構造工学論文集　Vol.38 A（1992年3月）　土木学会

有限要素法と境界要素法の重ね合わせに基づく数値解析手法

NUMERICAL METHOD BASED ON SUPERPOSITION OF FEM AND BEM

板屋英治*，　山口栄輝**，　堀井秀之***
By Eiji ITAYA, Eiki YAMAGUCHI, Hideyuki HORII

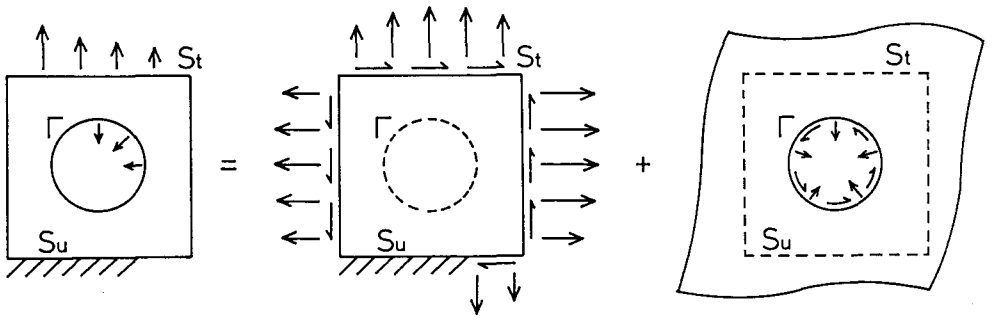
The finite element method (FEM) is more suitable for the analyses of material-nonlinear problems than the boundary element method (BEM). However, in crack problems, FEM presents difficulties and BEM is better suited. Against the background of this observation, a method based on the superposition of FEM and BEM is explored so as to take advantage of the two methods. In the present study, to illustrate the underlying concept of this method, we describe the formulation for linear elastic problem, which is followed by numerical examples. The numerical results are in good agreement with the exact solutions, verifying the validity of the method. The example problems also demonstrate that the finite element mesh need not be so fine around the point of stress concentration, and that the discretization of the domain does not have to be redefined as the crack propagates.

1．はじめに

土木構造物の解析では，非線形な構成式と変位の不連続面（広義のクラック）の存在の両方を考慮に入れなければならないことが多い．典型的な例に，土質力学における地盤の安定問題がある．すなわち，この問題では，載荷板端部近傍で弾性域をはるかに越える大きなひずみが発生し，ひいてはすべり面が形成される．このため，この種の解析では材料の弾塑性挙動だけでなく，変位の不連続面の形成・進展を考慮に入れる必要がある．

既存の代表的な数値解析法として，有限要素法[1]と境界要素法[2]が挙げられる．有限要素法を用いれば，材料非線形問題は比較的容易に解析できる[3]．しかしながら，有限要素法は，クラック先端近傍の解の特異性の処理やクラック進展に伴うメッシュ再分割に難があり[4),5]，クラック問題の解析には適していない．一方，境界要素法は境界上の未知量を離散化して解くため，クラック進展においてメッシュの再分割が容易であるなど，クラック問題の解析に適しており，境界要素法によるクラック問題の解析法についてはすでに確立された感がある[6),7]．しかし，境界要素法は，基本解を用いて導かれる積分方程式を離散化して解く解析方法であり，弾塑性問題のように基本解が存在しない問題に対しては，いくつかの手法が提案されては

*　工修　滋賀県土木部河港課（建設省より出向）　（〒520　滋賀県大津市京町4-1-1）
**　Ph.D.　東京大学講師　工学部土木工学科　（〒113　東京都文京区本郷7-3-1）
***　Ph.D.　東京大学助教授　工学部土木工学科　（〒113　東京都文京区本郷7-3-1）



