

ブロック対角化法による平面構造物の有限要素並列解析

Parallel finite element analysis of in-plane structures by block-diagonalization method

有尾 一郎* 池田 清宏** 鳥居 邦夫***

By Ichiro ARIO, Kiyohiro IKEDA, and Kunio TORII

A block-diagonalization method for solving the stiffness equation of square in-plane structures is presented. The stiffness matrix is decomposed into a block-diagonal form by means of a suitable 'local' coordinate transformation, chosen based on a dual viewpoint of group theory and sparsity. The stiffness equation in this coordinate is to be solved block by block, thereby realizing numerical efficiency and greatly reducing the requisite amount of computer memory. Its efficiency is further upgraded with the use of parallel computation.

1. はじめに

対称性は構造物の解析効率向上に幅広く用いられている。例えば、(1) 軸対称構造物の釣合方程式を直交関数により分離する方法¹⁾、(2) 構造物の折り返し(鏡映)対称性を利用し、領域の一部を解析する簡易解析法²⁾等が代表的である。

一方、対称性は各種の物理現象と深い関わりがあり、色々な分野で研究されている。量子力学(化学)では、対称な系の支配方程式が、ある座標変換により幾つかの独立な式に分解できるという、ブロック対角化原理が対称性の利用法として確立している³⁾。応用数学では、この原理を群の表現論により体系的に記述している⁴⁾。

実は構造解析の(1)の方法はこの原理に暗黙のうちに則っている。しかしながら、(2)の方法はこの原理と殆ど無関係に行われているのが現状であり、その適用例は文献5-9)に散見される程度である。本論文では文献6),7)でトラス構造物の分岐解析に対し提案されたブロック対角化解析法を正方形の構造物の微小変位解析に適用する(解析対象としては正方形板を取り上げるが、この手法は一般の平面構造物に容易に拡張可能である)。特に有限要素解析との適合化、および節点の対称要素(軌道)の概念に基づく計算効率の向上に力点を置いた。本解析法の長所として、非対称の荷重に対しても対称条件を利用できること、数値解析に用いる行列のサイズを小さくできること、ブロック毎の演算が並列演算に適していることがあげられる。

* 正会員 工修 和歌山工業高等専門学校土木工学科 助手(〒644 和歌山県御坊市名田町野島77)

** 正会員 Ph.D 長岡技術科学大学建設系 助教授(〒940-21 長岡市上富岡町1603-1)

*** 正会員 工博 長岡技術科学大学建設系 教授

2. 理論

(1) 幾何学的対称性の分類

正方形は4次の二面体群

$$D_4 = \{r^k, sr^k \mid k = 0, 1, 2, 3\} \dots\dots\dots (1)$$

の全ての元が引き起こす変換に対して不変に保たれる, すなわち, D_4 -不変である. ここで, 元 r^k ($k = 0, 1, 2, 3$) は原点回りの $90 \times k$ 度の時計回りの回転を, 元 sr^k ($k = 0, 1, 2, 3$) は x 軸から反時計回りに $45 \times k$ 度傾いた軸に関する鏡映をそれぞれ表す (図-1 参照). 正方形の変形モードは, 以下に示す D_4 の 10 個の部分群により分類される.

- | | |
|---|-------------------------------------|
| D_4 : 4 軸 ($x, y, s-s, t-t$ 軸) 対称モード | C_4 : 90 度の回転対称モード |
| D_2 : 2 軸 (x, y 軸) 対称モード | D_2^2 : 2 軸 ($s-s, t-t$ 軸) 対称モード |
| D_1 : x 軸対称モード | D_1^2 : $s-s$ 軸対称モード |
| D_1^3 : y 軸対称モード | D_1^4 : $t-t$ 軸対称モード |
| C_2 : 180 度の回転対称モード | C_1 : 非対称モード |

各々の変形モードを図-2 に示す (実線は変形後, 破線は変形前の形状をそれぞれ表す).

長方形の対称性は, D_4 の部分群である D_2 により表される. その変形モードは, 正方形の変形モードの一部であり, D_2 部分群である $D_2, D_1, D_1^3, C_2, C_1$ により分類される.

