

剛塑性有限要素法によるひずみ速度局所化のシミュレーション

A SIMULATION OF STRAIN RATE LOCALIZATION BY RIGID-PLASTIC FINITE ELEMENT METHOD

1)

田村 武

by Takeshi TAMURA

The rigid-plastic finite element method was developed originally in the field of the mechanical engineering to calculate the magnitude of necessary force for metal forming. In this paper, a Rigid-plastic finite element analysis with both the associated and the non-associated flow rules is performed to consider the mechanism of the strain localization since it can be applied directly to the flow state of structure and it is expected that the strain localization is detected more easily even by a rough meshing. Numerical examples of the problems under the plane strain condition show that the distribution of equivalent plastic strain rate seems to concentrate along some curves when a parameter of the associativeness is decreased. A qualitative and simple explanation for the difference of deformation modes due to the flow rules is given.

1. はじめに

剛塑性有限要素法は塑性加工の数値解析手法として発展してきたが、近年、種々の問題にも応用されている。たとえば、ダイレイタンスを有する、すなわち、内部摩擦角を有する粒状体の極限状態の解析も行なわれている。また、これまでの関連流れ則を基礎とする定式化ばかりでなく、降伏曲面とは異なる塑性ポテンシャルを考慮した非関連流れ則による剛塑性解析も可能となってきた。ところで、いくつかの数値計算例から非関連流れ則を用いた場合、ひずみ速度が特定の線に沿って集中し始めることがある。これが、いわゆる「ひずみの局所化」であるか直ちに断定できないが、従来の大変形弾塑性解析と比べて、1) 剛塑性解析は直接、すべり状態（あるいは双曲型の微分方程式に支配される状態）を扱うものであること、2) それほど細かな要素分割でなくともひずみ速度が集中してくること、等は興味ある結果である。

以下において剛塑性有限要素法の概略および数値計算例を述べながら、流れ則とひずみ速度の局所化について考察し、そのメカニズムを明らかにする一端としたい。

2. 剛塑性材料の応力-ひずみ速度関係

ここでは、降伏関数として Drucker-Prager 型：

$$f(\sigma_{ij}) = -\alpha I_1 + \sqrt{J_2} = k \quad (1)$$

を用いる。式(1)は図-1のように主応力空間において円錐形の曲面で表すことができる。また、塑性ポテンシャルとしても同様に Drucker-Prager 型のものを仮定する。

1) 京都大学工学部交通土木工学教室 助教授

〒606 京都市左京区吉田本町

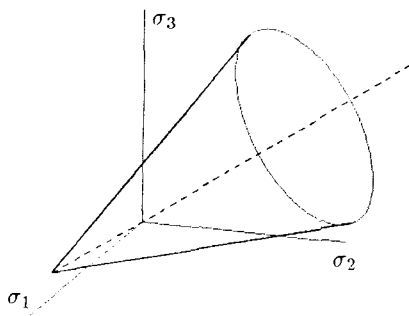


Fig.1 Drucker-Prager の降伏曲面

$$\bar{f}(\sigma_{ij}) = -\bar{\alpha}I_1 + \sqrt{J_2} \quad (2)$$

ここに I_1 は応力 σ_{ij} の第一不変量, J_2 は偏差応力 s_{ij} の第二不変量, そして α および k は, それぞれ内部摩擦角および粘着力に相当する材料定数である. また, $\bar{\alpha}$ は塑性ポテンシャルの勾配を示す材料定数であり, 塑性体積ひずみを軽減するために非関連流れ則を用いる場合には, $\bar{\alpha}$ として α よりも小さな値を用いる. とくに $\bar{\alpha} = 0$ とすれば, 塑性ひずみの関して非圧縮となる. 参考文献 1) に従えば, 応力-ひずみ速度関係として以下のような結果を得る.