有孔矩形板　　問題F　　問題B

図－1　本解析法の基本概念

いるが[8]，必ずしも適した解析法であるとは言い難い．

このような有限要素法と境界要素法の特徴を考えると，これら2つの数値解析法を組み合わせ，それぞれの長所を生かした解析手法を開発できれば，弾塑性挙動とクラック進展が共存する問題に対して有力な数値解析法になると考えられる．そこで，有限要素法と境界要素法の重ね合わせによる新しい解析法の開発を試みる．本研究はそのための基礎的研究であり，重ね合わせ手法の概念を明確に示すことを目的に，2次元線形弾性体の問題を取り上げ，その定式化を示し，簡単な例題を解析することにより本解析手法の妥当性を確認する．よく用いられる複合解析法は領域を2つに分け，それぞれを有限要素法と境界要素法で解くものであるが，本研究で提案する手法はこれとは全く異なり，問題を2つの問題の重ね合わせとして解く方法である．類似の研究に文献9)がある．

2．定式化

本研究では，円孔やクラックといった境界面を内包する有限領域の境界値問題を取り扱う．すなわち，領域の外周を規定する外側境界とともに内部境界を有する多連結領域の弾性解析を行う．本研究で提案する解析法では，この境界値問題を，内部境界を有しない有限領域（問題F）と内部境界を有する無限領域（問題B）の2つの問題に分割して解き，それらを基に本来の問題の解を得ることを考える．円孔を有する矩形板の解析を例に取れば，これは図－1のように表せる．

簡単のために，体積力は作用しておらず，また内部境界上では力学的境界条件のみが与えられている弾性体を考える．この場合，解くべき問題は外側境界の部分領域 S_t では表面力 $\bar{t}_o$，残りの外側境界 S_u では変位 $\bar{u}_o$，内部境界Γでは表面力 $\bar{t}_I$ が与えられた有限弾性体の境界値問題となる．問題Fは，S_t 上で表面力 $\bar{t}_o^F$，S_u 上で変位 $\bar{u}_o^F$ が与えられた有限弾性体の問題である．問題Fでは境界としてのΓは存在しないが，Γ上の表面力 $\bar{t}_I^F$ は，与えられた S_t，S_u 上の $\bar{t}_o^F$，$\bar{u}_o^F$ に対する問題の解として求まる．問題Bは，Γ上で表面力 $\bar{t}_I^B$ が与えられた無限弾性体の問題である．問題Bでは外側境界が存在せず，S_t 上の表面力 $\bar{t}_o^B$，S_u 上の変位 $\bar{u}_o^B$ は，与えられたΓ上の $\bar{t}_I^B$ に対する問題の解として求まる．但し，問題F，Bで与える境界量は既知ではなく，下記の条件を満たすことが要求される．

$$\bar{t}_o = \bar{t}_o^F + \bar{t}_o^B \quad \text{on} \quad S_t, \qquad \bar{u}_o = \bar{u}_o^F + \bar{u}_o^B \quad \text{on} \quad S_u, \qquad \bar{t}_I = \bar{t}_I^F + \bar{t}_I^B \quad \text{on} \quad \Gamma \tag{1}$$

ここで，$\bar{t}_o$，$\bar{u}_o$，$\bar{t}_I$ は元の問題で与えられた境界値であり，式(1)は問題F，Bを重ね合わせたとき，元の問題の境界条件が満足されることを表している．

形式的には，問題Fの解として $\bar{t}_I^F$ と $\bar{t}_o^F$，$\bar{u}_o^F$ との関係が求まり，問題Bの解として，$\bar{t}_I^B$ と $\bar{t}_o^B$，$\bar{u}_o^B$ の関係が求まる．それらの関係を式(1)に代入して，例えば $\bar{t}_I^F$ と $\bar{t}_o^B$，$\bar{u}_o^B$ を消去すれば，未知の境界量 $\bar{t}_I^B$，$\bar{t}_o^F$，$\bar{u}_o^F$ に関する方程式が導かれる．あくまで形式的な議論ではあるが，その方程式を解き，未知の境界量を求めれば，問題F，Bの解の重ね合わせとして元の問題の解が得られるわけである．

