

圧縮荷重下の脆性材料に関する連続体理論

A Continuum Theory for Brittle Materials under Compression

奥井義昭* 堀井秀之** 秋山成興***

By Yoshiaki OKUI, Hideyuki HORII and Narioki AKIYAMA

The objective of this study is to establish a micromechanics-based continuum theory, named Interaction Field Theory (IFT), which can reproduce localization phenomena, such as shear failure in rock or shear band formation of sand under compression. A new field variable (interaction tensor) that characterizes the interaction effect between local microstructures is introduced. Although the basic concept of the proposed theory is applicable to any material with microstructures, the theory is formulated for the behavior of rock under compressive stresses as an example. Numerical results are given that illustrate the difference between the proposed theory and the conventional continuum damage mechanics. It is confirmed that the proposed theory can describe the localization process of microdefects' evolution in shear failure and axial splitting of rock under compression.

1. はじめに

引張荷重下における脆性材料の破壊のように、単一あるいは複数のクラックの進展により材料の巨視的な破壊が支配される現象では、問題は単純であり、破壊力学のオーソドックスな手法により材料の強度等を評価出来る。しかし、岩石などの脆性材料の圧縮荷重下における挙動では、一般に多数のマイクロクラックの発生、局所化、巨視的破面の形成といった破壊プロセスをたどる。この場合、個々のマイクロクラックを破壊力学的手法により個別に取り扱う事は不可能であり何らかの巨視的な理論が必要になる。

そのような理論の一つとして損傷理論¹⁾⁻⁵⁾(Continuum Damage Mechanics)が挙げられるが、通常の損傷理論では圧縮荷重下における岩石のせん断面の形成や砂のせん断帯に見られるような変形の局所化および破壊時のパターンフォーメーションの過程が表現できないといった問題が生じる。変形の局所化および破壊モードの形成過程を表現できるか否かといった問題は材料の強度に直接関与する事から、この種の連続体理論の最も重要な点と言える。

そこで、本論文では変形(損傷)の局所化および破壊時のパターンフォーメーションが表現できる連続体理論の構築を目的とした。変形(損傷)の局所化を誘起するメカニズムとして微視構造間の相互干渉に着目し、これを取り込んだ連続体理論を構築する。具体的な問題としては圧縮荷重下の岩石等の脆性材料に関し微視構造モデルを考え定式化を行ったが、基本的な概念は他の微視構造を持つ材料にも適用可能である。本理論は連続体理論の範疇で定式化を行っているため、適用範囲は巨視的な破面が形成されるまでの破壊プロセスと考えられる。しかし、実際の岩石、砂などの2軸圧縮下の観察から、最大荷重が発現する時点においても巨

* 工修 埼玉大学助手 工学部建設基礎工学科 (〒338 埼玉県浦和市下大久保255)

** Ph.D. 東京大学助教授 工学部土木工学科 (〒113 東京都文京区本郷7-3-1)

*** 工博 埼玉大学教授 工学部建設基礎工学科 (〒338 埼玉県浦和市下大久保255)

視的な破面が完全に形成されておらず、ややぼやけた状態となっているとの報告もあり、連続体理論による取扱いは最大荷重の評価などにおいて十分有効であると考ええる。

以下では、まず2章においてマイクロメカニクスを基礎とした通常の損傷理論による定式化を説明する。次に3章において今回提案する微視構造間の相互干渉効果を取り入れた連続体理論 (Interaction Field Theory, 以下 IFT) の定式化を行い、通常の損傷理論と提案する理論との差異について考察を加える。最後に、4章において数値計算結果を示し、本理論の有効性を検証する。

2. 圧縮荷重下の脆性材料の損傷理論

2.1 微視構造モデル

圧縮荷重下における脆性材料 (岩石など) の非弾性挙動は複雑であり、例えば破壊時の特徴としてダイラトンシーおよび巨視的な破壊モードが拘束圧に敏感である事が知られている。この種の挙動の原因として、荷重の増大に伴い、内部に存在する異質粒界やマイクロクラック等の初期欠陥上で摩擦滑りが生じ、これより局所的な引張クラックが発生、進展する事が報告されている。上記の非弾性挙動を材料内部の微視構造から説明する事を目的として、図 1(a) に示すモデル^{6),7)}が提案されている。同図において PP' は初期欠陥を表し、圧縮荷重により接触し摩擦力で抵抗しながら滑り変形を生じる。これより、初期欠陥の先端部 P, P' で引張応力が生じ、引張クラック $PQ, P'Q'$ が発生、進展することを表している。巨視的な非弾性歪は初期欠陥上でのせん断変形と、引張クラックの開口変位に起因する。岩石等の材料の圧縮荷重下での挙動を考える場合、図 1(a) のモデルが弾性体内に多数存在する場合について問題を設定すれば良いわけであるが、図 1(a) のモデルの解は数値的にしか得られず、連続体理論構築の基にするには適していない。

