

ニュートン法系解法による
部分修正系の固有値解析

EIGENSOLUTION OF LOCALLY MODIFIED SYSTEMS BY NEWTON-LIKE METHOD

片山 拓朗^{*}、宮村 重範^{*}、柏木 光博^{**}、平井 一男^{***}
Takurou KATAYAMA, Shigenori MIYAMURA, Mitsuhiro KASHIWAGI, Itio HIRAI

This paper proposes an analytical procedure for the eigensolutions of locally modified systems by the Newton-like method. The fundamental equation is presented in a compact matrix form of the order of the modified parts independent of the order of the original system. This approach is useful for modified systems with many degrees of freedom, for which relatively few degrees of freedom are involved in the modifications. The accuracy and stability of this method are confirmed using several numerical examples with comparisons to the Householder bisection method and the Sturm sequence method for the locally modified equation.

1. 序

設計変更等により系の一部分が変更された時、これを最初から解析し直すのではなく、修正前の系(=システムA)の情報を用いて効率よく解析することを再解析という。修正前の設計における固有値、固有ベクトル等の情報を利用した便利な再解析の手法があれば、部分的に設計変更された系(=システムB)の固有値問題の解析にとって便利である。システムBの固有値問題は、修正前の固有値および固有ベクトルを利用するが、修正部のマトリクス次数に縮小された基礎式によって解析できる¹⁾。この基礎式は修正前の固有値付近が不連続点となる関数であるので、初期値を十分に正解値に近づけて出発する局所的解析に適した微係数を用いるニュートン・ラフソン法等の方法を用いても安定した演算を望むことは容易でない。逆線形補間法および多項式近似法等の逐次近似法による解法でも安定に解を求めることは困難であり、また仮に解が求められたとしても数個ランダムに得られることもあることを数値計算において経験している。

本論文は、このような再解析における固有値問題について、部分修正部の行列次数に縮小された式による効率よい解析法を提案することを目的としている。先に全ての固有値を求める問題については、一般化して誘導したデュラン・カーナー法系解法に基づくシステムBの固有値解析法を提案したが⁴⁾、この方法を変形し、低次からあるいは高次からいくつかの固有値を求める問題に応用し、収束性の良い解法を提案している。

例題により、提案のニュートン法系解法を、部分修正系スツルム法^{5)・6)}およびハウスホルダー・スツルム

* 工修 佐世保重工業(株)鉄構設計部 (〒857 佐世保市立神町1)

** 工博 九州東海大学教授 工学部建築学科 (〒862 熊本市大江町渡鹿223)

*** 工博 熊本大学教授 工学部土木環境工学科 (〒860 熊本市黒髪2-39-1)

2分法と比較し、提案法の有用性を述べる。

2. 理論

剛性マトリクス $\mathbf{K}$ および質量マトリクス $\mathbf{M}$ （システムA）の一部分が修正され、それぞれが $\mathbf{K} + \Delta\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{M} + \Delta\mathbf{M}$ （システムB）になった時、 λ をシステムBの固有値に、 $\mathbf{I}$ を単位マトリクスとすると、以下のシステムBに対する特性方程式 $d(\lambda)$ を得る。

$$\begin{aligned} d(\lambda) &= |\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M} + \Delta\mathbf{K} - \lambda\Delta\mathbf{M}| \\ &= |[\mathbf{I} + [\Delta\mathbf{K} - \lambda\Delta\mathbf{M}]\mathbf{G}][\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}]| \\ &= |\mathbf{Q}| |\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ここに、

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + [\Delta\mathbf{K} - \lambda\Delta\mathbf{M}]\mathbf{G} \quad (2)$$

$$\mathbf{G} = [\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}]^{-1} \quad (3)$$

である。システムAの第 i 、 j 固有値 λ_{A1} 、 λ_{Aj} に対応する固有ベクトル ϕ_i 、 ϕ_j が

$$\phi^T \mathbf{M} \phi_j = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij}: \text{クロネッカーの}\delta) \quad (4)$$

のように正規化された固有ベクトルを列ベクトルにもつマトリクスを Φ とすると、システムAは

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I}, \quad \Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Lambda_A \quad (5)$$