本研究では，問題Fに有限要素法，問題Bに境界要素法を適用するが，問題F，Bを解く過程と未知境界量を求める過程を分離せず，それぞれの離散方程式を合わせて一度に解を求めることになる．

本研究では，内部境界の例として円孔とクラックを取り上げるが，以下では円孔，すなわち特異点を有しない内部境界を仮定し，その場合の定式化のみを示す．しかし，重ね合わせの原理に基づく定式化の過程は内部境界の種類に関わらず同じであり，例えば文献6)に基づき本論文に示す重ね合わせの手順に従えば，クラック問題に対する定式化も全く同様に行うことができる．

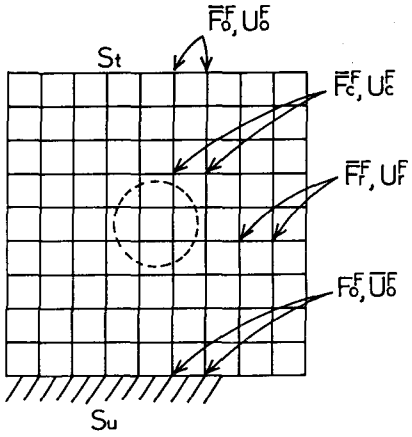
(1) 問題F

この弾性問題に，有限要素法を適用すれば，問題は次の連立1次方程式に置き換えられる[1]．

$$F^F = KU^F \tag{2}$$

ここに F^F は等価節点力ベクトル，K は剛性マトリックス，U^F は節点変位ベクトルである．後で境界要素法により得られる問題Bに対する方程式と合成する際の便宜上，式(2)を次のように書き改める．

$$\begin{Bmatrix} F_o^F \\ \bar{F}_o^F \\ \bar{F}_c^F \\ \bar{F}_r^F \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{U}_o^F \\ U_o^F \\ U_c^F \\ U_r^F \end{Bmatrix} \tag{3}$$



図－2　問題Fの離散化

ここに，下付き添字 0 は外側境界上の節点，c は内部境界をその中に有する要素の節点，r はその他の節点に関する量であることを示す（図－2）．また ¯ は，境界条件として与えられている量であることを表している．例えば，F_o^F，$\bar{U}_o^F$ はそれぞれ S_u 上の等価節点力ベクトル，節点変位ベクトルを示すのに対し，$\bar{F}_o^F$，U_o^F は S_t 上の等価節点力ベクトル，節点変位ベクトルを意味している．なお，ここでは体積力が作用していない場合のみを取り扱うため，$\bar{F}_c^F$，$\bar{F}_r^F$ はともに零ベクトルである．

Γ上の表面力 $\bar{t}_I^F$ は，その点における応力 $\bar{\sigma}_I^F$ に単位法線ベクトルを作用して求まるが，$\bar{\sigma}_I^F$ は U_c^F と次の関係を有している[1]．

$$\bar{\sigma}_I^F = DBU_c^F \tag{4}$$

ここに，$\bar{\sigma}_I^F = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \tau_{xy}\}^T$，D は応力とひずみを関連づけるマトリックス，B はひずみと節点変位を関連づけるマトリックスである．なお，有限要素の境界上では，応力が不連続になることがあるが，その場合には平均値をその点の応力として用いることとする．式(4)より，Γ上の節点（すなわち問題Bの節点）での表面力ベクトル $\bar{T}_I^F$ と U_c^F の関係が次のように得られる．

$$\bar{T}_I^F = AU_c^F \tag{5}$$

ここに

$$A = nDB \tag{6}$$

$$n = \begin{bmatrix} n_x & 0 & n_y \\ 0 & n_y & n_x \end{bmatrix} \tag{7}$$

n_x, n_y はΓ上の外向き単位法線ベクトルの成分である.

(2) 問題B

一定要素を用いた境界要素法によれば，問題Bは次の連立1次方程式に置き換えられる[2)].

$$HU_I^B = G\bar{T}_I^B \tag{8}$$

ここに，U_I^B と $\bar{T}_I^B$ はそれぞれΓ上の節点変位ベクトルおよび節点表面力ベクトルであり，H, G はこれらを関連づけるマトリックスとなっている.