関連流れ則の場合

$$\sigma_{ij} = \frac{\sqrt{2}k}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\dot{\epsilon}}} + \lambda(\delta_{ij} + \frac{3\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\dot{\epsilon}}}) \quad (3)$$

$$\dot{\theta} + \frac{3\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{1+6\alpha^2}} \bar{\dot{\epsilon}} = 0 \quad (4)$$

非関連流れ則の場合

$$\sigma_{ij} = \frac{\sqrt{2}\{3(\alpha - \bar{\alpha})\bar{\lambda} + (1+6\bar{\alpha}^2)k\}}{(1+6\alpha\bar{\alpha})\sqrt{1+6\bar{\alpha}^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\dot{\epsilon}}} + \bar{\lambda}(\delta_{ij} + \frac{3\sqrt{2}\bar{\alpha}}{\sqrt{1+6\bar{\alpha}^2}} \frac{\dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{\dot{\epsilon}}}) \quad (5)$$

$$\dot{\theta} + \frac{3\sqrt{2}\bar{\alpha}}{\sqrt{1+6\bar{\alpha}^2}} \bar{\dot{\epsilon}} = 0 \quad (6)$$

ここに, $\dot{\epsilon}_{ij}$ は (塑性) ひずみ速度であり, また,

$$\bar{\dot{\epsilon}} = \sqrt{\dot{\epsilon}_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}} \quad (7)$$

$$\dot{\theta} = \dot{\epsilon}_{kk} \quad (8)$$

と定義される. むろん, $\bar{\alpha} = \alpha$ とすれば, 式 (5), (6) はただちに式 (3), (4) に帰着する. 式 (3) あるいは (5) に含まれる λ , $\bar{\lambda}$ は応力の不定量であって, 構成関係としてひずみ速度から直接定めることはできない. それに対応して, ひずみ速度成分間の制約条件式 (4) あるいは (6) が存在する. これらは, ひずみ速度が降伏曲面あるいは塑性ポテンシャル上のどこかの点で法線ベクトルとなることを保証する条件である. これら λ , $\bar{\lambda}$ と制約条件の関係は, 等方応力成分と非圧縮条件との関係と類似のものである.

なお平面ひずみ条件の場合, Drucker-Prager の降伏条件の定数 α , k と Mohr-Coulomb の降伏条件の定数 ϕ , c とは以下のような関係がある.

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \begin{cases} \sqrt{\frac{(3 + 2r \sin^2 \phi) - \sqrt{9 + 12r(1-r) \sin^2 \phi}}{6r^2(3 + \sin^2 \phi)}} & (r \neq 0) \\ \frac{\sin \phi}{3} & (r = 0) \end{cases} \\ k = \frac{3c\alpha}{\tan \phi} \end{array} \right. \quad (9)$$

ただし、 r は、関連流れ則と非関連流れ則の程度を表わすパラメータであって、

$$r = \frac{\bar{\alpha}}{\alpha} \quad (10)$$

と定義する。式(1)、(2)から明らかなように、 $r = 1$ は関連流れ則の場合に、また $r = 0$ は塑性体積ひずみか生じないような場合にそれぞれ対応している。 $\alpha \neq 0$ の場合、 $r \neq 1$ は、一般に非関連流れ則を表わすことになる。

3. 剛塑性有限要素解析の基礎方程式

図-2 に示すように以下の例題において、1) (物体力を含む) 載荷荷重 F の大きさを未知数のなかに含む問題と、2) 特定の節点の速度を規定する問題 の2種類がある。後者は、たとえば領域表面の一部を剛体板を介して一方向に押す場合などが相当する。それぞれを有限要素法で解く場合の方程式は以下の通りである。

1) 荷重の大きさ未知の場合

$$\text{つりあい式:} \quad \int_S B^T \sigma dS = \mu F \quad (11)$$

$$\text{ひずみ速度の制約条件:} \quad L(\dot{u}) = 0 \quad (12)$$

$$\text{速度の絶対値の指定:} \quad F^T \dot{u} = 1 \quad (13)$$

未知数: $\dot{u}$ (節点速度) $\lambda(\bar{\lambda})$ (応力の不定量) μ (荷重の大きさ)

2) 一部の変位速度を指定する場合

$$\text{つりあい式:} \quad \int_S B^T \sigma dS = F + \eta \quad (14)$$

$$\text{ひずみ速度の制約条件:} \quad L(\dot{u}) = 0 \quad (15)$$

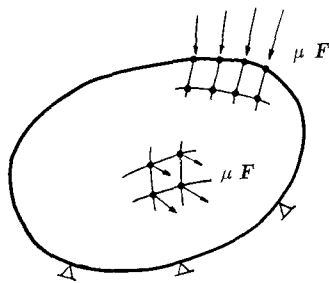
$$\text{一部の節点速度の指定:} \quad \dot{u}' = \delta a \quad (16)$$

