と2次のコントラクションを示す。式(2.2a)の逆は

$$1 \equiv \{(L^i)_j\}^{-1} E_j * e_i; \quad X = L^{-1} \cdot x = 1 \cdot x \quad (2.1b)$$

で与えられる v から V への線形変換である(図2)。

斜交周期構造 v 内の周期場 $f(x)$ が満足する周期性を以下のように決定する。任意の整数 N_i に対して、

$$f(x+d) = f(x), \quad d = \sum 2N_i L^i. \quad (2.2)$$

式(2.1)の L または 1 によって、 v の場 $f(x)$ は、 V の場 $F(X)$ に次のように変換される。

$$\begin{aligned} F(X) &\equiv F(1 \cdot x) \equiv f(L \cdot X) \\ &\equiv f(x). \end{aligned} \quad (2.3)$$

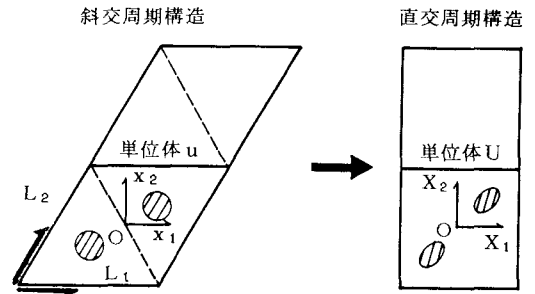


図2 斜交周期構造から直交周期構造への変換

式(2.2)の周期性を $f(x)$ が満足すれば、定義式(2.3)により、 $F(X)$ は任意の整数 N_i に対して、

$$F(X+2N) = F(X), \quad N = N_i E_i \quad (2.4)$$

を満足する。ここで、 N は V 内のベクトルであるから、式(2.2)の d は $2N$ の L による像と見なせる。

上記の結果を用いて、斜交周期構造 v の弾性問題を考える。 v の周期(不均一)弾性場を $c'(x)$ とし、 v の変位場、歪場、応力場を各々、 $u(x)$ 、 $\varepsilon(x)$ 、 $\sigma(x)$ とする。この物理場は、

$$\nabla_x \cdot \sigma(x) = 0, \quad \varepsilon(x) = \text{sym} \{ \nabla_x \otimes u(x) \}, \quad \sigma(x) = c'(x) : \varepsilon(x), \quad (2.5)$$

を満足する。式(2.5)は、弾性問題の場の支配方程式である平衡式、歪一変位関係式、構成則である。ここ

で、 $\nabla_x \equiv (\partial/\partial x_i) \mathbf{e}_i$ であり、 sym は 2 階のテンソルの対称部分を表す。

式(2.3) の線形変換によって v の物理場は、 V の場である、 $C'(X) = c'(x)$ や、 $U(X) = u(x)$ 、 $E(X) = \varepsilon(x)$ 、 $\Sigma(X) = \sigma(x)$ 、に写される。また、 ∇_x は $1 \cdot \nabla_x$ となるから、式(2.4) は、

$$\begin{aligned} (1 \cdot \nabla_x) \cdot \Sigma(X) &= 0, \quad E(X) = \text{sym} \{ (1 \cdot \nabla_x) \otimes U(X) \}, \\ \Sigma(X) &= C'(X) : E(X), \end{aligned} \quad (2.6)$$

となる。すなわち、周期ベクトル $\{L^i\}$ を持つ斜交周期構造の弾性問題において、①物理場は、 1 によって直交周期構造の場に変換され、②場の支配方程式は、 ∇ を $1 \cdot \nabla$ で置換した直交周期構造の場の式(2.6)に変換される。この直感的に当然な結果は、境界条件を考える際に重要な役割を果たす。

斜交周期構造 v の弾性問題において、単位体 u の境界条件は、線形変換 1 によって、直交周期構造 V の単位体 U の境界条件に変換される。直交周期構造の単位体では、場所についての適当な対称性が物理場に仮定されれば、簡単な変位と応力の混合境界条件を満たすことが証明されている⁶⁾。これは、

