

高次せん断変形理論を用いた補剛積層板の後座屈解析

Buckling Analysis of Stiffened Multilayered Composite Panels using a Higher-order
Shear Deformation Theory

依田照彦* S. N. Atluri**

By Teruhiko YODA and S. N. ATLURI

The purpose of this paper is (i) to construct a modified higher-order shear deformation theory in which Kirchhoff's hypothesis is relaxed to allow for shear deformations, (ii) to validate the present 5-parameter-smeared-laminate theory in comparison with the exact solutions, and (iii) to apply it to a specific problem such as postbuckling of a flat stiffened fiber-reinforced composite plate under compression. The advantage of the present 5-parameter displacement field over the existing ones lies in the treatment of transverse shear stresses which are calculated from the constitutive equations instead of integrating the equilibrium equations through the thickness of the laminate. It follows from the fact that the present displacement field includes the effects of ply-angles and elastic constants in its original form.

1. まえがき

複合材料は、航空機・自動車・スポーツ用品・土木建築物などに広く使用され、土木分野での使用例も著実に増加している。使用範囲の拡大に伴って、軽量かつ高剛性である複合材料の特長を生かす工夫がいたるところでなされるようになってきた。本論文で扱う補剛された積層板も複合材料の特徴を十分に発揮させようと意図された構造である。通常、積層板はプリプレグと呼ばれる半硬化状の薄いシートを所要の枚数だけ重ねて加熱・加圧して樹脂を重合硬化させ、製造される。このため、層ごとに繊維方向を自由に配向することにより設計上望ましい異方性材料を作り出せる。その反面、構造解析は直交異方性板と比較して複雑になるうらみが残る。歴史的に見れば、積層板の理論は古典板理論あるいはMindlinの板理論をその原点に置いている。

Mindlinの板理論と呼ばれているせん断変形を考慮した板理論は、Reissner¹⁾とMindlin²⁾によって定式化され、その延長線上に、ReissnerとStavsky³⁾が積層板の理論を展開した。この古典積層板理論は、板曲げと板の伸縮との連成を最初に扱った点で高く評価され、現在でも積層板の第1次せん断変形理論として確固たる地位を占めている。Lo, Christensen, Wu⁴⁾は、積層板の板厚方向の応力分布をより正確に記述するために高次のせん断変形理論を模索した。Loらの導いた変位場は、積層板の上下面におけるせん断応力零の条件を満たさない点に欠点を有している。この欠点を克服するために、Levinson⁵⁾, Murthy⁶⁾, Reddy⁷⁾は第3次のせん断変形理論を提案した。その後、多くの研究者によって数多くの高次せん断変形理論が提案され

* 工博 早稲田大学教授 理工学部土木工学科 (〒169 東京都新宿区大久保3-4-1)

** Dr.Sci., Regents' Professor, Georgia Institute of Technology (Atlanta, GA30332, U.S.A.)

ている。これらの経過については、NoorとBurton⁸⁾やReddy⁹⁾の論文に詳しく紹介されている。

一方、数値解析に注目すると、高次せん断変形理論の適用対象が単純な荷重条件や支持条件に限られているものの、有限要素法を用いた定式化が一般的である。Kant, Owen, Zienkiewicz¹⁰⁾の研究は、積層板の高次せん断変形理論に有限要素法を適用した例として最初のものである。その後、KantとPandya^{11), 12)}は、高次変位場を用いてアイソパラメトリック要素の定式化を行った。積層板の有限要素解析については Reddyの文献¹³⁾に詳しく書かれている。有限帯板法も有限要素法の一つであるが、特定の境界条件の下では威力を発揮することが知られている¹⁴⁾。その適用範囲は、線形解析に留まることなく、非線形解析をも可能にしている^{15), 16)}。積層板の幾何学的非線形解析についてはChia¹⁷⁾が体系的に記述している。

本論文の目的は

- ① 高次せん断変形理論に基づき妥当な積層板の変位場を誘導すること
- ② 既存の文献^{18), 19)}との比較により、得られた変位場の妥当性を検証すること
- ③ 本論で展開した高次せん断変形理論を、有限帯板法を基礎に補剛積層板の後座屈解析に応用することである。