速度を指定した節点の節点力の和と剛体板に作用させる力の関係:

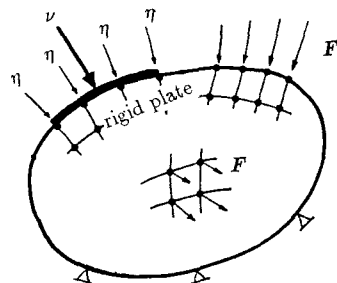
$$a^T \eta' = \nu \quad (17)$$

$$\text{剛体板の速度の指定:} \quad \dot{\delta} = 1 \quad (18)$$

未知数: $\dot{u}$ (節点速度) $\lambda(\bar{\lambda})$ (応力の不定量) η' (速度を指定した節点の節点力)
 ν (剛体板に作用する合力) $\dot{\delta}$ (剛体板の速度)



(a) F を未知数とする場合



(b) 特定の節点速度を規定する場合

Fig.2

以上の数式のなかで、 B はいわゆるBマトリックス、 S は2次元の解析領域である。 σ は、式(3)あるいは(5)で求めたものをベクトルとして内挿したもので、ここには節点変位速度 $\dot{u}$ や $\lambda(\bar{\lambda})$ が含まれている。また、式(12)、(15)は、式(4)あるいは式(6)を有限要素法により表現したものであるが、応力の不定量 $\lambda(\bar{\lambda})$ を要素ごとに1つ対応させることに連動して、これらの式も要素一つ一つの制約条件を意味する。これらの方程式は非線形形ではあるが、全体は微小変形理論の枠内での問題であることを注意しておく。2)における η は η' にゼロ成分を入れて全節点の自由度までに単純に拡張したベクトルである。 $\dot{u}'$ は剛体板による速度が与えられる節点のみを集めた $\dot{u}$ の一部からなるベクトルである。また、 a は剛体板によって指定される節点の速度のパターンであり、速度の大きさは δ により定められる。そのような節点には未知反力 η' が存在し、その合力 ν は式(17)で与えられる。なお、関連流れ則を仮定する場合には、剛塑性解析は塑性仕事最小の原理から変分法により定式化できる。このとき、式(15)、(16)、(18)などは付帯条件であり、それらに対応するLagrange乗数として $\lambda(\bar{\lambda})$ 、 η' 、 ν が意義付けられる。

4. 数値計算例

1) 欠陥要素を含む領域の解析

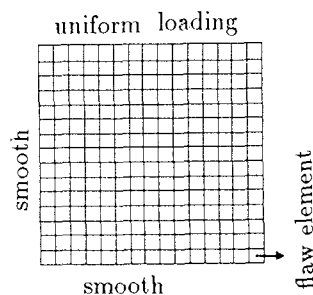


Fig.3 要素分割

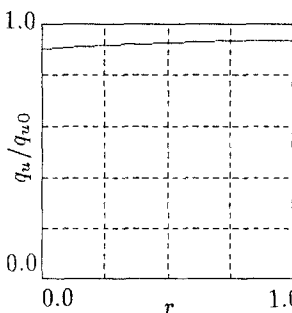
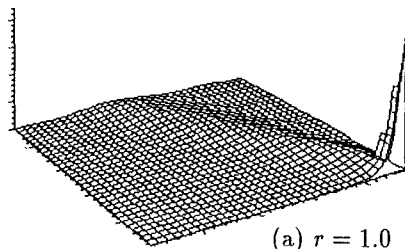
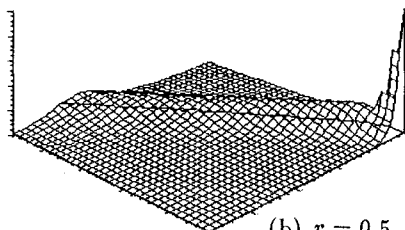