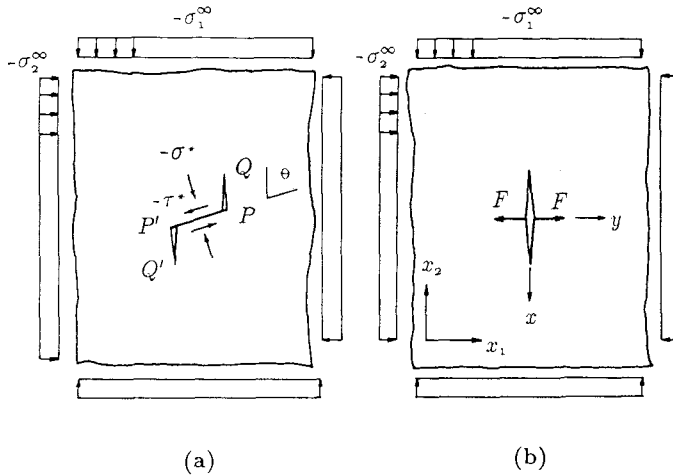


図-1 微視構造モデル

そこで、図 1(a) のモデルの代わりに図 1(b) に示す長さ $2l$ の直線クラックを考える⁸⁾。図 1(b) において、引張クラックの方向は最大圧縮応力 σ_1^∞ 方向と仮定し、クラックの中央部には初期欠陥上での滑り変形の影響を表す集中力 F が作用するものとする。ただし、集中荷重 F の大きさは初期欠陥 PP' 上に作用する垂直応力を σ^* 、せん断応力を τ^* とすれば、次式で与えられるものと仮定する。

$$F = 2c_0(-\tau^* + \mu\sigma^*) \sin \theta = -c_0(\lambda_1\sigma_1^\infty - \lambda_2\sigma_2^\infty) \quad \dots (1)$$

ここで、

$$\lambda_1 = \sin \theta \{ \sin 2\theta - \mu(1 - \cos 2\theta) \}, \quad \dots (2)$$

$$\lambda_2 = \sin \theta \{ \sin 2\theta + \mu(1 + \cos 2\theta) \} \quad \dots (3)$$

であり、 μ は初期欠陥上での摩擦係数、 θ は初期欠陥の方向を表す(図1(a)参照)。

2.2 支配方程式

この節では図1(b)で定義された微視構造モデルが材料内部に多数存在する場合について、マイクロメカニクスを基礎とする通常の損傷理論の定式化を行う。材料の内部では図1(b)の微視構造モデルが存在するため応力 σ 、歪 ϵ 等の力学量は非均一となっているが、これらの量について局所的な平均操作を行うことにより連続体モデルを構築する。具体的には図2に示すように材料内のある一点を考えると、その近傍に体積要素 V_e を定義し応力、歪などの量についてこの要素内での平均量を考える。以下では平均量は記号 $\hat{\cdot}$ を用いて表す事とし、これらの平均量に関しても、通常のつりあい式：

$$\nabla \cdot \hat{\sigma} = 0, \quad \dots (4)$$

および歪-変位関係式：

$$\hat{\epsilon} = \frac{1}{2}(\nabla \otimes \hat{u} + (\nabla \otimes \hat{u})^T) \quad \dots (5)$$

が成立するものと仮定する。

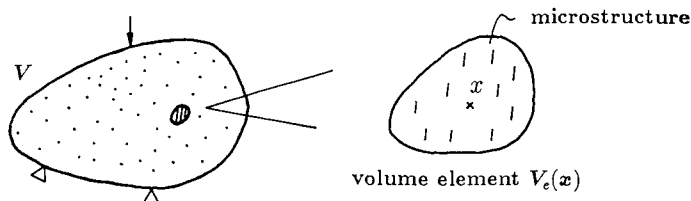


図-2 体積要素

このとき、平均応力 $\hat{\sigma}$ 、平均歪 $\hat{\epsilon}$ について次の関係が成立する⁹⁾。

$$\hat{\sigma} = D^e : (\hat{\epsilon} - \hat{\epsilon}^*), \quad \dots (6)$$

$$\hat{\epsilon}^* = \frac{1}{V_e} \int_S \frac{1}{2}([u] \otimes n + n \otimes [u]) ds \quad \dots (7)$$