本論文の特徴としては、せん断補正係数を用いることなく板厚方向のせん断応力分布が計算できること、積層板の後座屈解析が5個のパラメータ（この個数はMindlinの板理論と同じ）を用いた高次せん断変形理論の適用により可能となったことが挙げられる。また、有限帯板法による数値計算結果を、既存の実験結果²⁰⁾と比較し、解析結果と実験値とが良好な一致を示していることも確認した。ただし、後座屈挙動が板と補剛材との接点のはくりを境に大きく変化することについては解析対象から除いた。すなわち、はくり以後の挙動の解析は行っていない。

2. 理論的定式化

2.1 変位場

図-1に示すような矩形積層板を考える。各層は、平行な繊維とマトリックス相より成り、層間のすべりは生じないものとする。繊維の方向は図-1において θ で表わされている。各層は、直交異方性の弾性体と考える。

変位場を誘導するにあたって、積層板の特徴を列挙すると、

- ① 積層板それ自身は比較的厚いが、積層板を構成する単層は十分薄い。
- ② 繊維の主軸方向は板厚方向に層間で変化する。
- ③ 主軸方向のヤング率は直交する横方向のヤング率に比べて非常に大きい。
- ④ この大きな剛性の差異は板厚方向の適合条件に影響を与える。

となる。

まず、第1近似として、Kirchhoffの仮定より求める次の変位場を考える。

$$u_{\alpha}(x, y, z) = \bar{u}_{\alpha}(x, y) - z \bar{u}_{3, \alpha}(x, y) \quad (\alpha = 1, 2) \quad (1.a)$$

$$u_3(x, y, z) = \bar{u}_3(x, y) \quad (1.b)$$

ここに、 u_1, u_2, u_3 は任意点の x, y, z 方向の変位であり、 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ はそれぞれ対応する中央面(この面を $z = 0$ とする)内の変位である。また $(\cdot)_{, \alpha}$ は x_{α} ($x_1 = x, x_2 = y$)に関する微分を表わす。

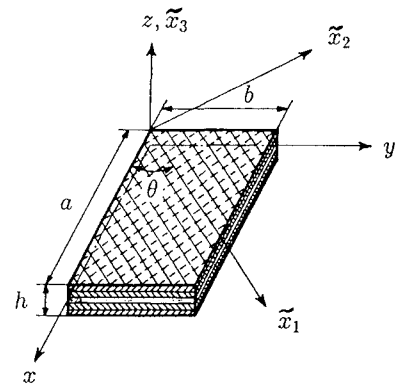


図-1 積層板の座標系

式(1)で示される変位場は、せん断変形の影響を無視しているので、せん断変形を考慮するためには変位場の修正が必要となる。そこで、弾性論の基本式を基礎に、変位場の修正すなわち変位場の第2近似式を求める。弾性論の基本式は、積層板の場合、次のようにかける。

(1) つり合い式(物体力のない場合)

$$\sigma_{ij,i} = 0 \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2)$$

ここに、 σ_{ij} は応力成分であり、下添字1, 2, 3はそれぞれx, y, zを表わす。さらに、式(2)ではEinsteinの総和規約が用いられている。

(2) 構成則(層ごとに繊維の主軸方向が異なる)

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.a)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{44} & Q_{45} \\ Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \quad (3.b)$$

ここに、材料定数 Q_{ij} は板厚方向の座標 z の関数で、次式で表わされる²¹⁾。

$$Q_{11} = m^4 \tilde{Q}_{11} + 2m^2 n^2 (\tilde{Q}_{12} + 2\tilde{Q}_{66}) + n^4 \tilde{Q}_{22} \quad (4.a)$$

$$Q_{12} = m^2 n^2 (\tilde{Q}_{11} + \tilde{Q}_{22} - 4\tilde{Q}_{66}) + (m^4 + n^4) \tilde{Q}_{12} \quad (4.b)$$

$$Q_{22} = n^4 \tilde{Q}_{11} + 2m^2 n^2 (\tilde{Q}_{12} + 2\tilde{Q}_{66}) + m^4 \tilde{Q}_{22} \quad (4.c)$$