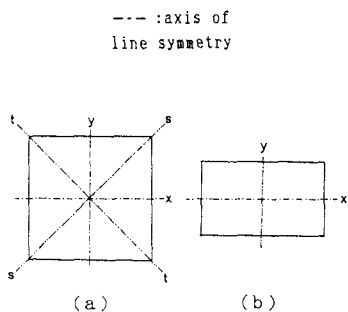


図-1 正方形の対称性

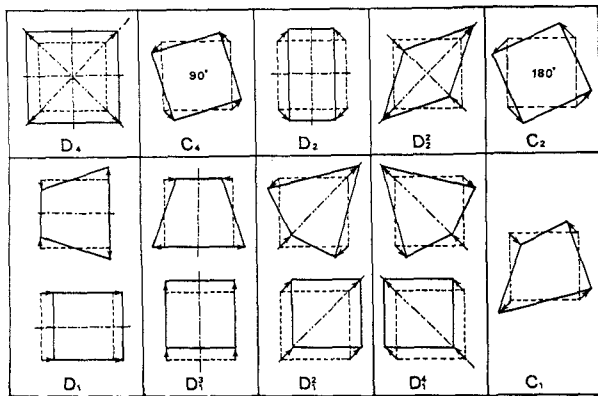


図-2 正方形の変形パターン

(2) ブロック対角化

離散化された平面構造物の剛性方程式を

$$\mathbf{F}(\mathbf{f}, \mathbf{u}) \equiv \mathbf{f} - \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{0} \dots\dots\dots (2)$$

により表す. ここで, \mathbf{f} は荷重ベクトル, \mathbf{u} は変位ベクトル, \mathbf{K} は剛性行列である. 構造物の対称条件として (1) 形状が幾何学的対称性を有すること, (2) 剛性分布および境界条件が対称性を有すること, (3) 要素分割が対称性を損なわない⁴⁾ことを考える. このような対称性を有する構造物の支配方程式は, 適当な座標変換により, 数個の独立な式に分解 (ブロック対角化) できることが知られている⁴⁾⁻⁹⁾.

例えば、 D_4 -不変な構造物の解 \mathbf{u} の空間は、6 個の部分群 $D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^3$ に対応する 6 個の互いに直交する部分空間に分解できる^{4),7)} (個々の部分空間は厳密には、群の既約表現に対応する。しかし、群の表現論に関する説明を省くために、この論文では個々の部分空間に便宜的に部分群を対応させている)。部分空間毎に分解するために、局所座標変換

$$\mathbf{u} = H\mathbf{w} = \sum_{\mu} H^{\mu}\mathbf{w}^{\mu}, \quad \mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^3 \dots \dots \dots (3)$$

を考える。ここで、対称座標系

$$\mathbf{w} = [(\mathbf{w}^{D_4})^T, (\mathbf{w}^{C_4})^T, (\mathbf{w}^{D_2})^T, (\mathbf{w}^{D_2^2})^T, (\mathbf{w}^{D_1})^T, (\mathbf{w}^{D_1^3})^T]^T \dots \dots \dots (4)$$

と局所座標変換行列

$$H = [H^{D_4}, H^{C_4}, H^{D_2}, H^{D_2^2}, H^{D_1}, H^{D_1^3}] \dots \dots \dots (5)$$

とともに、各部分群に対応する成分 \mathbf{w}^{μ} と H^{μ} から成り立っている (局所変換行列 H の具体形については文献 6),7) を参照)。

対称座標系 \mathbf{w} における剛性行列 \tilde{K} は

$$\begin{aligned} \tilde{K} \equiv H^T K H &= \text{diag}(\tilde{K}^{D_4}, \tilde{K}^{C_4}, \tilde{K}^{D_2}, \tilde{K}^{D_2^2}, \tilde{K}^{D_1}, \tilde{K}^{D_1^3}) \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{K}^{D_4} & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & \cdot & \\ 0 & & & & & \tilde{K}^{D_1^3} \end{pmatrix} \dots \dots (6) \end{aligned}$$

$$\tilde{K}^{\mu} = (H^{\mu})^T K H^{\mu}, \quad \mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^3 \dots \dots \dots (7)$$

となり、6 個の対角ブロック \tilde{K}^{μ} からなるブロック対角行列 \tilde{K} になる。特に、 H^{D_1} と $H^{D_1^3}$ を

$$\tilde{K}^{D_1} = \tilde{K}^{D_1^3} \dots \dots \dots (8)$$

が成り立つように選択できることが文献 6) で示されている。変換式 (3) により、剛性方程式 (2) は

$$(H^{\mu})^T \mathbf{f} = \tilde{K}^{\mu} \mathbf{w}^{\mu}, \quad \mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^3 \dots \dots \dots (9)$$