ここで、 D^e は材料の基質部分の弾性テンソル、 $\hat{\epsilon}$ は全歪テンソル、 $\hat{\epsilon}^*$ はクラックの開口変位 $[u] \equiv u^+ - u^-$ によって生じる平均歪を表す。また、 n はクラック表面での法線ベクトル、積分区間 S は V_e 内の全てのクラック表面を表す。クラックの開口変位 $[u]$ は一般にはクラックの配置、密度等の関数となるが、平均応力によって次の形：

$$\hat{\epsilon}^* = C^* : \hat{\sigma} \quad \dots (8)$$

に表されたとすれば、(6)式を(8)式に代入し $\hat{\epsilon}^*$ について解けば次式が得られる。

$$\hat{\epsilon}^* = H : \hat{\epsilon} \quad \dots (9)$$

ここで、

$$H = (I + C^* : D^e)^{-1} : C^* : D^e \dots\dots\dots (10)$$

であり、 I は4階の単位テンソルを表す。(9)式を(6)式に代入すれば平均応力と平均歪の関係は次式で表される。

$$\hat{\sigma} = D^e : (I - H) : \hat{\epsilon} \dots\dots\dots (11)$$

2次元問題では、 $\hat{\sigma} = \{\hat{\sigma}_{11}, \hat{\sigma}_{22}, \hat{\sigma}_{12}\}^T$ 、 $\hat{\epsilon} = \{\hat{\epsilon}_{11}, \hat{\epsilon}_{22}, 2\hat{\epsilon}_{12}\}^T$ と置けば、 C^*, H, I, D^e などは 3×3 のマトリクスに縮約される。さらに、一般にはマトリクス C^*, H は微視構造の配置、分布などに依存し閉じた形での表示式を得る事は困難であるが、微視構造間の相互干渉を無視した場合、無限弾性体内に単一の微視構造モデル図1(b)が存在する場合について開口変位を計算すれば良く、次式となる。

$$\begin{aligned} H_{1i} &= \frac{2\rho l \{(\pi l + 2\lambda_2 c_0) D_{1i}^e + 2\lambda_1 c_0 D_{2i}^e\}}{E' + 2\rho l \{(\pi l + 2\lambda_2 c_0) D_{11}^e + 2\lambda_1 c_0 D_{21}^e\}} \quad (i = 1, 2), \\ H_{33} &= \frac{2\rho l^2 \pi D_{33}^e}{E' + 2\rho l^2 \pi D_{33}^e}, \quad \text{その他 } H_{ij} = 0 \end{aligned} \dots\dots (12)$$

ここで、 ρ は微視構造(クラック)の密度(単位面積当たりの微視構造の数)であり、 E' は平面応力に対し $E' = E$ 、平面歪に対し $E' = E/(1 - \nu^2)$ (E は基質部分のヤング率、 ν は同じくポアソン比)を用いる。

応力-歪関係(11)式は微視構造のある状態について求めたものであるから、次に密度 ρ 、長さ l などの量が荷重によってどのように変化するかを規定する損傷の発展則が必要になる。ここではクラックの密度は変化せず、クラックの長さが変化するものとする。このことは損傷パラメータとしてクラックの長さを採用する事に対応する。また、クラック進展の基準は線形破壊力学に従うものと仮定する。すなわち、クラック先端でのモードIでの応力拡大係数 K_I が材料の破壊靱性値 K_c に達した際にクラックが進展するものとする。

$$\begin{cases} f = K_I - K_c = 0 & ; \quad \delta l \geq 0 \\ f = K_I - K_c < 0 & ; \quad \delta l = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (13)$$

ここで、相互干渉を無視した場合、平均応力場に図1(b)の微視構造モデルが一つ存在する場合を考えれば良く、応力拡大係数は次式で与えられる。

$$K_I = \sqrt{\pi l} \hat{\sigma}_{11} + \frac{c_0}{\sqrt{\pi l}} (-\lambda_1 \hat{\sigma}_{22} + \lambda_2 \hat{\sigma}_{11}) \dots\dots\dots (14)$$