S_u 上の節点（問題Fの節点）での変位ベクトル $\bar{U}_O^B$ は，U_I^B, $\bar{T}_I^B$ から内点での値として，次式[2)]より求められる.

$$\bar{U}_O^B = R\bar{T}_I^B - EU_I^B \tag{9}$$

ここに

$$R = \Sigma \int_{\Gamma^e} t^* \, d\Gamma \ , \quad E = \Sigma \int_{\Gamma^e} u^* \, d\Gamma \tag{10}$$

t^*, u^* はそれぞれ表面力，変位に関する基本解である．上付き添字 e は，1要素当たりの量であることを示し，積分は要素に沿った線積分，総和記号はそれらをすべての要素についてたし合わせることを意味している.

S_t 上の表面力ベクトル $\bar{t}_O^B$ を得るには，まず U_I^B, $\bar{T}_I^B$ から，応力$\bar{\sigma}_O^B$を次式[2)]より求める.

$$\bar{\sigma}_O^B = Q\bar{T}_I^B - SU_I^B \tag{11}$$

ここで，Q, S はそれぞれ R, E を偏微分し，弾性定数を乗ずることにより得られるマトリックスである.

これより，式(7)の n を用いれば，$\bar{t}_O^B$ が次のように求まる.

$$\bar{t}_O^B = n(Q\bar{T}_I^B - SU_I^B) \tag{12}$$

S_t 上の境界条件は，問題Fに合わせ，等価節点力で満足させることになる．このため，$\bar{t}_O^B$ より等価節点力ベクトル $\bar{F}_O^B$ を計算する必要がある．これは，$\bar{t}_O^B$ に有限要素の形状関数を乗じた上で境界辺に沿って線積分を行い，求めることになる．すなわち，$\bar{F}_O^B$ は次式により得られる.

$$\bar{F}_O^B = C\bar{T}_I^B - VU_I^B \tag{13}$$

S_t 上のある節点aに対する係数マトリックス C, V は次のように表される.

$$C = \Sigma \int_{L^e} N^a nQ \, dL \ , \quad V = \Sigma \int_{L^e} N^a nS \, dL \tag{14}$$

ここに，N^a は節点aに関する形状関数を表し，総和記号は節点aを通り，かつ外側境界を形成する，すべての要素辺に沿って積分を行い，その和を取ることを示している.

(3) 重ね合わせ

問題F，Bにおける有限要素法や境界要素法による離散化に対応して，式(1)は次式に置き換えられる.

$$\bar{F}_O = \bar{F}_O^F + \bar{F}_O^B \quad \text{on} \quad S_t \ , \qquad \bar{U}_O = \bar{U}_O^F + \bar{U}_O^B \quad \text{on} \quad S_u \ , \qquad \bar{T}_I = \bar{T}_I^F + \bar{T}_I^B \quad \text{on} \quad \Gamma \tag{15}$$

ここで，$\bar{F}_O$, $\bar{U}_O$, $\bar{T}_I$ は，元の問題における外側境界上の等価節点力ベクトル，節点変位ベクトル，および内部境界上の節点表面力ベクトルを示す.

以下では，式(15)の条件下で，問題F，Bの方程式を合わせ，元の問題に対する方程式を誘導する.

式 (5), (15c)より次式が得られる.

$$\bar{T}_I^B = \bar{T}_I - AU_c^F \tag{16}$$

上式および式(8), (9), (15b)を用いれば, $\bar{U}_O^F$ が次のように表される.

$$\bar{U}_O^F = \bar{U}_O + M\bar{T}_I - MAU_c^F \tag{17}$$

ここに,

$$M = -R + EH^{-1}G \tag{18}$$

式(17)を式(3)に代入すれば,

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_O^F \\ \bar{F}_c^F \\ \bar{F}_r^F \end{Bmatrix} = F_1 + K_1 \begin{Bmatrix} U_O^F \\ U_c^F \\ U_r^F \end{Bmatrix} \tag{19}$$