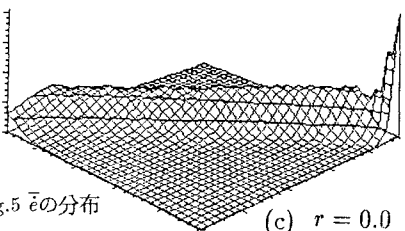
Fig.4 流れ則と強度



(a) $r = 1.0$



(b) $r = 0.5$



(c) $r = 0.0$

Fig.5 $\bar{\epsilon}$ の分布

図-3に示すように縦15、横15の同じ大きさの4節点アイソパラメトリック要素からなる領域の上部に一様荷重を載荷し、その極限状態における荷重の大きさ、応力場、速度場などを求めた。内部摩擦角 ϕ を 30° 、粘着力 c を1とした。境界条件は図のとおりであるが、右下の一要素の材料定数は十分小さく ($1/100$) しており、これをここでは欠陥要素という。欠陥要素のない場合は一様変形速度場であり容易に極限荷重の応力の大きさの正解 $q_{u0} = \sqrt{3}c$ が求まる。図-4は、横軸に式(10)で定義した関連流れ則のパラメータ r をとり、 q_{u0} で正規化した極限荷重の応力の大きさ q_u を縦軸に示したものである。 r が小さくなれば、極限荷重も小さくなるが、それほど顕著な差はない。一方、図-5は3つの r の場合のひずみ速度の絶対値 (式(7)の $\bar{\epsilon}$) の分布を表わしている。 $\bar{\epsilon}$ のもっとも大きいのは欠陥要素の部分である。興味深いのは、 $r=1$ の関連流れ則の場合と比べて、 r が小さくなるほど、いわゆるすべり線と呼ばれている直線に沿って $\bar{\epsilon}$ が集中してくることである。