のように対角化できる。ここに、 Λ_A はシステムAの固有値についての対角マトリクスであり、 n を系全体の次数とすると

$$\Lambda_A = \text{diag} [\lambda_{A1}, \lambda_{A2}, \dots, \lambda_{An}] \quad (6)$$

である。よって、式(3)は

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= [\Phi^{-T} \Lambda_A \Phi^{-1} - \lambda \Phi^{-T} \Phi^{-1}]^{-1} \\ &= \Phi [\Lambda_A - \lambda \mathbf{I}]^{-1} \Phi^T \end{aligned} \quad (7)$$

のように書き直される。また、 $\mathbf{G}$ の i 、 j 要素 G_{ij} は、システムAの k 番目の固有ベクトルの i 、 j 次要素を ϕ_{ik} 、 ϕ_{jk} とおくことにより次式で求められる¹⁾。

$$G_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_{Ak} - \lambda} \phi_{ik} \phi_{jk} \quad (8)$$

ところで、修正は系の一部に生ずると仮定すれば、 $\Delta\mathbf{K}$ 、 $\Delta\mathbf{M}$ は縮小されたマトリクス $\overline{\Delta\mathbf{K}}$ 、 $\overline{\Delta\mathbf{M}}$ により

$$\Delta\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta\mathbf{K}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Delta\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \overline{\Delta\mathbf{M}} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

として再配列できる。ここに、 $\overline{\Delta\mathbf{K}}$ 、 $\overline{\Delta\mathbf{M}}$ は m ($m < n$) 次の正方マトリクスとする。同様に $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{Q}$ も以下のように表すことにより

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{G}} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \overline{\mathbf{Q}} & \mathbf{Q}_{12} \\ 0 & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (12)$$

式(1)は

$$d(\lambda) = |\overline{\mathbf{Q}}| |\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}| \quad (13)$$

のようになる。ここに

$$\overline{\mathbf{Q}} = \overline{\mathbf{I}} + [\overline{\Delta \mathbf{K}} - \lambda \overline{\Delta \mathbf{M}}] \overline{\mathbf{G}} \quad (14)$$

である。式(13)に $|\Phi^T|$ を前から、 $|\Phi|$ を後ろから乗じても特性方程式の符号は変わらないから

$$\begin{aligned} g(\lambda) &= |\Phi^T| |\overline{\mathbf{Q}}| |\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}| |\Phi| \\ &= |\Phi^T| |\overline{\mathbf{Q}}| |\Phi^{-T} \Phi^T [\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}] \Phi \Phi^{-1}| |\Phi| \\ &= |\overline{\mathbf{Q}}| |\Phi^T \mathbf{K} \Phi - \lambda \Phi^T \mathbf{M} \Phi| \\ &= |\overline{\mathbf{Q}}| \prod_{k=1}^n (\lambda_{Ak} - \lambda) \end{aligned} \quad (15)$$

のようなシステムBの特性方程式を得る。ここで

$$f(\lambda) = \frac{g(\lambda)}{\prod_{k=h+1}^n (\lambda_{Ak} - \lambda)} = |\overline{\mathbf{Q}}| \prod_{k=1}^h (\lambda_{Ak} - \lambda) \quad (16)$$

とすれば、 $g=0$ は $f=0$ であり、 f は λ が $h+1$ 次以上の λ_A に近づくとき分母が零に近づくので、システムBの低次(1~ h 次)の固有値を求める場合に有効となる。

式(16)に対するニュートン法系解法を述べる。ニュートン法系諸式は、式(26)~(29)で、式(17)~(25)はニュートン法系諸式に関連する式である。

$\overline{\mathbf{Q}}$ の λ による微分 $\overline{\mathbf{Q}}'$ 、 $\overline{\mathbf{Q}}''$ は次式で与えられる。

$$\overline{\mathbf{Q}}' = -\overline{\Delta \mathbf{M}} \overline{\mathbf{G}} + [\overline{\Delta \mathbf{K}} - \lambda \overline{\Delta \mathbf{M}}] \overline{\mathbf{G}}' \quad (17)$$

$$\overline{\mathbf{Q}}'' = -2\overline{\Delta \mathbf{M}} \overline{\mathbf{G}}' + [\overline{\Delta \mathbf{K}} - \lambda \overline{\Delta \mathbf{M}}] \overline{\mathbf{G}}'' \quad (18)$$