上記の発展則は、クラックが密度 ρ で連続的に分布しているものと仮定している事から、材料内の全ての点で満足する場の方程式となり、損傷パラメータ(クラック長) l も連続的な場の変数として理解される。

結局、損傷理論において問題は、つりあい式(4)、歪-変位関係式(5)、応力-歪関係(11)、損傷の発展則(13),(14)を満足する変位 $\hat{u}$ 、歪 $\hat{\epsilon}$ 、応力 $\hat{\sigma}$ 、損傷パラメータ(クラック長) l を求める問題に帰着される。

3. 相互干渉を考慮した連続体理論

2章では微視構造間の相互干渉を全く無視した場合について損傷理論の定式化を行った。ここでは、損傷の発展則において、相互干渉効果を取り入れた定式化を試みる。そのため、まず図1(b)の微視構造が無限弾性体内に離散的に存在する場合について検討し、その後問題を一般化して連続体モデルを構築する。

3.1 離散クラック系の相互干渉

図3(a)に示すように、無限弾性体内に図1(b)の微視構造モデルが2個存在する場合について pseudo-traction 法を用いて相互干渉効果を検討する。pseudo-traction 法¹⁰⁾は離散的な微視構造間の相互干渉を計算する方法であり、基本的な考え方は、まず、図3(a)の問題を問題を図3(b),(c),(d)に示す3つの問題に分けることである。ここで、図3(b)の問題はクラックの無い無限弾性体に外力が作用する問題、図3(c),(d)は無限弾性体内に各々単一のクラックが存在する問題を表し、各々のクラック表面には他の問題(例えば(c)の問題に着目すると(b)と(d)の問題)がクラックの表面に作る応力を逆向きに作用させる。このとき、全ての問題を重ね合わせたときクラック表面で表面力が0であるという条件から、次の consistency 式が得られる。

$$\sigma^{P\alpha} = \gamma^{\alpha\beta}(\sigma^{\infty\beta} + \sigma^{P\beta}) \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $\sigma^{\infty\alpha} = \{\sigma_{11}^{\infty\alpha}, \sigma_{22}^{\infty\alpha}, \sigma_{12}^{\infty\alpha}\}^T$ は無限遠で作用する応力によって生じるクラック α の位置での応力、 $\sigma^{P\alpha} = \{\sigma_{11}^{P\alpha}, \sigma_{22}^{P\alpha}, \sigma_{12}^{P\alpha}\}^T$ は pseudo-traction であり、他のクラックがクラック α の位置に作る応力を表す。また、 $\gamma^{\alpha\beta}$ は subproblem β においてクラック β の表面に表面力を作用させたときにクラック α の位置に作る応力の影響係数を表す。具体的には、クラック間の距離 d に比べクラック長 l_β が小さいものと仮定し(l_β/d)の高次項を無視すれば $\gamma^{\alpha\beta}$ は次式となる。

$$[\gamma_{ij}^{\alpha\beta}] = \frac{1}{2} \left(\frac{l_\beta}{d} \right)^2 \cdot \begin{bmatrix} (1 + \frac{2\lambda_1 c_0}{\pi l_\beta})(2\cos 2\phi_{\beta\alpha} - \cos 4\phi_{\beta\alpha}) & -\frac{2\lambda_1 c_0}{\pi l_\beta}(2\cos 2\phi_{\beta\alpha} - \cos 4\phi_{\beta\alpha}) & \sin 2\phi_{\beta\alpha} - \sin 4\phi_{\beta\alpha} \\ (1 + \frac{2\lambda_2 c_0}{\pi l_\beta})\cos 4\phi_{\beta\alpha} & -\frac{2\lambda_2 c_0}{\pi l_\beta}\cos 4\phi_{\beta\alpha} & \sin 2\phi_{\beta\alpha} + \sin 4\phi_{\beta\alpha} \\ (1 + \frac{2\lambda_3 c_0}{\pi l_\beta})(\sin 2\phi_{\beta\alpha} - \sin 4\phi_{\beta\alpha}) & -\frac{2\lambda_3 c_0}{\pi l_\beta}(\sin 2\phi_{\beta\alpha} - \sin 4\phi_{\beta\alpha}) & \cos 4\phi_{\beta\alpha} \end{bmatrix} \dots (16)$$