$$Q_{16} = m^3 n (\tilde{Q}_{11} - \tilde{Q}_{12}) + m n^3 (\tilde{Q}_{12} - \tilde{Q}_{22}) - 2m n (m^2 - n^2) \tilde{Q}_{66} \quad (4.d)$$

$$Q_{26} = m n^3 (\tilde{Q}_{11} - \tilde{Q}_{12}) + m^3 n (\tilde{Q}_{12} - \tilde{Q}_{22}) + 2m n (m^2 - n^2) \tilde{Q}_{66} \quad (4.e)$$

$$Q_{66} = m^2 n^2 (\tilde{Q}_{11} + \tilde{Q}_{22} - 2\tilde{Q}_{12} - 2\tilde{Q}_{66}) + (m^4 + n^4) \tilde{Q}_{66} \quad (4.f)$$

$$Q_{44} = m^2 \tilde{Q}_{44} + n^2 \tilde{Q}_{55} \quad (4.g)$$

$$Q_{45} = m n (\tilde{Q}_{55} - \tilde{Q}_{44}) \quad (4.h)$$

$$Q_{55} = m^2 \tilde{Q}_{55} + n^2 \tilde{Q}_{44} \quad (4.i)$$

ここに、 $(\tilde{})$ は繊維の主軸方向に関する材料定数であり、次式で表わされる²¹⁾。

$$\tilde{Q}_{11} = E_{11} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (5.a)$$

$$\tilde{Q}_{22} = E_{22} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) \quad (5.b)$$

$$\tilde{Q}_{12} = \nu_{12} E_{22} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) = \nu_{21} E_{11} / (1 - \nu_{12} \nu_{21}) = \tilde{Q}_{21} \quad (5.c)$$

$$\tilde{Q}_{66} = G_{12} \quad (5.d)$$

$$\tilde{Q}_{44} = G_{23} \quad (5.e)$$

$$\tilde{Q}_{55} = G_{13} \quad (5.f)$$

$$m = \cos \theta, \quad n = \sin \theta \quad (6.a, b)$$

ここに、 E_{11} と E_{22} はそれぞれ主軸方向と主軸直角方向のヤング率を表わし、 G_{12} , G_{23} , G_{13} はそれぞれ $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2$, $\tilde{x}_2 - \tilde{x}_3$, $\tilde{x}_1 - \tilde{x}_3$ 平面内のせん断弾性係数を表わす。 ν_{12} はポアソン比、 θ は各層の繊維の主軸座標系 $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3)$ と全体座標系 (x, y, z) とのなす角である。

(3) ひずみ-変位関係式(線形関係)

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (7)$$

繊維の主軸方向は、層ごとに異なるのが一般的であるが、板厚方向すなわち z 方向のせん断応力については各層間で連続しなければならない。このことを出発点に、変位場の第2近似を求める。式(2)を z について積分すると、

$$\sigma_{3\beta} = \sigma_{3\beta}^* - \int_{-\frac{h}{2}}^z \sigma_{\alpha\beta, \alpha} dz \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (8)$$

ここに、 h は積層板の板厚、 $\sigma_{3\beta}^*$ は積層板下面におけるせん断応力である。

式(1)、(3)、(7)を式(8)に代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \sigma_{23} = & B_{16} \bar{\psi}_{1,1} + (B_{12} + B_{66}) \bar{\psi}_{1,2} + 3 B_{26} \bar{\psi}_{2,1} + B_{22} \bar{\psi}_{2,2} - A_{16} \bar{u}_{1,1} - (A_{12} + A_{66}) \bar{u}_{1,2} \\ & - A_{26} \bar{u}_{1,22} - A_{66} \bar{u}_{2,11} - 2 A_{26} \bar{u}_{2,12} - A_{22} \bar{u}_{2,22} \end{aligned} \quad (9.a)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{13} = & B_{11} \bar{\psi}_{1,1} + 3 B_{16} \bar{\psi}_{1,2} + (B_{12} + 2 B_{66}) \bar{\psi}_{2,1} + B_{26} \bar{\psi}_{2,2} - A_{11} \bar{u}_{1,1} - 2 A_{16} \bar{u}_{1,2} \\ & - A_{66} \bar{u}_{1,22} - A_{16} \bar{u}_{2,11} - (A_{12} + A_{66}) \bar{u}_{2,12} - A_{26} \bar{u}_{2,22} \end{aligned} \quad (9.b)$$

