構造工学論文集　Vol.38A（1992年3月）　　土木学会

任意2次元領域の四辺形分割

GRID GENERATION OF QUADRILATERAL ELEMENTS IN ARBITRARY 2D DOMAIN

谷口　健男*　　福岡　康文**
By Takeo TANIGUCHI , Yasufumi FUKUOKA

The aim of this investigation is to propose a method to divide an arbitary 2 dimensional domain into quadrilateral elements.The method is based on the Delaunay triangulation, and it accepts only node-infomations as its input data. All triangles after the Delaunay triangulation are automatically trasformed into quadrilaterals, and their geometry is improved using the Laplacian method. The method has functions to treat multiple exterior and interior boundaries and fracture lines. Node density inside of the domain can be easily changed according to the interactive indication of the user. The method is developed for general purposes, and, therefore, it is easily introduced as a grid generator for structural analysis, fracture system, flow analysis and so on.

1．まえがき

複雑な境界形状を持った2次元領域の有限要素解析において、その前処理にあたる要素自動分割法の開発が課題となってきている。また、最近では多種多様の系の解析が行われるようになり、数値解析モデルもそれに対応するものが必要になっている。例えば、岩盤や鉄筋コンクリートなど破壊面を持つものの解析を行うためには、破壊面あるいはき裂線を考慮した要素分割が必要となってくる。そこで、本研究では上のような背景を考慮して、次のような諸事項を満足させる要素自動分割法を考える。

（1）境界形状は任意である。
（2）複数個の境界を持ってもよい。
（3）対象が複合構造系でもよい。
（4）破壊面、き裂線といった1次元要素を同時に生成できる。
（5）四辺形要素に分割する。

要素分割法の代表的なものには、ブロッキング法、四分木法、デラウニー法[1]などがある。四分木法、デラウニー法による生成要素の形状は共に三角形であり、一方ブロッキング法では、適切なメッシュ関数を作れば四辺形、三角形要素を生成できる。

対象領域の境界形状が複雑であればある程、三角形分割を採用せざるを得ないのが現状である。しかしな

*　工博　岡山大学教授　工学部共通講座　（〒700　岡山市津島中3－1－1）
**　岡山大学大学院　（〒700　岡山市津島中3－1－1）

がら、同数の節点を用いて対象を四辺形で分割した場合に比べて、約２倍の要素を生成してしまう。この結果、有限要素解析の段階での要素剛性の計算時間が約２倍必要となる。また、いま一つの三角形要素の欠点は解の精度にあるといわれている。以上の考察と、今日では任意領域の四辺形分割の要求が高まっていることより、本研究では上に挙げた諸事項を満足する四辺形要素の生成法を提案する。

２．デラウニー法による四辺形分割の考え方

分割法の基本としては、上述したブロッキング法、四分木法、デラウニー法といった諸手法が考えられる。ブロッキング法は対象系の形状が複雑になればなる程、入力データが増加する欠点を有している。四分木法は点配置をグリッド状に配置することにより、本研究の目的、すなわち四辺形分割に適していると考えられるが、その最大の欠点は境界形状の認識にある。言い換えると、この手法を適用するには、その適用以前に対象とする領域の形状を入力しなければならないという欠点を持っている。一方、デラウニー法は文献３に提案されているように任意２次元領域を対象とすることができる点、そして、得られた三角形要素の形状は幾何学的に好ましい点で他の方法に比べて優れている。よって、本研究ではデラウニー法を基本として四辺形分割法を提案することにする。