また、このときクラック α のモード I における応力拡大係数は次式で与えられる。

$$K_I^\alpha = \sqrt{\pi l_\alpha}(\sigma_{11}^{\infty\alpha} + \sigma_{11}^{P\alpha}) + \frac{c_0}{\sqrt{\pi l_\alpha}}\{-\lambda_1(\sigma_{22}^{\infty\alpha} + \sigma_{22}^{P\alpha}) + \lambda_2(\sigma_{11}^{\infty\alpha} + \sigma_{11}^{P\alpha})\} \dots\dots\dots (17)$$

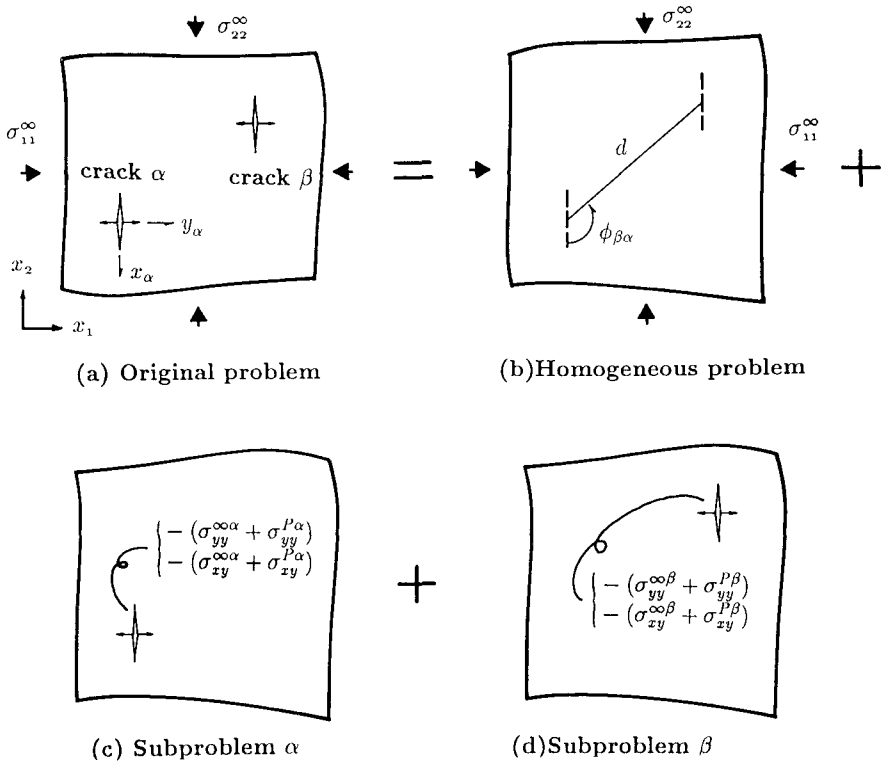


図-3 pseudo-traction 法における問題の分割

3.2 相互干渉場理論 (Interaction Field Theory)

前節では微視構造が 2 個の場合について相互干渉効果の評価方法を検討した。微視構造間の相互干渉効果は pseudo-traction $\sigma^{P\alpha}$ によって評価され、pseudo-traction は (15) 式を満足しなければならない。(15) 式の

右辺は微視構造が複数個存在する場合、全ての微視構造に関する総和に変更される。微視構造が連続的に密度(単位面積当たりの微視構造の数) ρ で分布する場合、(15) 式の右辺は積分形となり、また無限遠で作用する応力を平均応力に置き換えられ consistency 式は次の形になる。

$$\sigma^P(x) = \int_V \rho \gamma(x|\xi) \{ \dot{\sigma}(\xi) + \sigma^P(\xi) \} d\xi \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 $\gamma(x|\xi)$ は(16)式の $\gamma^{\alpha\beta}$ において、 d を $d = \|x - \xi\|$ とし、 $l_\beta, \phi_{\beta\alpha}$ を各々 ξ 位置でのクラック長 $l(\xi)$ および $\phi = \tan^{-1}(x_2 - \xi_2)/(x_1 - \xi_1) + \pi/2$ によって置き換えたものである。このとき、 σ^P は連続的に分布する場の変数と解釈される。 $\sigma^P(x)$ の物理的な意味は、前節から明らかなように、材料内の x 点以外の全ての点に存在する微視構造が subproblem 上で作る応力を表す。もし、ある点 x において $\sigma^P(x) = 0$ ならば x 点以外の点に存在する微視構造が x 点の微視構造に及ぼす相互作用が見かけ上 0 になることを表す。したがって、以下では σ^P を interaction tensor と呼ぶ事にする。