ここに、 $\overline{\mathbf{G}}$ の i, j 要素 $\overline{G}_{ij}$ は

$$\overline{G}_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_{Ak} - \lambda} \phi_{ik} \phi_{jk} \quad (19)$$

であり、 $\overline{\mathbf{G}}'$ の i, j 要素 $\overline{G}'_{ij}$ は

$$\overline{G}'_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(\lambda_{Ak} - \lambda)^2} \phi_{ik} \phi_{jk} \quad (20)$$

である。また、 $\overline{\mathbf{G}}''$ の i, j 要素 $\overline{G}''_{ij}$ は

$$\overline{G}''_{ij} = \sum_{k=1}^n \frac{2}{(\lambda_{Ak} - \lambda)^3} \phi_{ik} \phi_{jk} \quad (21)$$

である。式(17)~(21)を利用すると、 $f'(\lambda)$ 、 $f''(\lambda)$ はトレース理論^{2), 3)}によって

$$\frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} = \text{trace} [\overline{\mathbf{Q}}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}'] + \sum_{k=1}^h \frac{1}{\lambda - \lambda_{Ak}} \quad (22)$$

$$\frac{f''(\lambda)}{f(\lambda)} = \text{trace} [\overline{\mathbf{Q}}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}'' - [\overline{\mathbf{Q}}^{-1} \overline{\mathbf{Q}}']^2] - \sum_{k=1}^h \frac{1}{(\lambda - \lambda_{Ak})^2} + \left\{ \frac{f'(\lambda)}{f(\lambda)} \right\}^2 \quad (23)$$

のように得られる。上式(14)、(17)、(18)は部分修正系の特徴を失わず、修正部のみの次数 m のマトリクスによって表されていることに注意。よって、 $\overline{\mathbf{Q}}$ の逆マトリクスの計算時間は短く、かつ式(22)、(23)で示したようにマトリクスの演算はトレース理論の応用によって簡単化されている。しかし、 $\overline{\mathbf{G}}$ 、 $\overline{\mathbf{G}}'$ 、 $\overline{\mathbf{G}}''$ の各要素の計算はシステム全体の次数について行われるので、大次元になるほど演算時間の増加は避けられない。よって、演算時間を短くするには収束回数は少ないことを要求されるので、それぞれの解法によって著しい影響を受けることになる。

いま何らかの反復法によって、反復回数 p における q 番目の根を求めようとするとき、

$$s = \frac{f_q^{(p)'}(\lambda)}{f_q^{(p)}(\lambda)} \quad (24)$$

$$t = \frac{f_q^{(p)''}(\lambda)}{f_q^{(p)}(\lambda)} \quad (25)$$

とおけば、ニュートン・ラフソン法は

$$\lambda_q^{(p+1)} = \lambda_q^{(p)} - \frac{1}{s} \quad (26)$$

に、ベイリー法は

$$\lambda_q^{(p+1)} = \lambda_q^{(p)} - \frac{1}{s - 0.5t/s} \quad (27)$$

に、修正ニュートン・ラフソン法は

$$\lambda_q^{(p+1)} = \lambda_q^{(p)} - \frac{2}{s + \text{sign}(s)\sqrt{s^2 - 2t}} \quad (28)$$

に、ラゲール法は

$$\lambda_q^{(p+1)} = \lambda_q^{(p)} - \frac{n}{s + \text{sign}(s)\sqrt{(n-1)\{s^2 - nt\}}} \quad (29)$$