ここに、板の下面では $\sigma_{3\beta}^* = 0$ とし、次式で表わされるせん断変形に関する変数 $\bar{\psi}_1$ 、 $\bar{\psi}_2$ を新たに導入している。

$$\bar{\psi}_1 = \bar{u}_{3,11}, \quad \bar{\psi}_2 = \bar{u}_{3,22} \quad (10.a, b)$$

さらに、係数 A_{pq} 、 B_{pq} ($p, q = 1, 2, 6$) は

$$A_{pq} = \int_{-\frac{h}{2}}^z Q_{pq} dz \quad (p, q = 1, 2, 6) \quad (11.a)$$

$$B_{pq} = \int_{-\frac{h}{2}}^z z Q_{pq} dz \quad (11.b)$$

一方、定義よりせん断応力 σ_{23} と σ_{13} は、式(3.b)と(7)を用いて

$$\sigma_{23} = Q_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}) + Q_{45}(u_{1,3} + u_{3,1}) \quad (12.a)$$

$$\sigma_{13} = Q_{45}(u_{2,3} + u_{3,2}) + Q_{55}(u_{1,3} + u_{3,1}) \quad (12.b)$$

と表わせる。

式(9)と(12)より σ_{23} 、 σ_{13} を消去し、 z について積分すれば、変位場に関する第2近似式

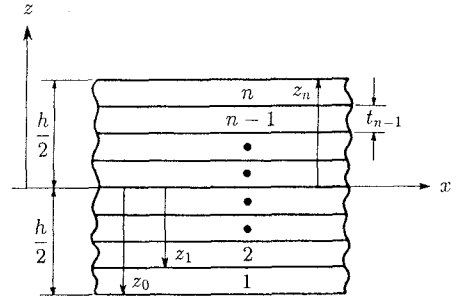


図-2 座標系 z_k の定義

$$\begin{aligned} u_1 = & \bar{u}_1 - z \bar{u}_{3,1} + (D_{4516} + D_{5511}) \bar{\psi}_{1,1} + (D_{4512} + 2 D_{4566} + 3 D_{5516}) \bar{\psi}_{1,2} \\ & + (3 D_{4526} + D_{5512} + 2 D_{5566}) \bar{\psi}_{2,1} + (D_{4522} + D_{5526}) \bar{\psi}_{2,2} \\ & - (C_{4516} + C_{5511}) \bar{u}_{1,11} - (C_{4512} + C_{4566} + 2 C_{5516}) \bar{u}_{1,12} - (C_{4526} + C_{5566}) \bar{u}_{1,22} \\ & - (C_{4566} + C_{5516}) \bar{u}_{2,11} - (2 C_{4526} + C_{5512} + C_{5566}) \bar{u}_{2,12} - (C_{4522} + C_{5526}) \bar{u}_{2,22} \end{aligned} \quad (13.a)$$

$$\begin{aligned} u_2 = & \bar{u}_1 - z \bar{u}_{3,2} + (D_{4416} + D_{4511}) \bar{\psi}_{1,1} + (D_{4412} + 2 D_{4466} + 3 D_{4516}) \bar{\psi}_{1,2} \\ & + (3 D_{4426} + D_{4512} + 2 D_{4566}) \bar{\psi}_{2,1} + (D_{4422} + D_{4526}) \bar{\psi}_{2,2} \\ & - (C_{4416} + C_{4511}) \bar{u}_{1,11} - (C_{4412} + C_{4466} + 2 C_{4516}) \bar{u}_{1,12} - (C_{4426} + C_{4566}) \bar{u}_{1,22} \\ & - (C_{4466} + C_{4516}) \bar{u}_{2,11} - (2 C_{4426} + C_{4512} + C_{4566}) \bar{u}_{2,12} - (C_{4422} + C_{4526}) \bar{u}_{2,22} \end{aligned} \quad (13.b)$$