(*) 弾性場が場所についての適当な対称性を満足する時、ある対称性を満足する変位場に対応し、かつ、場の方程式を満たす歪場・応力場は、変位場と同じ対称性を満たす

ということから導かれている。なお、場所に関する対称性はテンソル場の鏡像対称・非対称性として数学的に厳密に定義されており、補にその概略を示す。

式(2.5) と異なり、式(2.6) で与えられる V の場の式は、 ∇ に重み 1 がついているため、(*) が成立しない。したがって、同一の場所に関する対称性を満足する V の場は、場の式(2.6) を満足しない(補参照)。その結果、単位体 U の境界での変位や応力の境界条件を決定することはできなくなる。

従来、直交周期構造の弾性問題は、物理場の対称性を仮定することで、単位体の境界値問題として扱われる。しかし、一般の斜交周期構造の弾性問題は、直交周期構造の問題への変換が可能ではあるものの、変換された単位体の境界条件を決定することができない(著者には、この原因のために斜交周期構造問題の解析がされていなかったように思われる)。一方、一般的な周期構造の弾性問題は、物理場を一定の値をとる一様場と体積平均が 0 の周期場に分解し、与えられた一様場に対応する周期場を求める問題として定式化される⁶⁾。この定式化は、斜交周期構造にも適用される。したがって、単位体の境界条件を与えることなく、斜交周期構造の弾性問題を考えることが可能である。

3. 斜交周期構造の周期場のフーリエ級数展開

前章で導入された線形変換 L ないし 1 を用いて、斜交周期構造 v の物理場は、直交周期構造 V の場に変換される。さらに、 v の物理場が式(2.2) で与えられる周期性を満足すれば、変換された V の場は式(2.4) で与えられる周期性を満足する。したがって、例えば、周期変位場 $u(x)$ の変換 $U(X)$ は次のように直交周期構造の単位体 U においてフーリエ級数展開される。

$$U(X) = \sum_{N \neq 0} \mathcal{F} U(N) \exp(i \pi N \cdot X). \quad (3.1)$$

ここで、 U の体積平均を $\langle \rangle_U$ で表わすと、 $\mathcal{F} U(N) \equiv \langle U(X) \exp(-i \pi N \cdot X) \rangle_U$ である。

線形変換の定義により、式(3.1) は次のように変換される。

$$u(x) = \sum_{N \neq 0} \mathcal{F} u(N) \exp(i \pi N \cdot L \cdot x). \quad (3.2)$$

フーリエ係数 $\mathcal{F} u(N)$ は、 $u(x) \exp(i \pi N \cdot L \cdot x)$ の u での体積平均として与えられる。変換の線形性により、 $\langle U(X) \exp(-i \pi N \cdot X) \rangle_U \equiv \langle u(x) \exp(-i \pi N \cdot 1 \cdot x) \rangle_U$ が成立するため、2つのフーリ

エ係数、 $\mathcal{F}u(N)$ と $\mathcal{F}u(N)$ 、は一致する。なお、 U 内での $\exp(i\pi N \cdot X)$ の直交性により、 u 内での基底 $\exp(i\pi N \cdot l \cdot x)$ の直交性は満足される。すなわち、 $\langle \exp(i\pi N \cdot l \cdot x) \rangle_u = 1$ ($N = 0$) or 0 ($N \neq 0$) である。

式(3.2)の表現を簡単にするため、 $N \cdot l$ に対応して、 v 内のベクトル ξ を次のように定義する。

$$\xi \equiv \xi_j e_j \equiv \pi N \cdot l = (\pi N_i l_{ij}) e_j. \quad (3.3)$$