ここで提案するデラウニー法による四辺形要素分割は、下のような流れで行われる。

ステップ１　データの入力
ステップ２　三角形分割（修正デラウニー法）
- 粗い要素分割
- 細かい要素分割

ステップ３　三角形から四辺形への変換
ステップ４　生成された四辺形要素の形状の修正（ラプラシアン法[2]）

以下において、上記各ステップについて詳細に説明を加える。

１）データの入力について

デラウニー法は節点が配置されていることが前提条件であり、入力時に必要なデータは節点の情報（座標位置）のみである。しかし、ここでは対象領域が凹凸を有する任意２次元領域としているので、さらに次のような情報が必要となる。すなわち、節点総数、境界個数、き裂数、各境界上の節点数（第１番目に外部境界）及び節点番号、各き裂線上の節点数及び節点番号、節点座標値（最初に外部境界上の節点、ついで各内部境界上の節点）である。ただし、外部境界と内部境界との区別をするための情報として、外部境界上の節点は時計回り、内部境界上の節点は反時計回りに入力する。境界上の節点配置によって境界周辺の要素形状に大きな影響を及ぼすので、節点配置はできるだけ等間隔に分布させる方がよい。き裂線の入力は、各線について１端より他端に向いて節点番号を入力することにする。なお、節点番号は任意であって、ユーザ自身によって番号付けられ、そして入力された節点以外自動的に発生された節点については、（入力された最終節点番号＋１）より順に番号が付けられることになる。

２）三角分割について

三角形分割には修正デラウニー法[3]を使用している。修正デラウニー法とは、デラウニー法ではできない境界線の局部的な凹部や、領域内部に位置する内部境界の内側といった部分の認識ができ、解析対象領域を厳密に要素分割する方法である。その流れは、次のようである。

- すべての節点を包括する、スーパートライアングルと呼ばれる三角形を設定する。
- １）に述べたような情報をもとに、スーパートライアングル内を三角形で満たす。この時、境界は生成されていて、境界外部（あるいは内部境界の内部）に不用な三角形が存在している。
- 領域内部の三角形を認識し、それ以外の不用な三角形を取り除く。領域内の三角形と不用な三角形は、

三角形の頂点番号の格納順序で判断し、その順序は境界節点の入力順序によって決定している。以上により任意領域の分割が可能となる。

ステップ２の三角分割プロセスは、粗い要素分割と細かい要素分割とに分けられる。

［粗い要素分割］

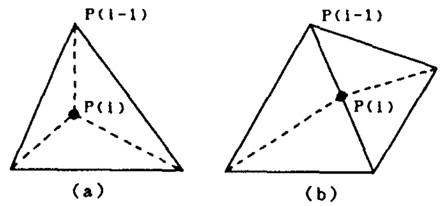
（１）境界の生成

与えられた任意２次元領域について、修正デラウニー法を用いて三角形分割を行う。この時、三角形生成と同時に境界上節点の情報を利用し、境界を認識させ三角形の作り直しをする。この作業によって意図した領域での境界生成を行う。（詳しくは文献３参照）

（２）１次元要素の生成

１つの部分領域内、もしくは複数個の部分領域にわたって複数個のき裂線が入っている場合、要素分割後においても、これらのき裂線は要素分割線として生成されていなければならない。このき裂線は筆者らが既に提案した境界生成法を以下のように修正して生成する。

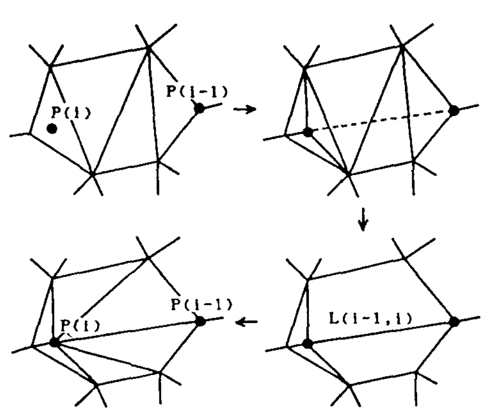
１つのき裂線を構成するｎ個の節点、例えば｛Ｐ（ｉ）；ｉ＝１，ｎ｝の順番が認識できていると仮定する。簡単のために節点Ｐ（ｉ）が上記の順にき裂線上に位置しているものとする。ここで、境界上の節点とき裂線上の（ｉ－１）個の節点が既に入力されて三角分割が行われていると仮定し、第ｉ番目の節点Ｐ（ｉ）を新たに設定する。節点Ｐ（ｉ）は既に三角形分割された何れかの三角形内部もしくは分割線上に位置することになる。もし、Ｐ（ｉ）を含む三角形（通常１個であるが、もしその節点が分割線上にあれば分割線を共有する２個の三角形を考える）の頂点の１つがＰ（ｉ－１）であれば図－１（ａ），（ｂ）に示すように三角形をさらに小三角形に細分割することでＰ（ｉ－１）とＰ（ｉ）間に位置する境界線を発生させ得ると同時に三角形に分割できる。