として各解法を得ることができる。

3. 数値計算

部分修正系の固有値解析法について、1節点に3自由度を有する長方形平面骨組（図-1）を例にとり数値解析する。一般固有値問題として係数マトリクスを作成すると共に、倍精度演算を行った。対象とする骨組は10層4スパン（総次数 $n=150$ ）、20層4スパン（総次数 $n=300$ ）、30層4スパン（総次数 $n=450$ ）および40層4スパン（総次数 $n=600$ ）である。システムAの骨組の部材断面は、全梁について $40 \times 80 \text{ cm}^2$ 、全柱について $80 \times 80 \text{ cm}^2$ であり、層高を4m、スパン長を8mとした。また、柱脚は固定とした。システムAの固有値、固有ベクトルについては、ハウスホルダー-Q L法により求めた。骨組の修正箇所は最下層中央柱のみの場合（修正部次数 $m=3$ ）とする。部材は長方形断面とし、システムAの断面の幅： b 、高さ： d 、断面積： A_0 、断面2次モーメント： I_0 、システムBの断面積： A 、断面2次モーメント： I とする。また、修正は断面の高さについてのみ行うものとし、設計変数を α とすると A_0 、 I_0 、 A 、 I は

$$A_0 = b \cdot d$$

$$I_0 = b \cdot d^3 / 12$$

$$A = b \cdot (1 + \alpha) d = (1 + \alpha) A_0$$

$$I = b \{ (1 + \alpha) d \}^3 / 12 = (1 + \alpha)^3 I_0$$

のように表され、修正量 ΔA 、 ΔI は

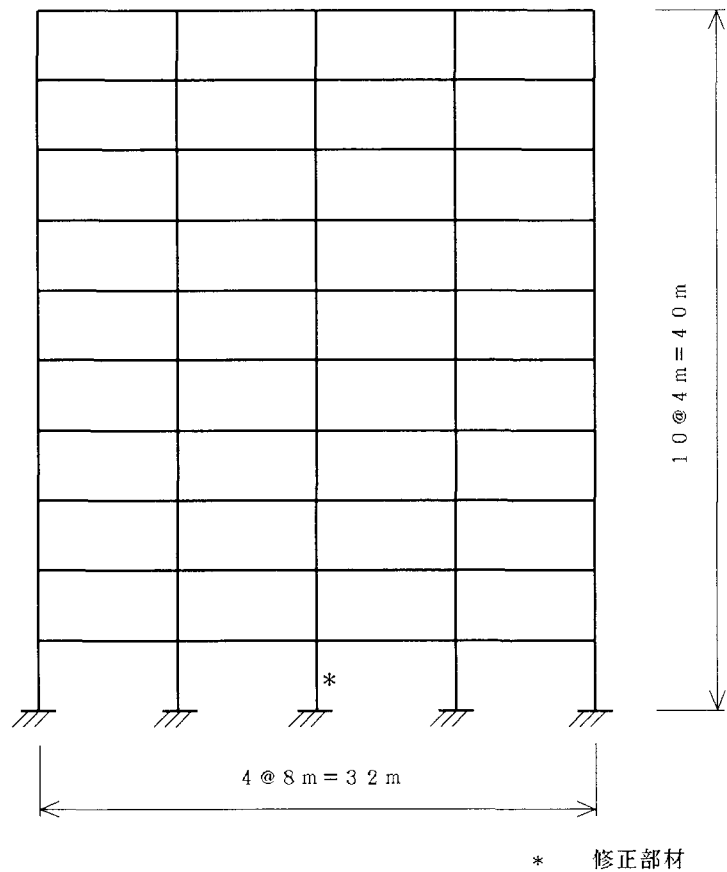
$$\Delta A = A - A_0 = \alpha A_0$$

$$\Delta I = I - I_0 = \{ (1 + \alpha)^3 - 1 \} I_0$$

として表される。部材の単位体積当りの重量を $\gamma = 2.4 \times 10^{-3} \text{ kgf/cm}^3$ 、ヤング係数は $E = 2.1 \times 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ とした。上記 α については-1と0.1の2通りについて解析する。 $\alpha = -1$ の意味は修正する箇所の部材を除くような大幅な修正である。現実の設計においてはこのような変更はほとんどないと考えられるが、数値解析上の性状を見るために行った。ニュートン法系の代表的解法として、ニュートン・ラフソン法、ベイリー法、修正ニュートン・ラフソン法、ラゲール法を選び、また部分修正系スツルム法およびハウスホルダー2分法によって比較検討した。収束値については、 q 番目の固有値の $p, p+1$ 段階繰返し時における相対誤差値が、下