となる. ここに,

$$F_1 = \begin{Bmatrix} K_{21}(\bar{U}_O+M\bar{T}_I) \\ K_{31}(\bar{U}_O+M\bar{T}_I) \\ K_{41}(\bar{U}_O+M\bar{T}_I) \end{Bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23}-K_{21}MA & K_{24} \\ K_{32} & K_{33}-K_{31}MA & K_{34} \\ K_{42} & K_{43}-K_{41}MA & K_{44} \end{bmatrix} \tag{20}$$

また式(8), (13), (16)からは, 次式が得られる.

$$\bar{F}_O^B = P\bar{T}_I - PAU_c^F \tag{21}$$

ここに,

$$P = C - VH^{-1}G \tag{22}$$

式(21)は次のように書き改めることができる.

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_O^B \\ \bar{F}_c^B \\ \bar{F}_r^B \end{Bmatrix} = F_2 - K_2 \begin{Bmatrix} U_O^F \\ U_c^F \\ U_r^F \end{Bmatrix} \tag{23}$$

ここに,

$$F_2 = \begin{Bmatrix} P\bar{T}_I \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 0 & PA & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

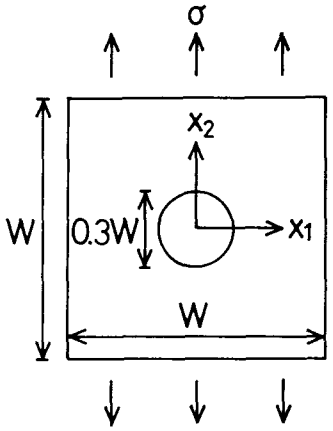
式(15a), (19), (23)を用いれば, 元の問題の方程式が次のように得られる.

$$F_S - F_1 - F_2 = (K_1 - K_2)U_S^F \tag{25}$$

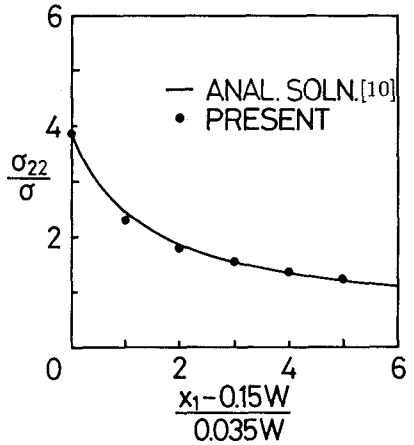
ここに,

$$F_S = \begin{Bmatrix} \bar{F}_O \\ \bar{F}_c \\ \bar{F}_r \end{Bmatrix}, \quad U_S^F = \begin{Bmatrix} U_O^F \\ U_c^F \\ U_r^F \end{Bmatrix} \tag{26}$$

式(25)を解けば, U_O^F, U_c^F, U_r^F が求まり, さらに式(17)より $\bar{U}_O^F$ が得られ, 問題Fの節点変位はすべて決定



図－３　円孔を有する正方形板



図－４　x_1軸上の直応力分布

される．求まった U_c^F と式(5)，(8)，(15c)を用いれば，問題Ｂの節点量である U_I^B，$\bar{T}_I^B$ がすべて求まる．これらの結果に重ね合わせの原理を適用すれば，本来の問題における任意点の変位および応力が計算できる．

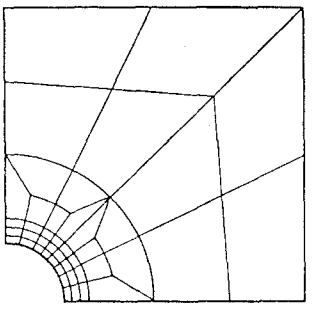
３．数値解析例

本解析法の妥当性を検証するために，内部境界を有する正方形板（平面ひずみ問題）を取り上げ，数値解析を行った．内部境界としては，円孔とクラックを考え，外力として一様引張応力σを作用させた．すべての例において，問題Ｆでは４節点四角形要素，問題Ｂでは一定要素を用いて解析を行った．