図－１　細分割の方法

次に節点Ｐ（ｉ）を含む三角形のどの頂点もＰ（ｉ－１）ではない場合を考える。このとき節点Ｐ（ｉ）を含む三角形とＰ（ｉ－１）を頂点とする三角形との間に何個かの三角形が存在することになる。これら２節点間を線分（以降この線分をＬ（ｉ－１，ｉ）で示す）で結ぶためにはこの線分で横切られる全ての線を排除しなければならない。Ｌ（ｉ－１，ｉ）で横切られるこれらの線は、き裂線として設定された辺でないことは明かでらる。以上のことよりＬ（ｉ－１，ｉ）によって横切られる線は全てき裂線以外の線でしかないことがわかる。従ってそれらはＬ（ｉ－１，ｉ）を生成する段階で取り除いてもよい。

Ｐ（ｉ－１）とＰ（ｉ）との間に位置する三角形集合で共通辺（二個の三角形に共通する辺）を取り除くと多角形ができる。この多角形においてＬ（ｉ－１，ｉ）を設定し２個の部分（一般には多角形）に分割する。ついで、それぞれの部分を三角形分割すると２点Ｐ（ｉ－１）とＰ（ｉ）間のき裂線を発生させ同時に三角形分割できることになる。（図－２参照）この作業を繰り返せば意図したき裂線の生成ができる。　き裂線が複数個あり、互いに交差しているようなモデルも考えられるが、そういった場合は交差する位置に必ず節点を置くことにしている。また、複数の領域を持つ対象でき裂線が境界線と交差する場合についても、き裂線と境界線との交点に必ず節点を配置することでうまく要素分割できるようにしている。



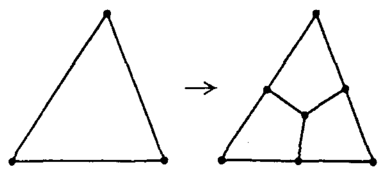
図－２　き裂線生成と細分割

［細かい要素分割］

細かい要素分割とは、領域内部に節点を自動発生し、その節点を用いて細分割を行うことである。デラウニー三角分割法は、与えられた節点集合に対してできる限り正三角形に近い形状の要素を生成しようとする性質をもっている。従って、領域内部に格子状に節点を設定すれば、これら格子点集合を用いて生成される三角形要素の形状は、直角三角形になることは明かである。この性質を利用するために、節点の自動発生ではグリッド状に点を発生させることにする。個々の部分領域内において設定したい節点間隔によって格子間隔を利用者に入力してもらい、その格子で対象部分領域全体を覆い領域内に位置する格子点だけを残す。内部に生成される要素の数や形状は、ここでの格子間隔の設定値に大きく左右されるので、この値には十分注意す必要がある。この操作を繰り返し行うことにより、部分領域の更に内部に、より高密度な節点配置を行うようにも設計している。