記のように ε 以下になったとき収束したものとした。

$$\left| \frac{\lambda_q^{(p+1)} - \lambda_q^{(p)}}{\lambda_q^{(p+1)}} \right| < \varepsilon = 1 \times 10^{-9} \quad (30)$$



図－１． 数値計算用平面骨組例

解析時間を、 $\alpha = -1$ と $\alpha = 0.1$ の場合について表-1に示す（表中 h ：求める固有値数）。また、 $\alpha = -1$ の場合について、図-2（ $h=10$ ）、図-3（ $h=20$ ）、図-4（ $h=30$ ）に、 $\alpha = 0.1$ の場合について、図-5（ $h=10$ ）、図-6（ $h=20$ ）、図-7（ $h=30$ ）に示す。表あるいは図中で HH・BS：ハウスホルダー2分法、SP：部分修正系スツルム2分法、NR：ニュートン・ラフソン法、BL：ベイリー法、MNR：修正ニュートン・ラフソン法、LG：ラゲール法を表している。

ハウスホルダー2分法は、 n が増加すると $cpu\ time$ は2次曲線的に増加している。これに比べ、部分修正系スツルム法および提案法（ニュートン法系解法）は、ほぼ直線的に増加しているとともにハウスホルダー2分法より早い。また、提案法は部分修正系スツルム法に比べ、かなり早く計算されている。提案法の中でも、ニュートン・ラフソン法とラゲール法は、ほぼ同じぐらいで、ベイリー法と修正ニュートン・ラフソン法（ベイリー法は修正ニュートン・ラフソン法より少し早い）より早い。1階微分までを利用するニュートン・ラフソン法は、2階微分までを利用するラゲール法とほとんど変わらないので、プログラミング

グの簡便さを考慮すると、ニュートン・ラフソン法による提案法を推せる。また、設計変数の変動による演算速度の差異はほとんど見られない。

なお、計算機は NEC ACOS 830/8 (10 MIPS) を利用した。

表-1. 各解法における c p u t i m e

n	h	$\alpha = -1$						$\alpha = 0.1$					
		HH・BS	SP	NR	BL	MNR	LG	HH・BS	SP	NR	BL	MNR	LG
150	10	2436	1083	285	354	431	291	2435	1041	270	336	420	284
	20	2692	2058	570	709	915	567	2700	1998	577	690	924	568
	30	2942	3191	905	1121	1455	864	2952	2899	890	1096	1454	864
300	10	16537	2050	500	624	748	534	16534	2019	493	613	747	522
	20	17023	3969	998	1273	1624	1060	17025	3893	1023	1306	1637	1058
	30	17519	5824	1674	2069	2771	1648	17540	5658	1695	2079	2755	1637
450	10	53636	2863	715	901	1105	770	53607	3047	715	902	1104	783
	20	54380	6091	1492	1888	2503	1552	54315	5747	1525	1940	2486	1602
	30	55188	9283	2345	2941	3852	2326	55058	8459	2346	2920	3860	2396
600	10	144205	3842	989	1286	1518	1083	144041	4041	966	1263	1494	1082
	20	145078	8173	2036	2622	3351	2180	145024	7745	2049	2621	3265	2117
	30	146017	12670	3162	3948	5118	3230	147232	11394	3141	3963	5222	3229

n : 全自由度数 h : 求める固有値数 単位 : m s e c

4. 結び

システムBの小さい方あるいは大きい方からいくつかの固有値を得ようとする時に、ニュートン法系の部分修正系基礎式（式(26)～(29)）を提案し、数値解析例により収束性および演算時間の面で優れていることを示した。特に、ラゲール法は安定した方法といえるし、2次収束型のニュートン・ラフソン法も、提案法ではラゲール法を含めた3次収束型と同じかそれ以上の演算結果を示した。3次収束型は2次収束型に比べG''の計算を余分に必要とするので、3次収束型は2次収束型より収束は早いものの、計算時間は遅くなる傾向を示した。このことは、本論文で示した数値例のみならず、他のモデルに対してもいえるものと思われる。これより、システムBの固有値解析において、いくつかの固有値を求める場合、修正部次数は小さく原系の自由度数がある程度大きい場合、最初から計算し直す方法（ハウスホルダー2分法）より、かつ部分修正系2分法より早く演算できること、およびニュートン法系においても、それぞれの応用式によって安定性や演算速度は異なること、および設計変数の変動に関係なく演算できることがわかった。