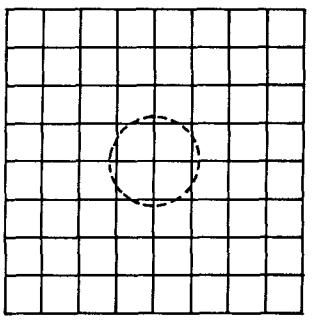
(1) 円孔を有する正方形板

まず一辺 W の正方形板に直径 0.3W の円孔が存在する場合の解析を行った（図－３）．この解析では 64 の四角形要素，80 の一定要素を用いて，正方形領域（問題Ｆ），円孔境界（問題Ｂ）を離散化した．解析結果として，x_1 軸上の直応力 σ_{22} を求め，厳密解[10]とともに図－４に示しているが，これより十分な精度で数値解の得られていることがわかる．

図－５に，通常の有限要素解析における典型的な要素分割図と，本解析法の問題Ｆに用いた要素分割図を示す．この２つの図から明らかなように，本解析法の要素分割は内部境界の影響を余り受けないため，同じ大きさの正方形要素で全領域を離散化できている．これに対し，通常の有限要素解析では，内部境界の存在およびその形状に要素分割は大きな影響を受け，解析精度低下の一因ともなる歪んだ形の要素を用いる必要が生じている．また，このため，要素分割自体が煩雑な作業となっている．

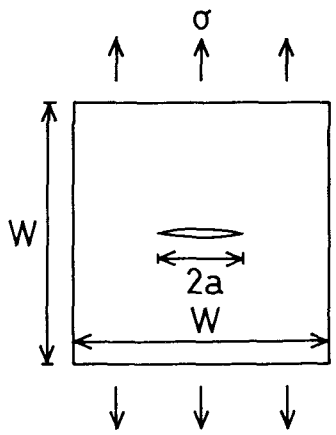


(a) 有限要素法(1/4 解析)[8]



(b) 本解析法（問題Ｆ）

図－５　正方形板の要素分割（円孔問題）



図－6　クラックを有する正方形板

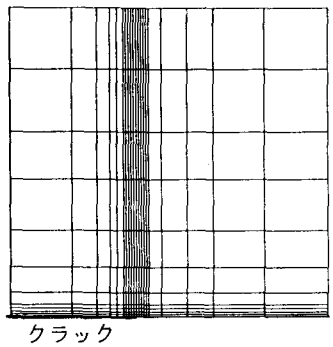
表－1　応力拡大係数 K_I

$\frac{2a}{W}$	$\frac{K_I}{\sigma(\pi a)^{1/2}}$	
	本解析結果	厳密解[11]
0.1	1.0152	1.014
0.2	1.0517	1.055
0.3	1.1214	1.123
0.4	1.2147	1.216
0.5	1.3317	1.334

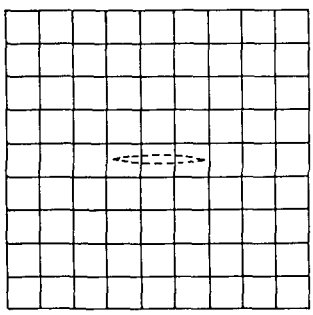
(2) クラックを有する正方形板

次に，クラックを有する正方形板において，クラック長パラメーター 2a/W を 0.1 から 0.5 に変化させ，モードⅠの応力拡大係数 K_I を計算した（図－6）．すべての解析において，問題Fでは 81 の四角形要素，問題Bでは 50 の一定要素を用いた．なお，クラック問題の解析では文献6)に従い，一定要素に重み関数を導入した．計算結果は，厳密解[10]とともに表－1に示しているが，誤差はいずれの場合にも 0.5%以下であり，これより本解析法の有効性が理解される．