2) 落とし戸の解析

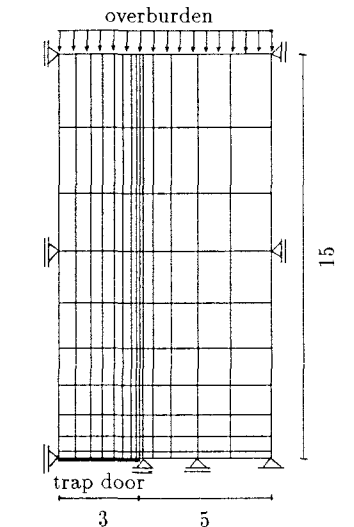


Fig.6 要素分割

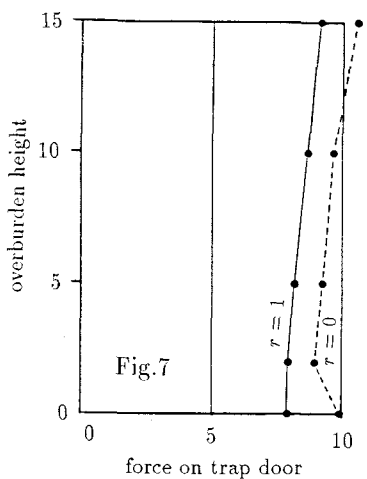


Fig.7 土被りと土圧

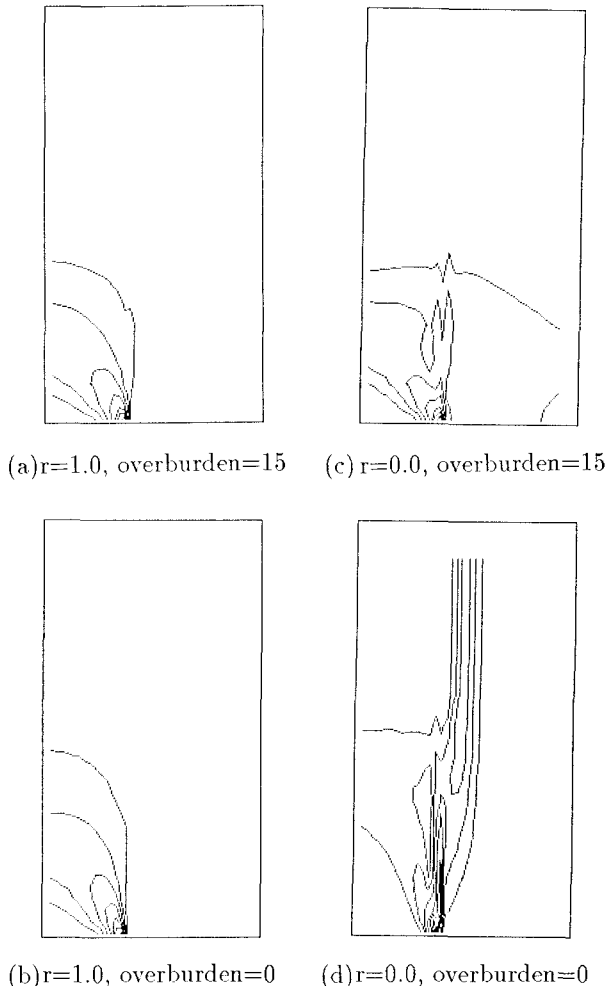


Fig.8 $\bar{\epsilon}$ の平方根の分布

図-6の要素分割のなかに示すように、領域の下端左側の境界を強制的に一樣な速度で下向きに移動させる問題を考える。これまでに砂などの粒状体を用いた実験が行なわれているもので、ここでは引き下げる剛体部分を落とし戸(trap door)とよぶ。砂のような材料を想定して粘着力 c をゼロ、内部摩擦角を 30° とし、また、物体力を考慮するため単位体積重量を1と設定した。また、物体力以外に上面に上載荷重を加え、その大きさは同じ単位体積重量の高さで表現する。なお、これらの物体力や表面力の大きさは既知であるが、落とし戸にかかる荷重は未知数である。図-7は縦軸に上載荷重の高さをとり、横軸に落とし戸に作用する全荷重を示したものである。実線は $r=1$ を、また破線は $r=0$ に対応している。落とし戸と領域形状の大きさからわかるように、落とし戸を下げる前には、45(上載荷重なし)から90(15の高さの上載荷重)が初期値として作用している。図-7は、極限状態では落とし戸の作用荷重がかなり小さくなること、上載荷重にあまり影響されないこと、また、 r を小さくするとやや大きくなることを意味している。図-8は、 $r=1$ 、 $r=0$ そして上載荷重が0、15の組合せからなる4つの場合について、 $\bar{\epsilon}$ の平方根の分布を示したものである。 $r=1$ の場合は、分布は上載荷重にほとんどよらないが、 $r=0$ の場合は上載荷重によって大きく異なる。また、上面へ延びようとする変形モードが見られる。とくに上載荷重がない場合には、完全に上面まですべりが生じていることがわかる。

5. 考察とまとめ

関連流れ則と非関連流れ則の両者に適応できる構成関係を述べたあと、有限要素法による2種類の数値解析結果を説明した。以下のような結果と考察を記す。

1) 極限状態の荷重、応力などの力学量は、流れ則によって大きく変化しないが、変形速度のモードはかなり異なることがわかった。とくに、非関連流れ則を用いる場合には、ひずみ速度が特定の線の周囲に集中するような傾向が見られた。このことは、参考文献2)において、弾塑性材料の場合について得られた結果と符号している。その理由についての力学的そして定量的な説明は不完全であるが、定性的には以下のように考えることができる。すなわち、 r が1に近い場合には、変形に応じてダイレイタシーによる膨張が発生する。しかし、領域内部では周辺の部分からの拘束があり自由に膨張できない。したがって、大きな変形は応力の小さくなる領域の境界周辺に限られる。一方、 r が0に近いとそのような拘束が小さくなるので領域内部を通して変形がつながりやすくなる。

2) 非線形方程式を解くために、ここではNewton-Raphson法を用いたが、その収束を早くさせる方法に数値解析的な大きな問題を残している。すなわち、 r が小さい値のとき、解を得るのにかなりの回数の繰返し計算を要求される。方程式の性状を検討したうえで、最適な収束方法を確立させる必要がある。

参考文献

- 1) Tamura, T., S. Kobayashi and T. Sumi: Limit Analysis of Soil Structure by Rigid Plastic Finite Element Method, Soils and Foundations, Vol.24, No.1, pp.34-42, 1984.
- 2) Tamura, T., S. Kobayashi and T. Sumi: Rigid-Plastic Finite Element Method for Frictional Materials, Soils and Foundations, Vol.27, No.3, pp.1-12, 1987.
- 3) Tamura, T. and R. Y. S. Pak: Rigid-Plastic Limit Analysis of Discontinuous Media by a Finite Element Method, Canadian Geotechnical Journal, Vol.26, pp.369-374, 1989.
- 4) 田村 武, 小林 昭一, 橋本 一三: 非関連流れ則を用いた剛塑性有限要素法, 構造工学論文集, Vol.37A, pp.409-414, 1991.
- 5) Rudnicki J. W. and J. R. Rice: Conditions for the Localization of Deformation in Pressure-Sensitive Dilatant Materials, J. Mech. Phys. Solids., Vol.23, pp.371-394, 1975.

(1991年9月30日受付)