また、(17) 式から、損傷面 (damage surface, 塑性論の降伏面に対応) $f = K_I - K_c$ は、

$$f = \sqrt{\pi l} (\dot{\sigma}_{11} + \sigma_{11}^P) + \frac{c_0}{\sqrt{\pi l}} \{ -\lambda_1 (\dot{\sigma}_{22} + \sigma_{22}^P) + \lambda_2 (\dot{\sigma}_{11} + \sigma_{11}^P) \} - K_c \dots\dots\dots (19)$$

となり、損傷の発展則は(19) 式と(13) 式で与えられる。その他の支配方程式については損傷理論と同じであり、損傷理論および今回提案する IFT について支配方程式、未知量をまとめると表 1 のようになる。

表-1 支配方程式と未知量

	IFT	損傷理論
つり合い式	式(4)	式(4)
歪-変位関係	式(5)	式(5)
応力-歪関係	式(11)	式(11)
発展則	式(13),(19)	式(13),(14)
consistency 式	式(18)	—
未知量	$\dot{u}, \dot{\epsilon}, \dot{\sigma},$ l, σ^P	$\dot{u}, \dot{\epsilon}, \dot{\sigma},$ l

(IFT : Interaction Field Theory)

ここで、通常の損傷理論と提案する理論の差異について言及しておく。通常の損傷理論では、(11) 式においてマトリクス H に含まれる損傷パラメータ l を損傷の発展則(13),(14) 式で消去すれば、構成則が得られる。この場合、構成則は局所的な応力と歪によってのみ記述される。一方、今回提案する理論では、損傷の発展則は interaction tensor σ^P に依存し、 σ^P は consistency 式によって材料全体の応力と損傷パラメータに依存する。そのため、形式的に応力-歪関係(11) 式から損傷の発展則(13),(19) 式および consistency 式(18) を用いて損傷パラメータ l と interaction tensor σ^P を消去した場合、得られる構成則は材料内部の全ての点における平均応力に依存する形で導かれ、非局所型^{11),12)}の構成則を用いている事になる。

4. 数値計算例

ここでは、通常の損傷理論と提案する連続体理論 IFT の基本的な差異を検討するため最も単純な計算例にとどめる。以上の基礎方程式を有限要素法で離散化し、要素の近似には 3 節点の三角形要素を用い、要素内で変位は線形、interaction tensor および損傷パラメータは一定として近似する。また、簡略化のため損傷の発展則については常に $f = 0$ として計算を行った。このことは非可逆パラメータであるクラック長を可逆パ

ラメータとし、非弾性問題を非線形の弾性問題にした事に対応する。この場合、離散化された方程式は非線形の連立方程式となり、Newton 法¹³⁾を用いて解を求めた。

メッシュ図を図4に示す。計算で用いたデータは $E/\sigma_0 = 1000$, $\nu = 0.3$, $\rho c_0^2 = 0.3$, $\lambda_1 = 0.5$, $\lambda_2 = 0$ であり、 σ_0 は $\sigma_0 = K_c/\sqrt{\pi c_0}$ で定義される基準応力 (物理的には引張強度に対応) を表す。また、荷重条件としては無次元化した拘束圧 p_c/σ_0 を -2.0 (引張を正) に固定した後、強制変位 Δ を与えた。計算結果は全て平面歪として解析したものである。