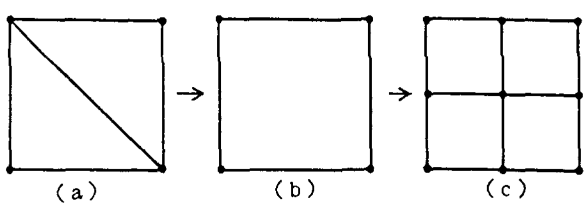
3）三角形から四辺形への変換について

この段階までに存在しているのは三角形要素だけである。これを単純に四辺形要素に変換するのであれば、図－3に示すように、1つの三角形に各辺の中点を1点づつ、内部の重心位置に1点を設定し、1つの三角形を3個の四辺形にすればよい。しかし、これではいたずらに要素数を増やすだけである。（三角形の数をn個とした場合生成した四辺形の数は3n個となる。）そこで2個の三角形を組み合わせて1つの四辺形を作ることを考える。（図－4（a）、（b）参照）しかし、三角形を組み合わせることによって、常に全てを四辺形にするのには無理がある。それは三角形の数が奇数の場合や、組み合わせによって凹の四辺形ができる場合などがあるからである。そこで、組み合わせを許す2個の三角形の形状が問題となってくる。（節点配置をグリッド状としているので領域中心部ではあまり関係なく、問題となるのは境界線周辺とき裂線周辺の要素についてである。）ここで、2個の三角形を結合して1個の四辺形を作る判断基準として、次のようなものを提案する。すなわち、それぞれ向かい合う三角形要素のうち一方の要素をA、他方をBとするとき、要素Aの最大辺Cが要素Bの最大辺でもあれば、その最大辺を除き1つの四辺形とする。判定基準を満たす全ての三角形要素対についてこの作業を行う。



図－3　三角形から四辺形への変換

上の作業終了時に存在している要素の形状は、四辺形のみである場合と四辺形と三角形とが混在する2通りが考えられる。四辺形のみの場合はここで作業を終わる。しかしながら、三角形が残っている場合は、それら三角形を四辺形要素に変換しなければならない。1つの三角形を四辺形に変換するには、上で述べた方法（図－3参照）により、1個の三角形より3個の四辺形を作る方法を採用すればよい。この場合、その対象となる三角形要素の各辺上に中点を発生させることになるが、要素同士は各辺を共有しているので、三角形要素の隣に四辺形要素があるような時、その要素の辺に不用な節点が生じることになる。この不用な節点の処理方法としては2通りの方法が考えられる。1つは、不用節点のある辺の対辺に同様に中点を発生させ、それらを結び1つの四辺形を2つの四辺形に分割する。その作業を境界線を形成している四辺形要素まで繰り返す方法。（但し、途中で三角形要素に突き当たれば作業を終わる）しかし、この方法では領域内部に部分的に大小の四辺形要素が存在するうえ、形状も不揃いな部分が出てくると予想される。もう1つの方法は、三角形要素については3つの四辺形要素に分割し、四辺形要素については4個の中点と重心点を発生させ4個の四辺形要素に分割する方法である。（図－4（b）、（c）参照）この方法は、要素数は前者に比べ増えるが要素形状は良くなる。今回提案する方法では、以上の理由より後者を採用している。



図－4　三角形の組合せと四辺形の分割

4）四辺形要素の形状修正について

ここまでで得られた四辺形要素は、２個の三角形を判定条件によって組み合わせられた四辺形を４個に分割して得られた四辺形要素や、三角形要素を３つに分割することによって生成された四辺形要素であり、場合によっては偏平な要素を含んでいることが想像される。そこで、領域内部に位置する節点をその個々の点が関与する周辺要素の面積重心位置に移動させ、要素のゆがみを修正する。なお、この方法では要素の面積を重みとしているので、要素同士の面積の大小の差も緩和されることが期待される。