したがって、 $\partial \exp(i\pi N \cdot l \cdot x) / \partial x_i = i \exp(i\pi N \cdot l \cdot x) \xi_i$ となることから、 v の物理場の発散・勾配の $\exp(i\pi N \cdot l \cdot x)$ による展開は、その物理場の展開に ξ のテンソル積・コントラクションをとることで与えられる。例えば、変位場が式(3.2)で展開される場合、歪場は、

$$\varepsilon(x) = \sum_{N \neq 0} \text{sym} \{ \xi \otimes \mathcal{F}u(N) \} \exp(i\xi \cdot x).$$

となる。したがって、斜交周期場の弾性問題は、 $\exp(i\pi N \cdot l \cdot x) = \exp(i\xi \cdot x)$ によってフーリエ級数展開される場合、見かけ上、通常の直交周期構造問題と同一になる^{6), 7)}。これは、直交周期構造は、線形変換 l が $\Sigma(L_i)^{-1} e_i \otimes E_i$ で与えられる斜交周期構造の特別な場合であり、式(3.3)で与えられる ξ を用いて見かけ上 $\exp(i\xi \cdot x)$ によって、その場が展開されることから伺える。

4. 亀裂を含む斜交周期構造の平均弾性

亀裂群の配置が平均弾性に及ぼす影響を調べるため、亀裂を1つ含む単位体 u から構成され、周期ベクトル $\{L^i\}$ を持つ斜交周期構造 v を考える。媒質の弾性を C とする。亀裂は法線 n を持つ半径 a の円盤状とする。したがって、亀裂群は、 u の体積と a によって与えられる亀裂密度と、 $\{L^i\}$ と n によって決定される配置を持つことになる。斜交周期構造 v の平均弾性 $\bar{C}$ は、 u の平均応力と平均歪が $\langle \sigma \rangle_u$ と $\langle \varepsilon \rangle_u$ であれば $\langle \sigma \rangle_u = \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle_u$ によって定義される。さらに、場の周期性により $\langle \sigma : \varepsilon \rangle_u = \langle \varepsilon \rangle_u : \bar{C} : \langle \varepsilon \rangle_u$ が成立するため、この $\bar{C}$ は、 v の平均歪エネルギーも与えることになる。

第3章で得られた結果を基にすると、参考文献7)に示される方法を直接用いて、斜交周期分布をする円盤状亀裂群の問題を解くことが可能である。すなわち、①半径 a 、厚さ h の楕円体空隙が分布した斜交周期構造問題を等価介在物法によって解き、②円盤状亀裂の斜交周期構造を、楕円体空隙の $h \rightarrow 0$ の極限として求める、ということである。なお、等価介在物法とは、不均一弾性体の問題を、適当なアイゲン歪を含む均一弾性体の問題として解く手法である（詳細は参考文献8)を参照）。

等価介在物法を用いた場合、①で考えられる楕円体空隙 Ω を含む単位体の平均応力は、単位体の平均歪と平均アイゲン歪によって、次のように決定される。

$$\langle \sigma \rangle_u = C : (\langle \varepsilon \rangle_u - \langle \varepsilon^* \rangle_u) = C : (\langle \varepsilon \rangle_u - f \langle \varepsilon^* \rangle_\Omega). \quad (4.1a)$$

ここで、 $\langle \varepsilon^* \rangle_\Omega$ は Ω 内の平均アイゲン歪であり、 f は Ω の体積含有率である（アイゲン歪は Ω のみに分布している）。したがって、式(4.1a)に対して②で考えられた $h \rightarrow 0$ の極限を取ることで、斜交周期亀裂群の平均弾性 $\bar{C}$ は

$$\bar{C} : \langle \varepsilon \rangle_u = C : (\langle \varepsilon \rangle_u - \lim_{h \rightarrow 0} f \langle \varepsilon^* \rangle_\Omega) = C : (\langle \varepsilon \rangle_u - d \lim_{h \rightarrow 0} h \langle \varepsilon^* \rangle_\Omega) \quad (4.1b)$$