クラック端において応力は無限大に発散する．このため，有限要素法で解析する場合には，クラック端近傍で非常に小さな要素を用いるのが通常であり（図－7 a），それ故に，クラック進展に伴い，要素の再分割を行う必要も生じる．これに対して本解析法の問題Fでは，表－1のすべての計算において，クラック端からの距離に関わらず，一様で，しかも比較的粗い要素分割（図－7 b）を用いており，要素再分割を行う必要も生じない．したがって，クラック進展に伴う入力データの変更は，問題Bに関する箇所に限られ，入力データのごく一部である．



(a) 有限要素法(1/4 解析)[12]



(b) 本解析法（問題F）

図－7　正方形板の要素分割（クラック問題）

4．おわりに

本論文では，内部境界を有する有限領域問題の一解析法として，有限要素法と境界要素法の重ね合わせに基づく新しい手法を提案した．この手法は，よく知られた複合解析法でなく，2つの数値解析法の重ね合わせに基づくものである．すなわち，境界値問題をまず2つの問題（問題F，B）に分割して解き，その重ね合わせにより本来の解を得ようとするものである．問題F，Bの解析法は十分に研究されており，定式化のポイントは重ね合わせにある．本解析手法の有効性は，内部境界を有す

る正方形板の解析を行うことにより実証した．

通常の有限要素法で，円孔やクラックを有する板の解析を行う際には，応力集中の生じる内部境界近傍で要素分割を細かくする必要がある．また内部境界の位置や形状によっては，精度低下の要因ともなり得る歪んだ形状の要素を用いる必要性が生じる．さらに，クラック進展解析を行う場合には，クラック進展に応じて要素の再分割を行わねばならない．これに対し，本解析法の要素分割は内部境界に影響を受けず，ある程度細かい要素を用いれば，同じ形状・大きさの要素により全領域の離散化を行うことができる．このため，本解析法により要素分割に伴う労力は大幅に軽減し，また歪んだ形の要素を用いることによる精度の低下も回避し得る．

ここでは，線形弾性体を対象として本解析法に関する考察を行ったが，今後は，弾塑性問題への適用性について検討を加える予定である．

参考文献

1) Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L.: The Finite Element Method, 4th ed., McGraw-Hill, 1989.
2) ブレビア，C.A.（神谷紀生 他 共訳）：境界要素法，培風館，1980年．
3) Owen, D.R.J. and Hinton, E.: Finite Elements in Plasticity: Theory and Practice, Pineridge Press, Swansea, 1980.
4) Ingraffea, A.R. and Saouma, V.: Numerical modeling of discrete crack propagation in reinforced and plain concrete, Fracture Mechanics of Concrete: Structural Application and Numerical Calculation, G.C. Sih and A. DiTomasso, eds., Martinus Nijhoff, Doordrecht-Boston, pp. 171-225, 1985.
5) Bazant, Z.P. and Lin, F.-B.: Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture, Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.114, No.11, pp.2493-2510, 1988.
6) Horii, H.: BIEM for crack problems and application to fracture process zone in concrete, ceramics and rock, Proceedings of First Joint Japan/U.S. Symposium on BEM, Tokyo, 1988.
7) 西村直志・広瀬壮一・堀井秀之・北原道広：クラック問題に対する境界積分方程式法の適用，構造工学論文集，土木学会，Vol.35A, pp.255-267, 1989.
8) 田中正隆・田中喜久昭（鷲津久一郎監修）：境界要素法－基礎と応用，丸善，1982年．
9) Annigeri, B.S. and Cleary, M.P.: Surface integral finite element hybrid (SIFEH) method for fracture mechanics, Int. J. Numer. Meth. Eng., Vol.20, pp.869-885, 1984.
10) Schlack, A.L. and Little, R.W.: Elastostatic problem of a perforated square plate, Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.90, No.5, pp.171-187, 1964.
11) Murakami, Y. (Editor-in-chief): Stress Intensity Factors Handbook, Pergamon Press, 1987.
12) 宮本博：有限要素法と破壊力学，コンピュータによる構造工学講座Ⅱ-3-B，培風館，1972年．

（1991年9月30日受付）