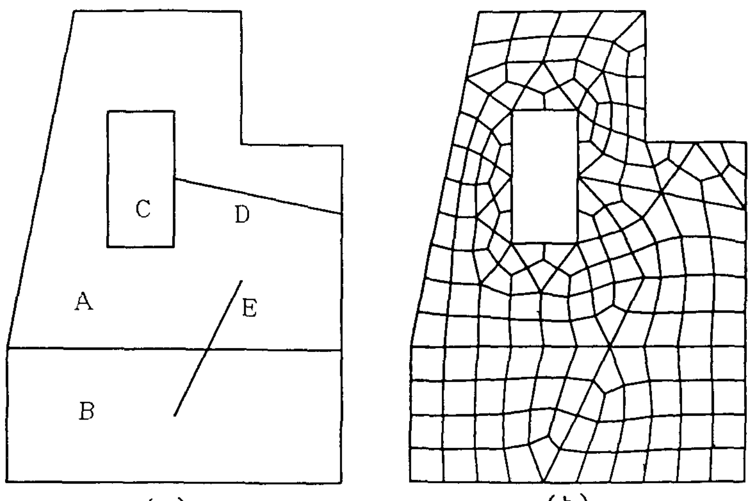
3．適用例

ここでは、前節で提案した方法を用いたいくつかの分割例を示す。

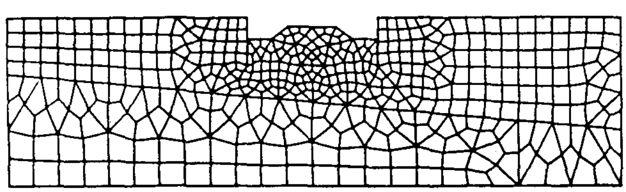
図−5は、（a）に示すように、大きくは2つの領域（A，B）より成り立ち、その内部に１個の穴（C）と、２本のき裂（D，E）が、存在する。従って、この事例は領域A、Bを指定する為に２つの外部境界と、穴Cを指定する為の内部境界１つ、さらにき裂線より構成されることになり、その分割結果は（b）のようになる。なお、この場合、領域AとBでは節点密度は同じにしている。

図−6は、外部境界を２つ持つ事例であり、上部と下部において内部節点の密度を変えて要素分割を行っている。

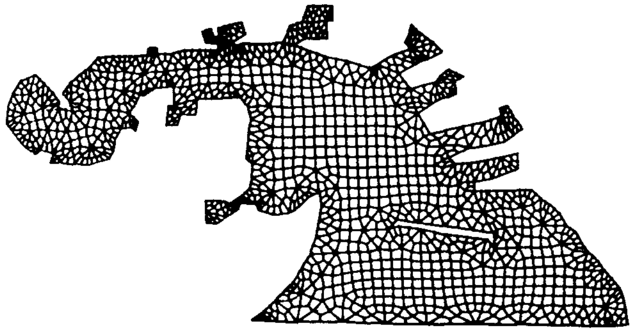
図−7は、１個の複雑な外部境界と、１個の内部境界を持つ例である。
以上の適用例より、ここに提案した方法はまえがきに記した全ての条件を満足していることが分かる。



number of nodes 192
図−5　き裂線を持つ領域の分割例　　number of elements 163



number of nodes 499
図−6　任意領域の分割例　　number of elements 450



図－７　清水港の分割例　　number of elements 1376

4．あとがき

本研究では修正三角分割法を利用し、複数境界やき裂線などを持ち得る領域の四辺形分割法を提案した。この方法はデラウニー法を基本としているので、対象形状のいかんを問わず、四辺形分割が可能であり、また、領域内部への節点配置をグリッド状としていることより、得られた四辺形要素等の幾何学形状も一般に良好である。よって、この手法は任意２次元領域の要素分割法として適していると言える。なお、２つの三角形要素を１つの四辺形要素に変換する際、“２個の三角形の共有辺がそれぞれについて最大辺であること”という判定基準を採用したが、この点についてはまだ改良の余地があると思われる。また、生成される四辺形要素の形状の良否は、内部領域に対するグリッド間隔に大きく支配される。領域の内部においては、示した諸例でも分かるように、非常にきれいな四辺形が生成されるが、境界辺・き裂線近傍ではグリッド間隔と境界辺・き裂線上の節点間隔のちがいにより、上に示した判定条件を満足しない三角形が多く発生し、必然的に１つの三角形を３個の四辺形に分割してしまう結果となる。これを防ぐためには、グリッド間隔を変える必要がある。

なお、この方法を３次元体表面に対して拡張すれば、３次元境界要素法のための要素自動分割法として、そのまま利用できると考えられる。

参考文献

1）. S.W.Sloan, “A fast algorithm for computing Delaunay triangulations in the plane”, Advances in Engineering Software, Vol.9 ,No1,pp.34-55,1987

2）. Haber,R,etc, “A general two-dimensional,graphical finite element preprocessor utilizing discrete trans-finite mapping” ,Int.J.Nun.Meth.Eng,Vol.17,pp1015-1044,1981

3）. 谷口健男、太田親、“直線辺で構成される任意２次元領域へのデラウニー三角分割の適応”、土木学会論文集,No.432,pp69-77,1991.

(1991年9月30日受付)