として与えられる。単位体 u の体積を u とすると、 d は $(3\pi/4)a^3/u$ で定義される亀裂密度である。

フーリエ級数展開によって、 $\langle \varepsilon^* \rangle_\Omega$ を計算することが可能である。さらに、式(3.3)で定義される ξ を使えば、参考文献7)の結果を直接用いることができる。その結果を式(4.1b)に適用することで、

$$\bar{\mathbf{C}}^{-1} = \mathbf{C}^{-1} + d \lim_{h \rightarrow 0} h \{ (1-hd) \mathbf{C} + \Lambda^P \}^{-1} \quad (4.2)$$

が得られる (参考文献7) では $\lim$ 内の $\mathbf{C}$ の係数 $(1-hd)$ が抜けている)。ここで、テンソル Λ^P は、媒質の弾性 $\mathbf{C}$ が等方的で $\lambda \delta \otimes \delta + 2\mu \mathbf{I}$ で与えられる場合、

$$\Lambda^P = (1-hd) \Lambda^{P0} + dh \sum_{N \neq 0} g^2(\Xi) \Delta \Lambda^P(\xi) \quad (4.3)$$

として定義されている。基底ベクトル $\{\mathbf{e}_i\}$ とは別に、亀裂の法線方向 $\mathbf{n}$ を $\mathbf{i}_3$ とする直交基底ベクトル $\{\mathbf{i}_i\}$ を取ると、テンソル Λ^{P0} の成分は、

$$\frac{2\mu}{1-\nu} \begin{pmatrix} \nu^2/(1-2\nu) & \nu^2/(1-2\nu) & \nu(1-\nu)/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & \nu^2/(1-2\nu) & \nu(1-\nu)/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & (1-\nu)^2/(1-2\nu) & 0 & 0 & 0 \\ & & & (1-\nu)/2 & 0 & 0 \\ \text{sym.} & & & & (1-\nu)/2 & 0 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

であり、テンソル $\Delta \Lambda^P(\xi)$ の成分は、

$$\frac{2\mu}{1-\nu} \begin{pmatrix} 2\bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_1 & (\bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2) - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_2 & -\nu \bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_3 & \nu \bar{\xi}_4 + \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_4 & \bar{\xi}_5 - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_5 & \bar{\xi}_6 - \bar{\xi}_1 \bar{\xi}_6 \\ & 2\bar{\xi}_2 - \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_2 & -\nu \bar{\xi}_1 - \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_3 & \bar{\xi}_4 - \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_4 & \nu \bar{\xi}_5 + \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_5 & \bar{\xi}_6 - \bar{\xi}_2 \bar{\xi}_6 \\ & & (\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2)^2 & \bar{\xi}_4 - \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_4 & \bar{\xi}_5 - \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_5 & \nu \bar{\xi}_6 + \bar{\xi}_3 \bar{\xi}_6 \\ & & & -(1-\nu) \bar{\xi}_1/2 - \bar{\xi}_4 \bar{\xi}_4 & (1-\nu) \bar{\xi}_5/2 - \bar{\xi}_5 \bar{\xi}_6 & (1-\nu) \bar{\xi}_6/2 - \bar{\xi}_4 \bar{\xi}_6 \\ \text{sym.} & & & & -(1-\nu) \bar{\xi}_2/2 - \bar{\xi}_5 \bar{\xi}_5 & (1-\nu) \bar{\xi}_4/2 - \bar{\xi}_4 \bar{\xi}_5 \\ & & & & & -(1-\nu) \bar{\xi}_3/2 - \bar{\xi}_6 \bar{\xi}_6 \end{pmatrix}$$

である。なお、 $\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_6$ は、 $\xi/|\xi|$ によって定義されたベクトル $\bar{\xi}$ によって作られるテンソル $\bar{\xi} \otimes \bar{\xi}$ の $\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1, \dots, \mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_2$ 方向の成分である。さらに、式(4.2) 内の右辺の Ξ と $g(\Xi)$ は、

$$\Xi \equiv |\mathbf{a} \cdot \xi|, \quad g(\Xi) \equiv 3\Xi^{-3} (\sin \Xi - \Xi \cos \Xi)$$