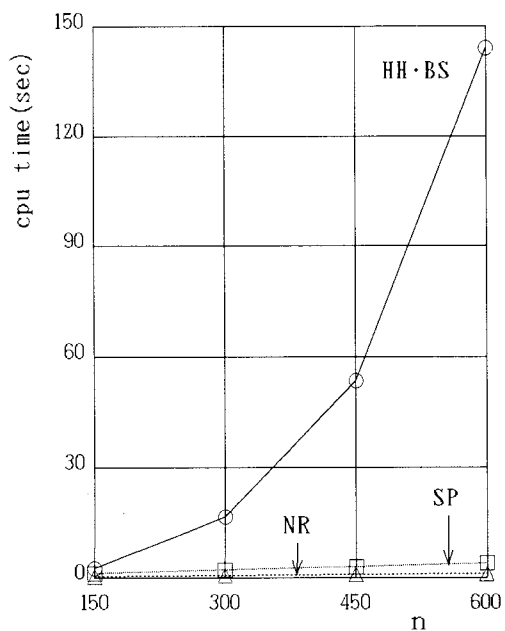


図-2 $\alpha = -1, h = 10$ における cpu time

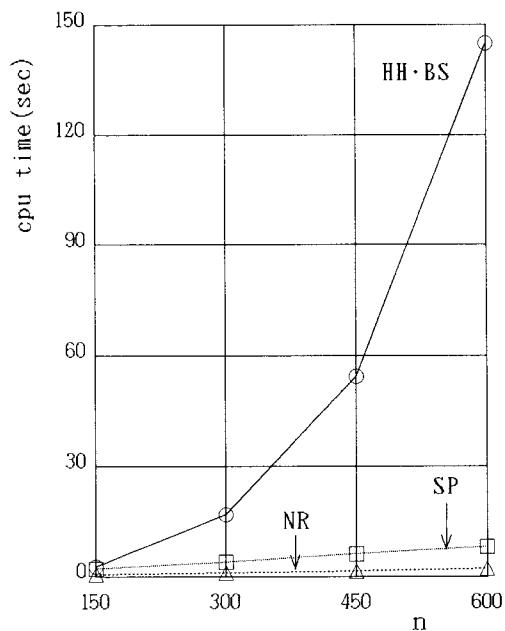


図-3 $\alpha = -1, h = 20$ における cpu time

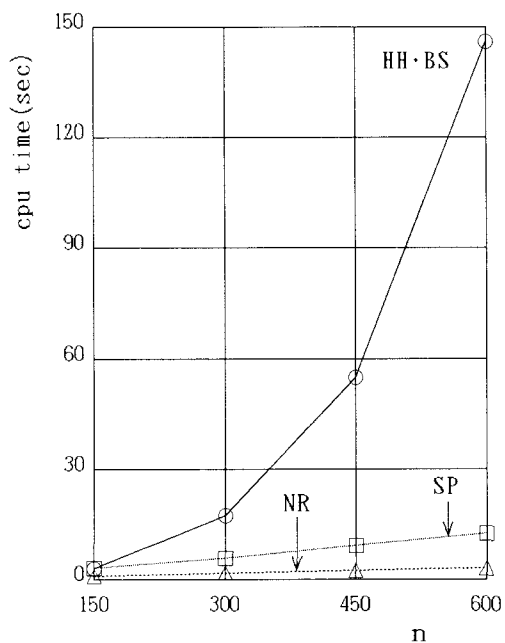


図-4 $\alpha = -1, h = 30$ における cpu time

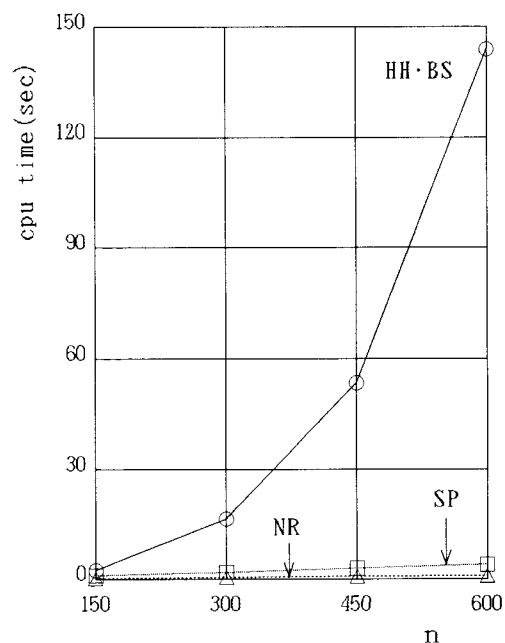


図-5 $\alpha = 0.1, h = 10$ における cpu time

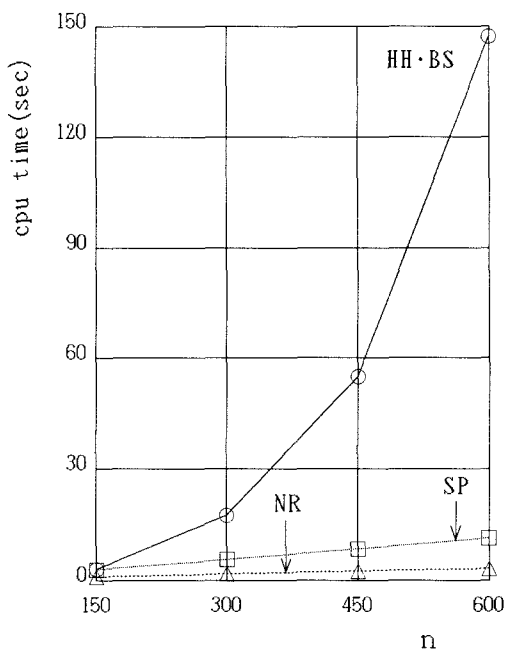
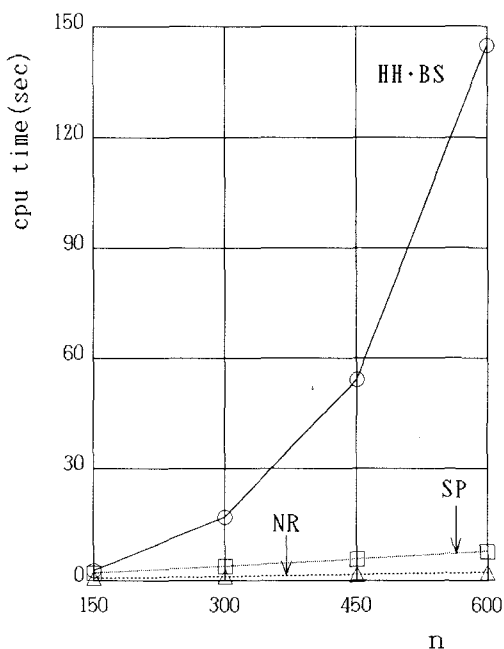


図-6 $\alpha=0.1, h=20$ における cpu time 図-7 $\alpha=0.1, h=30$ における cpu time

参考文献

1. Hirai, I., Yoshimura, T. and Takamura, K., :On a Direct Eigenvalue Analysis for Locally Modified Structures, International Journal for Numerical Method in Engineering, Vol. 6, pp. 441-442(1973).
2. Lancaster, P., :Lamda Matrix and Vibrating Systems, Pergamon Inc., pp. 82-83, 98-99(1966)
3. 小野寺毅, 中田平, 橋本智雄:スタンダード線形代数学演習, 共立出版, pp. 80-81(1984).
4. 柏木光博:デュラン・カーナー法系解法による部分修正系の固有値解析, 日本建築学会構造系論文報告集, 第417号, pp. 71-77(1990).
5. Kashiwagi, M., Hirai, I., Ohwaki, S., and Pilkey, W.D.:Stable Eigensolution of Locally Modified Systems Based on the Sturm Sequence Property, Finite Element in Analysis and Design, vol. 9, pp. 133-139(1991).
6. 柏木光博, 平井一男, Pilkey, W.D.:部分修正系スツルム法による固有値解析, 構造工学論文集, Vol. 37A, pp. 263-270(1991).

(1991年 9月30日受付)