とブロック毎に分解できる。全体座標系における解 \mathbf{u} は各ブロックの解の重ね合わせとして

$$\mathbf{u} = \sum_{\mu} H^{\mu} \mathbf{w}^{\mu} = \sum_{\mu} H^{\mu} (\tilde{K}^{\mu})^{-1} (H^{\mu})^T \mathbf{f}, \quad \mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^3 \dots \dots \dots (10)$$

により求められる。

D_2 -不変な構造物の解 \mathbf{u} の空間は、 D_2 の部分群である D_2, C_2, D_1, D_1^3 に対応する 4 個の互いに直交する部分空間に分解される。対称座標系 \mathbf{w} における剛性行列 \tilde{K} は

$$\tilde{K} \equiv H^T K H = \text{diag}(\tilde{K}^{D_2}, \tilde{K}^{C_2}, \tilde{K}^{D_1}, \tilde{K}^{D_1^3}) \dots \dots (11)$$

となり、4 個の対角ブロックからなるブロック対角行列になる。局所座標変換式 (3) により、剛性方程式 (2) は 4 個に分解できる。

3. 局所座標変換の効率化

ブロック対角化法では、全体座標系の剛性行列 K よりもサイズが小さいブロック行列 \bar{K}^M を数値計算に用いるので、逆行列を求める演算コストは著しく減少する。しかし、その代償として、局所座標変換式 (3) によりブロック行列を計算するコストが余分にかかることになる。そこで、この章では局所座標変換を効率良く行う一手法を提案する。(ここでは主として正方形板について議論を進める)。

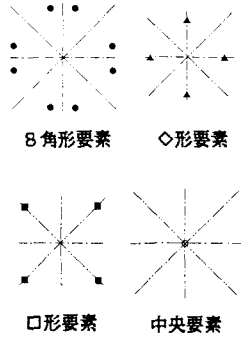


図-3 対称要素 (orbits)

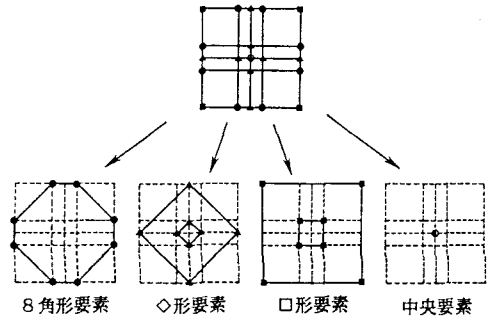


図-4 対称要素による節点の分解

	D_4	C_4	D_2	D_2^i	D_1	D_1^i
8角形要素						
◇形要素						
□形要素						
中央節点					-	+

図-5 対称要素の変形パターン

(1) 対称要素 (orbit)

式 (5) の局所座標変換行列 H を求めるにあたり、節点の orbit 分解の方法を用いる⁶⁾。全節点を図-3 に示す D_4 -不変な 4 種類の節点の集合に分解し、その集合毎に行列 H の列ベクトルを定める。この集合を以後対称要素と呼ぶこととする (数学では orbit と呼ばれている)。例えば、図-4 に示す正方形板の全節点は、

それぞれ1個ずつの8角形要素と中央要素とそれぞれ2個ずつの◇形要素と□形要素，合計6個の対称要素に分解できる。\$D_4\$-不変な対称要素の変形モードは\$D_4\$の部分群により表される。この変形モードをそれぞれの対称要素と部分群毎に分類し，図-5に示した。この各変形モードを行列\$H\$の各列ベクトルとし，この列ベクトルを各対称要素毎に集めることにより，式(5)の\$H^\mu\$ (\$\mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^3\$)が求まる。このように定義した\$H^\mu\$は非常にスパースになるので，数値解析において有利である。

(2) 要素毎の座標変換

全体剛性行列\$K\$を含む変換式(7)により，ブロック対角行列\$\tilde{K}^\mu\$を直接計算するのは演算効率が非常に悪い。そこで，取り扱う行列のサイズが小さくでき，演算効率が高い，各要素毎に局所座標変換した後に重ね合わせる方法⁸⁾を採用する。