で定義される。ここで、2階のテンソル $\mathbf{a}$ は、 $\mathbf{a} (\mathbf{i}_1 \otimes \mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2 \otimes \mathbf{i}_2 + h \mathbf{i}_3 \otimes \mathbf{i}_3)$ で与えられる。

式(4.2) の結果は、アイゲン壺が空隙内で一様分布することを仮定することによって得られており、近似解である。しかし、数値計算によって、その仮定が良い近似を与えることが示されている⁹⁾。なお、亀裂の法線 $\mathbf{n}$ が $\mathbf{e}_3$ -方向に平行である直交周期構造の場合、テンソル $\Delta \Lambda^P(\xi)$ の無限和には、0 になる成分も多く、また、 $\Delta \Lambda^P(\xi)$ の ξ_1, ξ_2, ξ_3 に関する3重無限和が2重無限和に帰着する⁷⁾。

式(4.2) 内の3重無限和は収束するため、式(4.2) の右辺のテンソルの $h \rightarrow 0$ の極限が計算できる。したがって、 $\{\mathbf{i}_i\}$ の座標系にいては、例えば、

$$\mathbf{C}_{3333} + d \lim_{h \rightarrow 0} h \{ (1-hd) \mathbf{C} + \Lambda^P \}_{3333}$$

が計算できる。平均コンプライアンステンソル $\bar{\mathbf{D}}$ を $(\bar{\mathbf{C}})^{-1}$ として定義すると、上の項は、 $\{\mathbf{i}_i\}$ の座標系での $\bar{\mathbf{D}}_{3333}$ であり、亀裂面に垂直である $\mathbf{i}_3$ -方向の平均ヤング係数の逆数である。同様に、

$$\mathbf{C}_{2223, 3131} + d \lim_{h \rightarrow 0} h \{ (1-hd) \mathbf{C} + \Lambda^P \}_{2223, 3131}$$

も計算できるが、これは $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ -と $\mathbf{i}_3, \mathbf{i}_1$ -方向の平均剪断係数の逆数である。これら $3333, 2323, 3131$ 以外にも、亀裂の配置によっては 3323 と 3331 (2333 と 3133) の成分も0でなくなる。したがって、平均弾性 $\bar{\mathbf{C}}$

が亀裂法線方向を対称軸とするtransverse isotropyとは異なる異方性を示す場合がありうる。

以上の結果を用いて、亀裂法線方向の平均ヤング係数に及ぼす亀裂配置の影響の検討を試みる。これは、例えば、材料の微視構造の観察から得られる亀裂の分布状況（密度や配置）から、どのようなパラメータが弾性の低下に影響を与えるかをシミュレートすることに対応する。簡単のために、亀裂の半径を固定して、法線 $\mathbf{n}$ や周期ベクトル $\{\mathbf{L}_1\}$ を変えた場合の平均ヤング率の低下を調べる。亀裂の配向として、表 1 に示される 3 つの場合を考える。

表 1 亀裂面の配向

CASE	単位体	亀裂面の法線 $\mathbf{n}$	変数
I	長さ $2L$ の立方体	$\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2$ - 平面上	法線 $\mathbf{n}$ の方向 $\theta = \cos^{-1} (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) / \sqrt{2})$
II	長さ $2L$ の菱形の底面で高さ $2L$ の角柱	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ - 面上	菱形の 2 辺のなす角度 $\phi = \cos^{-1} (\mathbf{L}_1 \cdot \mathbf{L}_2 / \mathbf{L}_1 \mathbf{L}_2)$
III	長さ $2L$ の正方形の底面で高さ $2L$ の斜角柱	$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ - 面上	斜角柱の角度 $\phi = \cos^{-1} (\mathbf{L}_3 \cdot (\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) / \sqrt{2} \mathbf{L}_3)$