$$u_3 = \bar{u}_3 \quad (13.c)$$

ここに、 $C_{\ell mpq}$ と $D_{\ell mpq}$ ($\ell, m = 4, 5; p, q = 1, 2, 6$) は次式で表わされる。

$$C_{\ell mpq} = \int_0^z S_{\ell m} A_{pq} dz \quad (14.a)$$

$$(\ell, m = 4, 5; p, q = 1, 2, 6)$$

$$D_{\ell m p q} = \int_0^z S_{\ell m} B_{p q} dz \quad (14. b)$$

ただし、 $S_{\ell m}$ は次の関係式を満たす。

$$\begin{bmatrix} S_{44} & S_{45} \\ S_{45} & S_{55} \end{bmatrix} = \frac{1}{(Q_{44}Q_{55} - Q_{45}Q_{45})} \begin{bmatrix} Q_{55} & -Q_{45} \\ -Q_{45} & Q_{44} \end{bmatrix} \quad (15)$$

付言するならば、式(13)における未知量の数は、Mindlinの板理論と同じ5個であり、それらは中央面内の変位 $\bar{u}_1$ 、 $\bar{u}_2$ 、 $\bar{u}_3$ と新たに導入したせん断変形を表わすパラメータ $\bar{\psi}_1$ 、 $\bar{\psi}_2$ である。このため、少ない自由度で積層板の解析が可能となり、せん断補正係数を利用することなしに直接構成則から板厚方向のせん断応力の分布が求められる。

2.2 ひずみ場

非線形解析におけるひずみ-変位関係を、Green-Lagrangeのひずみテンソル

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}) \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (16)$$

をもとに、後座屈領域では板の曲げ変形が卓越するものとし、次式で近似した。

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha} + u_{3,\alpha} u_{3,\beta}) \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (17. a)$$

$$\varepsilon_{3\beta} = \frac{1}{2} (u_{3,\beta} + u_{\beta,3}) \quad (17. b)$$

2.3 応力場

各層は平面応力状態にあるとの仮定により、 k 層の構成則をマトリックス形で

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} & 0 & 0 \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & Q_{45} \\ 0 & 0 & 0 & Q_{45} & Q_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{23} \\ 2\varepsilon_{13} \end{Bmatrix} \text{あるいは } \sigma = \mathbf{D} \varepsilon \quad (18)$$

と表わす。ここに、マトリックス $\mathbf{D}$ は線形弾性体を前提としている。

3. 有限帯板法の定式化

3.1 有限帯板要素

図-3に示すような帯板構造を考える。通常の有限帯板法では、長手方向(図-3では x 方向)に正弦波形を仮定し、それらの重ね合わせで変位場を近似している。その結果、両端での境界条件が制約されることになる。ここでは、中央面の伸縮を考慮するために、次式のように中央面の変位関数 $\bar{u}_1$ 、 $\bar{u}_2$ 、 $\bar{u}_3$ 、 $\bar{\psi}_1$ 、 $\bar{\psi}_2$ を仮定した。

$$\bar{u}_j = \bar{\varepsilon}_{j1} x + \sum_{\ell=0}^N (S_{\ell} [\mathbf{N}] [\bar{\mathbf{u}}_{1s}^{\ell}]^T + C_{\ell} [\mathbf{N}] [\bar{\mathbf{u}}_{1c}^{\ell}]^T) \quad (19. a)$$

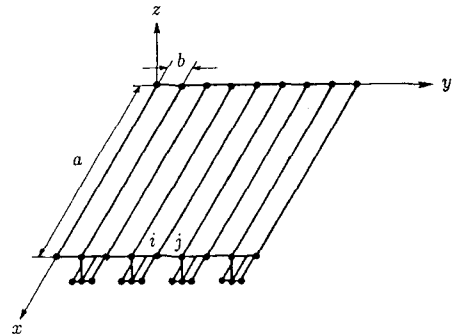


図-3 帯板構造

$$\bar{u}_2 = \bar{\varepsilon}_{22} y + \sum_{\ell=0}^N (S_\ell [N] [\bar{u}_{2s}^\ell]^T + C_\ell [N] [\bar{u}_{2c}^\ell]^T) \quad (19. b)$$