ある要素の剛性行列を

$$K^e = (K_{p_i p_j}^e \mid i, j = 1, \dots, M) \dots\dots\dots (12)$$

と各節点に対応するブロックに分解する。ここに，\$i\$と\$j\$は要素座標系における節点番号，\$p_i\$と\$p_j\$は全体座標系における節点番号，\$M\$は要素の全節点数をそれぞれ表す。また，\$H^\mu\$と\$\tilde{K}^\mu\$も

$$H^\mu = (H_{ij}^\mu \mid i = 1, \dots, N_P; j = 1, \dots, N_O) \dots\dots\dots (13)$$

$$\tilde{K}^\mu = (\tilde{K}_{ij}^\mu \mid i, j = 1, \dots, N_O) \dots\dots\dots (14)$$

とブロックに分解する。ここで，\$N_O\$は対称要素の数を，\$N_P\$は総節点数をそれぞれ表す。ブロック\$H_{ij}^\mu\$の添え字\$i\$は節点変位番号に，\$j\$は対称要素番号に対応している。

全体剛性行列\$K\$を含む変換式(7)は，

$$\tilde{K}_{ij}^\mu = \sum_{e=1}^{N_e} \sum_{k=1}^M \sum_{l=1}^M \tilde{K}_{q_k q_l}^{e\mu} \delta_{i q_k} \delta_{j q_l}, \quad \mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^3 \dots\dots\dots (15)$$

$$\tilde{K}_{q_k q_l}^{e\mu} = \left(H_{q_k p_k}^\mu \right)^T K_{p_k p_l}^e H_{q_l p_l}^\mu \dots\dots\dots (16)$$

という要素毎の変換の和として表される。ここで，\$N_e\$は全要素数を，\$q_k\$と\$q_l\$は節点\$k\$と\$l\$の所属する対称要素番号を，\$\delta_{i q_k}\$と\$\delta_{j q_l}\$はクロネッカーのデルタ記号をそれぞれ示す。\$\tilde{K}^\mu\$が対称行列であるという条件と，\$\tilde{K}^{D_1}\$と\$\tilde{K}^{D_1^3}\$が同一であるという条件式(8)を用いると，式(15)の計算コストをさらに低減できる。

(3) 要素の orbit 形成

正方形の構造物を形成する要素にも図-6に示すように，8角形要素，◇形要素，□形要素，中央要素という4種類の\$D_4\$-対称な基本要素が存在し，それぞれorbitを形成している(要素のorbit形成に関する詳細は文献10)を参照)。同じorbitに所属する幾つかの要素の剛性の寄与\$\tilde{K}_{q_k q_l}^{e\mu}\$は，対称性により，同じ値になる性質がある。

部分群\$\mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2\$に対しては，orbitに所属する全ての要素の剛性の寄与と分\$\tilde{K}_{q_k q_l}^{e\mu}\$が同じ値になる。従って，1つの要素の寄与と分を計算し，orbitを構成する要素数にあたる倍率をかけると，orbit全体の剛性の寄与と分が求められる。一方，部分群\$\mu = D_1, D_1^3\$に対しては，orbitに所属する全ての要素の内，高々2個の要素の寄与と分を求めればよい。剛性の寄与と分を計算すべき要素と，それにかけるべき倍率を\$4 \times 4\$と\$5 \times 5\$に分割した正方形板を例に取り図-7に示した。部分群\$\mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2\$に対しては板の約\$1/8\$，\$\mu = D_1, D_1^3\$に対しては板の約\$1/4\$だけの寄与と分だけを計算すればよく，計算コストを大いに低減できる。