図 3 に 3 種類の斜交周期構造の亀裂法線方向の平均ヤング係数の低下に対する結果を示す。ヤング率の低下量は、 $d \lim_{h \rightarrow 0} h \{ (1 - h d) C + \Delta^P \}^{-1}$ で与えられるため、縦軸には、 $\mathbf{e}_3$ -方向に法線を持つ亀裂を持つ辺の長さ $2L$ の直交単位体からなる直交周期構造を規準とした場合のヤング率の低下量の比、 R 、が取られている。すなわち、

$$R = \frac{\lim_{h \rightarrow 0} h \{ (1 - h d) C + \Delta^P \}^{-1}_{3333}(\text{REFERENCE})}{\lim_{h \rightarrow 0} h \{ (1 - h d) C + \Delta^P \}^{-1}_{3333}(\theta \text{ or } \phi \text{ or } \phi)}$$

この規準状態は、3 種類のCASEにおいて、 $\theta/\pi = 0.5$ 、 $\phi/\pi = 0.0$ 、 $\phi/\pi = 0.5$ に対応する。

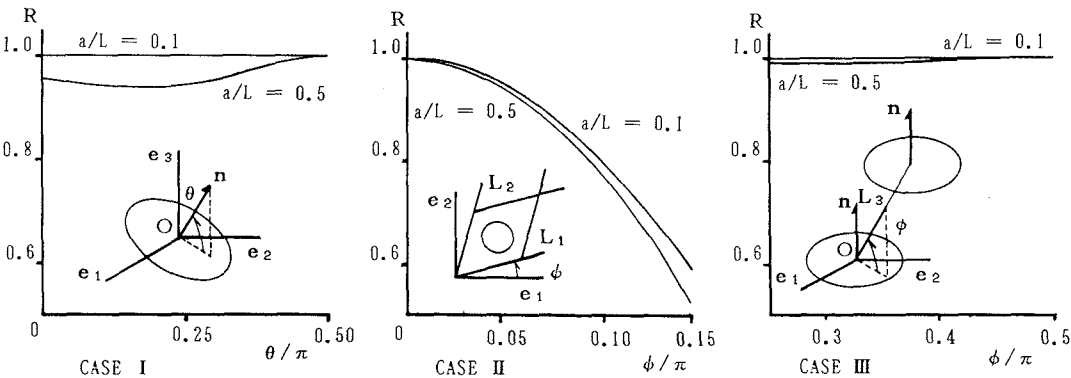


図 3 亀裂配置が平均弾性の低下に及ぼす影響

図から明らかなように、亀裂が小さい場合 ($a/L = 0.1$) も大きい場合 ($a/L = 0.5$) も、亀裂配置が弾性低下に及ぼす影響は、CASE II を除き、あまり顕著ではない。また、CASE II では、 ϕ の増加に伴い亀裂配置が変わるとともに、亀裂密度も増加する ($\phi/\pi = 0.15$ で $2/\sqrt{3}$)。したがって、実際の材料に亀裂が一定の方向に発生している場合、周期亀裂の配置に対応する亀裂の相対的な位置関係が、材料の弾性の低下に与える影響は、周期亀裂の亀裂密度に対応する単位体積中の亀裂の量の影響に比べて、小さいことが推定される。それ故、例えば、岩石の構造を観察し内部亀裂による弾性の低下等を推定する際、亀裂の位置関係よりも亀裂の量を測定することが重要であると考えられる。

本章で示された数値解析は、斜交周期亀裂問題を厳密な形で解いているため、テンソルの成分の和をとるだけのきわめて簡単なものであり、図3に示すような結果を容易に得ることができる。したがって、このような任意の周期分布を持つ亀裂群を持つ損傷体の平均弾性の推定に関して、本論文で示された解析方法は有効であると思われる。また、他の斜交周期構造の問題に関しても、同様な解析で厳密に解くことができるため、この手法が有効であると期待される。