$$\bar{u}_3 = \sum_{\ell=0}^N (S_\ell [M] [\bar{u}_{3s}^\ell]^T + C_\ell [M] [\bar{u}_{3c}^\ell]^T) \quad (19. c)$$

$$\bar{\psi}_1 = \sum_{\ell=0}^N (S_\ell [M] [\bar{\psi}_{1s}^\ell]^T + C_\ell [M] [\bar{\psi}_{1c}^\ell]^T) \quad (19. d)$$

$$\bar{\psi}_2 = \sum_{\ell=0}^N (S_\ell [M] [\bar{\psi}_{2s}^\ell]^T + C_\ell [M] [\bar{\psi}_{2c}^\ell]^T) \quad (19. e)$$

ここに、 $\bar{\varepsilon}_{11}$ と $\bar{\varepsilon}_{22}$ は中央面のx方向とy方向の一樣圧縮ひずみを表わす。また、

$$S_\ell = \sin \frac{\ell \pi}{a} x, \quad C_\ell = \cos \frac{\ell \pi}{a} x \quad (20. a, b)$$

ここに、aは図-3に見られるように長手方向の長さである。 $[N]$ と $[M]$ は帯板の横断方向の形状関数であり、それぞれ5次式と3次式より構成されている。第 ℓ 項の一般化変位ベクトルは、 $[N]$ や $[M]$ の次数に応じて、たとえば $[\bar{u}_1^\ell] = \{\bar{u}_{1,1}^\ell, \bar{u}_{1,2}^\ell, \bar{u}_{1,3}^\ell, \bar{u}_{1,4}^\ell, \bar{u}_{1,5}^\ell, \bar{u}_{1,6}^\ell\}$ のようにかける(ただし、 $(\cdot) = d(\cdot)/dy$)。さらに、節点変位ベクトルに付随する記号Tは転置マトリックスを意味する。なお、式(19)では、一般的なフーリエ級数表示を示しているが、本論文では後で述べるように両端単純支持の境界条件に限定している。

式(13)、(17)、(19)を用いると、ひずみ-変位関係式は次式のようにかける。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}(\mathbf{u}) \mathbf{u} \quad (21)$$

ここに、 $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}]$ であり、 $\mathbf{B}$ は非線形ひずみ-変位マトリックス、 $\mathbf{u}$ は節点変位ベクトルである。

3. 2 増分型つり合い式と非線形計算

ここでは、Total Lagrangian Formulationを採用し、仮想仕事の原理を基に、増分型つり合い式を誘導する。仮想仕事の原理を増分型で表現すれば、

$$\int_{V^*} [\delta(\boldsymbol{\varepsilon} + \Delta \boldsymbol{\varepsilon})^T (\boldsymbol{\sigma} + \Delta \boldsymbol{\sigma}) - \delta(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})^T (\mathbf{P} + \Delta \mathbf{P})] dV = \int_{S^*} [\delta(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})^T (\mathbf{T} + \Delta \mathbf{T})] dS \quad (22)$$

ここに、 V^* は帯板要素の体積、 S^* は応力が規定されている部分の要素の面積、 $\mathbf{P}$ は物体力ベクトル、 $\mathbf{T}$ は表面力ベクトルであり、デルタ Δ の付いた量は増分量を意味する。

通常の増分型つり合い式の誘導方法²²⁾に従えば、次式が得られる。

$$[\mathbf{K}_t(\mathbf{u})] \Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{P} + \Delta \mathbf{R} \quad (23)$$

ここに、 $[\mathbf{K}_t(\mathbf{u})]$ は節点変位ベクトル $\mathbf{u}$ で表示される接線剛性マトリックス、 $\Delta \mathbf{P}$ は増分節点力ベクトル、 $\Delta \mathbf{R}$ は残差節点力ベクトルである。

接線剛性マトリックスを陽な形で計算するために、数値積分を用いている。すなわち、帯板要素の横断方向と板厚方向にはガウスの求積法を適用し、長手方向であるx方向にはシンプソン公式を利用している。ただし、サンプリング点は常に必要最小限の数以上をとり、所要の精度が確保できるように配慮した。