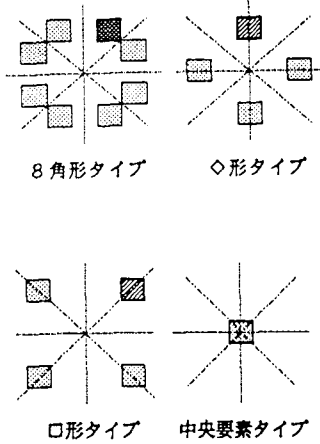


図-6 要素の orbit 形成

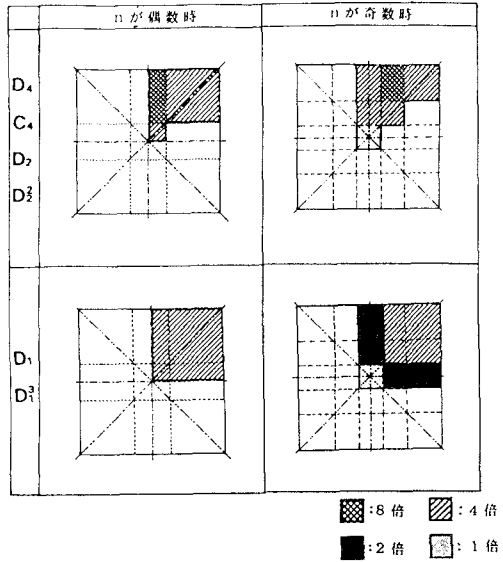


図-7 剛性の寄与分を計算すべき要素

(4) 非対称荷重

構造物の変形の対称性を利用し、その一部を切り出して解析する従来の解析法は、その諸性状と荷重がともに対称性を持つ場合にだけしか適用できない。一方、ブロック対角化法では、非対称な荷重に対しても、剛性方程式(2)をブロック分解することにより、幾何形状の対称性を利用できる。

式(7)の \bar{K}^μ の計算に先立ち荷重ベクトル $(H^\mu)^T f$ を計算する。ある $(H^\mu)^T f$ がゼロである場合には、ブロック分解した剛性方程式(9)の解 w^μ はゼロになるので、 \bar{K}^μ の計算を省略できる。

(5) 対角ブロック行列の帯行列化

帯行列となる性質は剛性行列 K から対角ブロック行列 \bar{K}^μ に遺伝する⁶⁾。対角ブロック行列 \bar{K}^μ の成分を板の内側から外側(またはその逆に)に向かって順番に配置すると、帯の幅を狭くでき、掃き出し計算コストを低減できる。

4. 数値解析結果

図-8に示す非対称な線荷重を上端に載荷された D_4 -不変な正方形板のブロック対角化解析を行う。板厚は一定、材料は均質とし、境界条件は隅角4点をヒンジ固定とする。縦横均等に $n \times n$ に要素分割し、1次の正方形要素(4節点のSerenpidity要素)を用いた。掃き出し計算は対称帯行列に対する修正コレスキー法により行った。

図-9に分割数 $n = 4$ の場合のこの板の剛性行列 K を示す。ここで、 (\bullet) はゼロでない成分を、 (\cdot) はゼロ成分をそれぞれ表す。この行列 K はバンド幅が殆ど一定の帯行列になっている。局所座標変換式(3)により、行列 K は図-10に示すように、ブロック対角行列 \bar{K} に変換できた。

分割数 $n = 6$ の場合に対称座標系の6組の剛性方程式(9)を解き、各部分群毎の解 $H^\mu w^\mu$ ($\mu = D_4, C_4, D_2, D_2^2, D_1, D_1^2$)を求め、図-11に示した。ここに、変形の縮尺が各部分群毎に異なるので、図中に縮尺の大きさを付記した。さらに、各部分群毎の解 $H^\mu w^\mu$ を重ね合わせ、図-12に示す解 u を得た。この解は、全体座標系の剛性方程式(2)を直接解くことにより得た解と当然一致している。

ブロック対角化法と従来の方法による計算時間の比較を図-13に示す。横軸は分割数($2 \leq n \leq 9$)を、縦軸は従来の方法による $n = 9$ に対する計算時間により正規化した各手法の所要計算時間をそれぞれ示す。ブ

ブロック対角化法に対しては、計算機を1台用いた場合と6台並列に用いた場合との2通りを考えた。計算機を1台用いるブロック対角化法は従来の方法よりも2割程計算時間が少なくなっている。計算機を6台並列に用いた場合には計算時間が従来の方法の約1/3になっており、ブロック対角化法の演算効率の高さを示している。ブロック対角化法では n の奇遇により、板の対称要素分解の組成が異なるために、計算時間が n に依存している。

ブロック対角化法と従来の方法による所要配列メモリの比較を図-14に示す。縦軸は $n=9$ に対する従来の方法の所要メモリにより正規化した各手法の所要メモリを示す。従来の方法に比べ、ブロック対角化法の所要メモリは約1/3になっており、その有利さを示している。