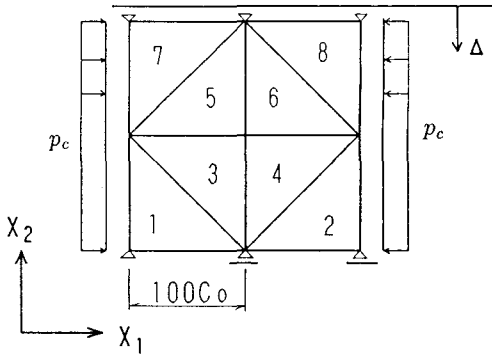


図-4 岩石の2軸圧縮の有限要素モデル

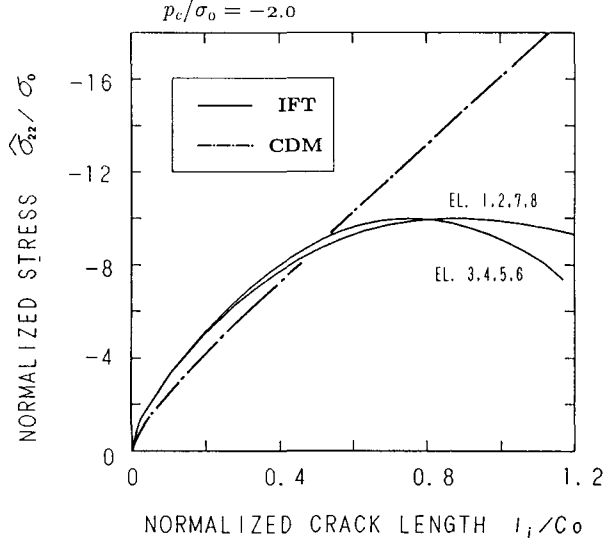


図-5 IFT と損傷理論の比較 ($p_c/\sigma_0 = -2.0$)

損傷理論と IFT の計算結果の比較を図5に示す。同図は x_2 方向の応力と損傷パラメータの関係を示し、実線が IFT による結果、一点鎖線が損傷理論の結果を表す。損傷理論では、最大荷重は存在せず、損傷パラメータは全ての要素において同じ値となった。一方、IFT では荷重が低い段階では相互干渉が小さいため要素間の損傷パラメータの差は無いが、荷重が増加するにつれて損傷パラメータが発展し、損傷 (微視構造) 間の相互作用が大きくなり損傷パラメータの要素間の差が増大する。また、IFT では最大荷重が存在し、最大荷重後は軟化挙動を示す。

双方の理論とも非線形の連立方程式を解いているため解の多価性を生じる可能性がある。そこで、各荷重増分ステップで固有値解析を行い、分岐点の有無を調べた。その結果、損傷理論では分岐点は存在しなかったが、IFT については分岐点が存在することが判明した。IFT によって計算した要素 6 の無次元化した損傷パラメータについての分岐図を図 6 に示す。図 5 で示した基本経路は経路 AB に対応し、これ以外に分岐解、CD が存在する。実際の現象では、分岐点での応力が基本経路の最大応力より低く、しかも分岐解はいずれも軟化挙動を示すため、分岐解に沿って損傷が発展する事になる。

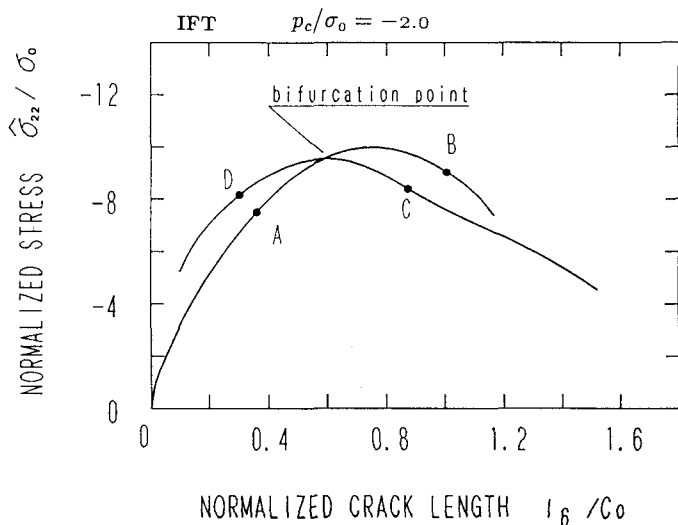


図-6 要素 6 の損傷パラメータに関する分岐図

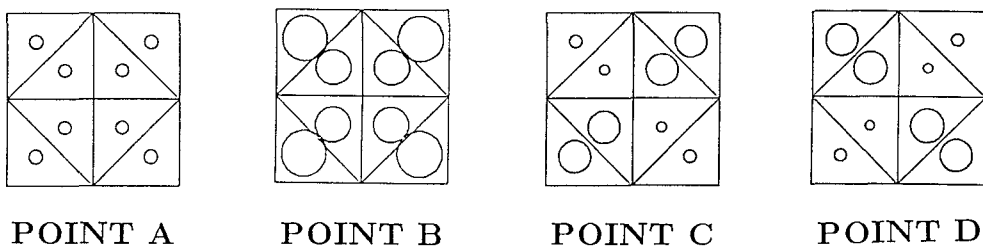


図-7 損傷パラメータの分布

また、図の点 A-D における、損傷パラメータの分布を図 7 に示す。図中、円の半径が各要素の損傷パラメータの大きさを表す。同図から基本経路上では、ほぼ様な損傷パラメータの分布となっているが、分岐経路上では斜め方向の損傷パラメータが発展する。このことは実際の岩石の 3 軸試験で観察されるせん断破壊¹⁴⁾の破壊モードを表しているものと解釈される。