非線形計算においては、慣用的な変位制御法を採用し、一定圧縮変位を受ける補剛積層板の後座屈挙動を追跡した。まず、増分圧縮変位を、最大たわみと増分圧縮変位を制御パラメータとして、各増分段階ごとに定め、増分圧縮変位以外の増分変位を接線剛性方程式(23)を用いて計算し、応力成分を求める。得られた結果を用いて、接線剛性マトリックスの更新を行う。各増分段階の終わりでは、残差力ベクトルを計算し、それらの2乗平均値が増分圧縮変位に対応する増分荷重の合力の1%以下になるまで反復計算を続けた。

4. 数値計算例

4.1 円筒曲げを受ける三層積層板の厳密解¹⁸⁾との比較

本論文で展開した高次せん断変形理論と有限帯板法の定式化の妥当性を調べるために、正弦波形の分布荷重 $P_0 \sin(\pi x/a)$ を受ける三層 ($0^\circ/90^\circ/0^\circ$) の正方形積層板を考える。各層の板厚は等しく、材料定数も三層同一とし、次のようにおいた。

$$\begin{aligned} E_{11}/E_{22} &= 25, \quad G_{12}/E_{22} = G_{13}/E_{22} = 0.5, \\ G_{23}/E_{22} &= 0.2, \quad \nu_{12} = 0.25 \quad (\nu_{21} = \nu_{12} E_{22}/E_{11} = 0.01) \end{aligned}$$

帯板要素の数を変化させて、収束性を検討した結果、両端単純支持正方形板を4要素に分割すれば十分な精度が得られることが分かったので、数値計算は4要素帯板モデルで実施した。結果を、図-4、図-5に示す。ここに、整理の便のため、次のように諸量を無次元化した。

$$\begin{aligned} \bar{\sigma} &= \sigma_{11}(a/2, z)/P_0 \\ \bar{\tau} &= \sigma_{13}(0, z)/P_0 \\ \bar{w} &= \frac{100 E_{22} h^3 u_3(a/2, 0)}{P_0 a^4} \end{aligned}$$

ここに、 h は積層板の板厚、 a は積層板の長さを表わす。また、図-4、図-5では対称性を仮定して、中央面から上の部分の応力分布を示している。

得られた最大たわみは $\bar{w} = 13.74$ であり、厳密解と比べて0.6%低めの値となっている。図-4、図-5から分かるように、本論文の高次せん断変形理論は、定性的にも定量的にも従来の3次せん断変形理論に比べて良い結果を与えていると思われる。また、図-5の板厚方向のせん断応力分布は、せん断補正係数を用いることなしに、構成則より直接計算されている。慣用的な手法に従って、つり合い式を介してせん断応力を求めると、厳密解に非常に近い値が得られることも確かめた。

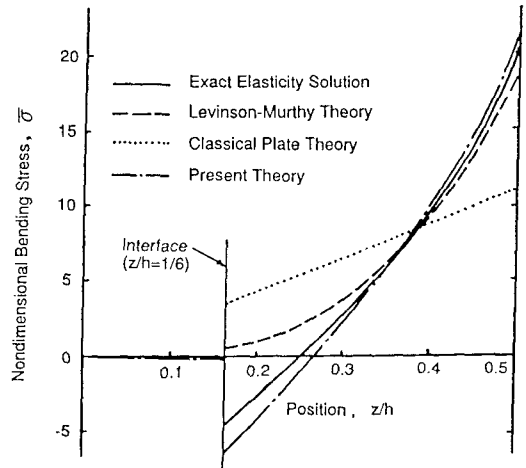


図-4 三層積層板の曲げ応力分布 ($h/a = 1/4$)

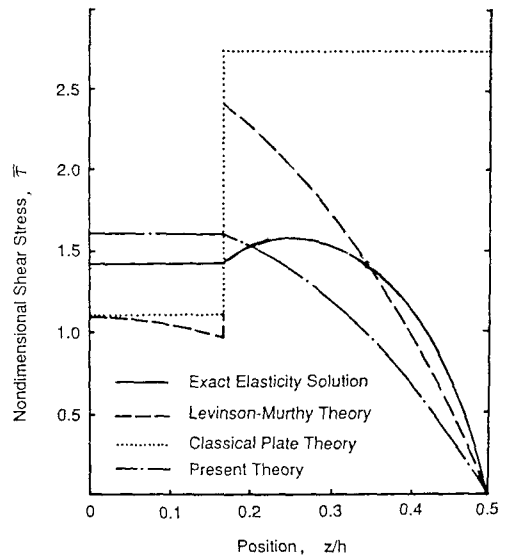


図-5 三層積層板のせん断応力分布 ($h/a = 1/4$)