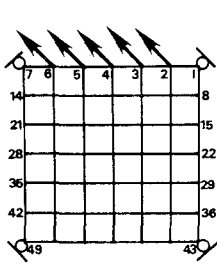


図-8 正方形板

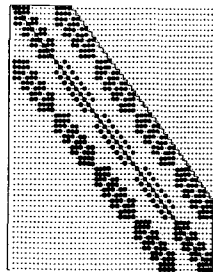


図-9 剛性行列 K

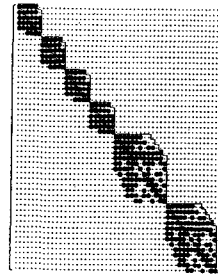


図-10 ブロック対角化した剛性行列 \tilde{K}

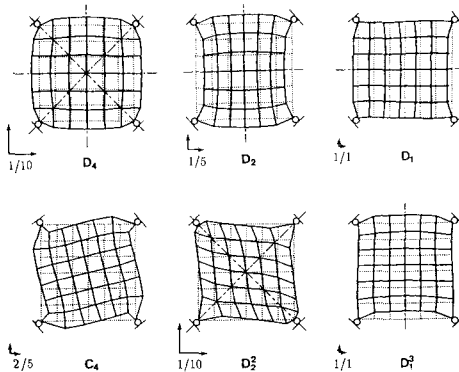


図-11 部分群毎の解 $H^\mu w^\mu$ の変形モード

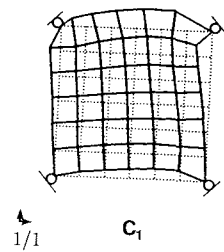


図-12 $u = \sum_{\mu} H^{\mu} w^{\mu}$

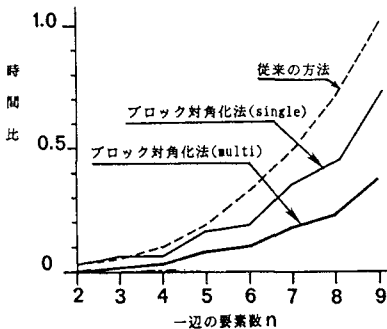


図-13 計算時間と分割数 n との関係

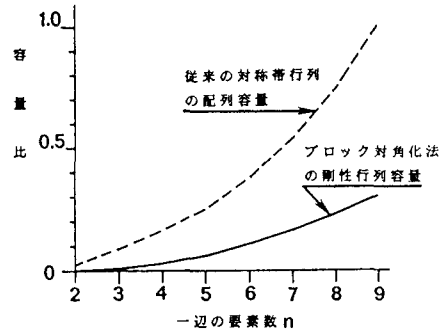


図-14 所要メモリと分割数 n との関係

5. 結語

本論文では、正方形の平面構造物のブロック対角化解析法を提案し、数値解析によりその有利さを明らかにした。この手法を球殻シェル等のもっと複雑な構造物に適用することが今後の課題である。

参考文献

- 1) Jones, R.E. and Stome, D.R., A survey of analysis of shells by the displacement method, *Air Force Inst. Tech., Wright-patterson A.F. Base, Ohio*, Oct. 1965.
- 2) Zienkiewicz, O.C., On the principle of repeatability and its application in analysis of turbine and pump impellers, *Int. J. Num. Meth. Engrg*, 9, 445-452, 1972.
- 3) Weaden B.L. van der, *Group Theory and Quantum Mechanics*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 214, Springer, 1980.
- 4) Fujii, H., and Yamaguti, M., Structure of singularities and its numerical realization in nonlinear elasticity, *J. Math. Kyoto Univ.*, 20, 498-590, 1980.
- 5) Zloković, G., *Group Theory and G-vector Spaces in Structural Analysis*, John Wiley and Sons, 1989.
- 6) Murota K. and Ikeda K., Computational use of group theory in bifurcation analysis of symmetric structures, *Society for Industrial and Applied Mathematics, J. Sci. Stat. Comput.*, 12(2), 273-297, 1991.
- 7) Ikeda K., and Murota K., Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg*, 86(2), 215-243, 1991.
- 8) Healey, T.J., and Treacy, J.A., Exact block diagonalization of large eigenvalue problems for structures with symmetry, *Int. J. Numer. Meth. Engrg*, 67, 257-296, 1991.
- 9) Dinkevich, S., Finite symmetric systems and their analysis, *Int. J. Solids Structures*, 27(10), 1215-1253, 1991.
- 10) Ikeda, K., Ario, I., and Torii, K., Block-diagonalization analysis of symmetric plates, *Preprint*, 1991.

(平成3年 12月 19日 受付)