5. おわりに

本研究では、微視構造間の相互干渉効果を取り込んだ連続体理論を提案した。損傷の発展則において相互干渉効果を直接的に評価するため、場の変数 (interaction tensor) を導入し interaction tensor に関する積分方程式を導いた。通常の損傷理論と本理論の差異について考察を加え、本理論から導かれる構成則が非局所

型の構成則となる事を示した。加えて、数値計算結果から圧縮荷重下の岩石等で観察されるせん断破壊の破壊モードが本理論によって表現可能である事を確認した。本理論によって、圧縮強度および応力-歪関係の拘束圧による変化が計算可能であり、実際の岩石の実験結果と計算結果を比較する事は興味深い。さらに、他の微視構造を持つ材料について本理論を適用する事が今後の課題として挙げらる。

最後に、本研究は文部省科学研究費補助金(奨励研究(A)、課題番号 03750384)を受けて行ったことを付記する。

参考文献

- 1) Kachanov, L.M. : On the Time to Failure under Creep Conditions, *Izv. Akad. Nauk. SSR, Otd. Tekhn. Nauk*, No.8, pp.26-31, 1958 (in Russian).
- 2) Krajcinovic, D. and Fonseka, G. U. : The Continuous Damage Theory of Brittle Materials : Part 1: General Theory, *J. of Appl. Mech.*, Vol.48, pp.809-815, 1981.
- 3) Fonseka, G. U. and Krajcinovic, D. : The Continuous Damage Theory of Brittle Materials : Part 2: Uniaxial and Plane Response Modes, *J. of Appl. Mech.*, Vol.48, pp.816-824, 1981.
- 4) Najjar, J. : Continuous Damage of Brittle Solids, *Continuum Damage Mechanics, Theory and Applications*, D. Krajcinovic and J. Lemaitre eds., Springer-Verlag, pp.231-294, 1987.
- 5) Chaboche, J. L. : Continuum Damage Mechanics : Part I,II, *J. of Appl. Mech.*, Vol.55, pp.59-64,65-72, 1988.
- 6) Ashby, M.F., Hallam, S.D. and Cookley : The Failure of Brittle Solids Containing Small Cracks under Compressive Stress States, *Acta Metall.*, Vol.34, No.3, pp.497-510, 1986.
- 7) Horii, H. and Nemat-Nasser, S. : Compression-Induced Microcrack Growth in Brittle Solid: Axial Splitting and Shear Failure, *J. Geophys. Res.*, Vol.90, No.B4, pp.3105-3125, 1985.
- 8) Horii, H. and Nemat-Nasser, S. : Brittle Failure in Compression: Splitting, Faulting and Brittle-Ductile Transition, *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, Vol.A319, pp.337-374, 1986.
- 9) Horii, H. and Nemat-Nasser, S. : Overall Moduli of Solids with Microcracks: Load-induced Anisotropy, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.31, No.2, pp.155-177, 1983.
- 10) Horii, H. and Nemat-Nasser, S. : Elastic Fields of Interacting Inhomogeneities, *Int. J. Solids Structures*, Vol.21, No.7, pp.731-745, 1985.
- 11) Droz, P. and Bažant, Z. P. : Nonlocal Analysis of Stable States and Stable Paths of Propagation of Damage Shear Bands, *Cracking and Damage*, J. Mazars and Z.P. Bažant eds., Elsevier, pp.415-425, 1989.
- 12) Eringen, A.C. and Edelen, D.G.B. : On Nonlocal Elasticity, *Int. J. Engng. Sci.*, Vol.10 pp.233-248, 1972.
- 13) Keller, H. B. : Numerical Solution of Bifurcation and Nonlinear Eigenvalue Problems, *Applications of Bifurcation Theory*, Academic Press, New York, pp.359-384, 1977.
- 14) Hallbauer, D.K., Wagner, H. and Cook, N.G. : Some Observations Concerning the Microscopic and Mechanical Behaviour of Quartzite Specimens in Stiff, Triaxial Compression Tests, *J. Rock Mech. Min. Sci. & Geomech. Abstr.*, Vol. 10, pp.713-726, 1973.

(1991年9月30日 受付)