5. 結論

斜交周期構造の問題を一般的な形で定式化することにより、斜交周期亀裂が材料の平均弾性の低下に及ぼす影響について解析が可能になった。その結果、斜交周期亀裂の配向が平均弾性に大きな影響を与えるが、その配置はさほどの影響を与えることがなく、実際の亀裂損傷体では、亀裂密度の測定が重要であることが示唆される。

本研究は、文部省科学奨励研究 (A) 02750397を受けて行なわれた。ここに記して感謝の意を表する。

参考文献

- 1) Oda, M., Suzuki, J., and Maeshibu, T.: Soils and Foundations, 24, 27-40 (1984).
- 2) 長谷川、藤原: 凍害、技報堂 (1988).
- 3) Broek, D.: Elementary Engineering Fracture Mechanics, Martinus Nijhoff (1974).
- 4) Hori, M. and Miura, T.: Structural Eng./Earthquake Eng. 8, 1-9 (1991).
- 5) 堀井、サカモト、奥井: 構造工学論文集、37A、459-464 (1991).
- 6) 堀 宗朗、三浦 尚: 構造工学論文集、36A、353-362 (1990).
- 7) 堀 宗朗、三浦 尚: 構造工学論文集、37A、443-450 (1991).
- 8) Mura, T.: Micromechanics of Defects in Solids, Martinus Nijhoff (1982).
- 9) Nemat-Nasser, S. and Iwakuma, T.: Comp. Structures, 16, 13-19 (1983).

補: テンソル場の鏡像対称・非対称性

位置ベクトル $\mathbf{x}$ について、 x_1 、 x_2 、 x_3 -平面での折返しをとることで、8つの位置ベクトル $\mathbf{x}^i$ が定義される ($((\mathbf{x}^i)_1, (\mathbf{x}^i)_2, (\mathbf{x}^i)_3) = (\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3)$)。上添字、 i は、 $\pm 1, \dots, \pm 4$ をとる。同様の折返しによって、 $\mathbf{x}$ を始点にするベクトル $\mathbf{v}$ についても、各々 $\mathbf{x}^i$ を始点にする8つのベクトル $\mathbf{v}^i$ が定義される。テンソル場 $T(\mathbf{x})$ の x_1 -平面に関する鏡像対称・非対称性を

$$T_{p\dots q}(\mathbf{x}^i)(\mathbf{v}^i)_p\dots(\mathbf{w}^i)_q = +T_{p\dots q}(\mathbf{x})v_p\dots w_q \text{ or } -T_{p\dots q}(\mathbf{x})v_p\dots w_q$$

によって定義する。3つの平面に関して鏡像対称・非対称性があり、 $T(\mathbf{x})$ は各々の面での鏡像対称・非対

称性を満足する8つのテンソル場、 $T^i(x)$ の和として定義される。 $T(x)$ について、その発散・勾配と、3つの平面について鏡像対称であるテンソル $S(x)$ とのコントラクションを、 $\nabla * T(x)$ と $(T * S)(x)$ によって表わすと、

$$(\nabla * T)^i(x) = \nabla * T^i(x), \quad (T * S)^i(x) = (T * S^i)(x)$$

が成立する。

上記の結果は、斜交周期構造にも適応することが可能である。これは、鏡像対称・非対称性は周期性とは全く別の数学的性質であり、両者は独立しているからである。したがって、斜交周期構造を線形変換した直交周期構造において、共通の鏡像対称・非対称性を満たす $U^i(X)$ 、 $E^i(X)$ 、 $\Sigma^i(X)$ が式(2.6)を満足するためには、 $C^i(X)$ と 1 が3つの X_i -平面について鏡像対称でなければならないことが導かれる。(鏡像対称・非対称性は、変換された直交単位体で考えられ、もとの斜交単位体では考える必要がないことに注意すべきである。)

(1991年9月30日受付)