4.2 一様圧縮を受ける補剛積層板の後座屈解析

ここでは、3章で示した非線形解析に対する有限帯板法の定式化を、一様圧縮を受ける補剛積層板の後座屈挙動の解析に応用する。比較の対象としたのは、図-6に示すような寸法・形状を有する一様圧縮積層補剛板であり、NASAのLangley Research Centerで行われた実験供試体と同じものである²⁰⁾。

使用材料の材料定数は表-1に示す通りである。

表-1 グラファイト-エポキシ単層の材料定数

長手方向のヤング率 E_{11}	131.0 GPa
横方向のヤング率 E_{22}	13.0 GPa
せん断弾性係数 G	6.4 GPa
ポアソン比 ν_{12}	0.38
単層の厚さ	0.14mm

補剛材間隔は17.8cmとし、全ての補剛材は同じ寸法・材料よりなるものとする。積層の配列順序は表-2の通りである。

表-2 積層板の配列順序

スキンプレート	$(\pm 45^\circ / 0^\circ_2 / \mp 45^\circ / 90^\circ_2)_s$	16層
補剛材ウェブ	$(0^\circ / \pm 45^\circ / \mp 45^\circ / 0^\circ_2 / \pm 45^\circ / 0^\circ_2)_s$	22層
補剛材フランジ	$(0^\circ / \pm 45^\circ / \mp 45^\circ / 0^\circ_2 / \pm 45^\circ / 0^\circ_3 / 90^\circ / 0^\circ_3 / 90^\circ / 0^\circ_2)_s$	38層

(注) ()_sは対称であることを意味する。

本論文では、精度と計算時間とのからみから、実験値と比較すべき構造モデルを次のように設定した。

- ① 補剛積層板は破壊に至るまで完全弾性体としてふるまう。
- ② 補剛板の両端は単純支持、側辺は自由であるものとする。
- ③ 製作上、補剛材ウェブは等厚とはならないが、解析モデルでは等厚とした。
- ④ 補剛材のフランジは 0° の単層とみなす。
- ⑤ 補剛板の両端には一様圧縮変位を与える。
- ⑥ 補剛板は、全体モデルを28個の帯板要素で表現し、 $1/2$ モデルについて解析した(図-7参照)。
- ⑦ フーリエ級数で用いた半波数の最大値は $\ell = 2$ である。
- ⑧ 後座屈解析を行うために、板厚の5%の最大初期たわみを正弦波形状で与えた。

数値計算結果を図-7、図-8、図-9に示す。

図-7は理論座屈荷重 P_{cr} で無次元化された荷重 P/P_{cr} と座屈時の軸方向変位 u_{cr} (理論値) で無次元化された変位 u/u_{cr} との関係を表わし、白丸が実験値を、実線がNASAで実施されたFEM解析の結果を、一点鎖線が本論文の有限帯板解析の結果を示している。実験値と比較的良好一致が見られる。同様に、無次元化した荷重-最大たわみ曲線と荷重-最大ひずみ曲線とをそれぞれ図-8、図-9に示した。白丸、実線、一点鎖線の意味は図-7と同じである。実験モデルと解析モデルの差が現われているとはいうものの、実験値と比較的良好一致が見られる。

積層板で問題となる破壊時のモードは、通常の積層板と異なり、平板と補剛材ウェブの接着部のはくりであったため(実験結果²⁰⁾による)、接続部(図-7のA点)の補剛材ウェブの垂直応力 σ_{22} とせん断応力 σ_{23} を調べて見た。その結果を図-10と図-11に示す。

垂直応力 σ_{22} 、せん断応力 σ_{23} とともに層間で大きく変化しており、平板と補剛材の接着部で大きな垂直引

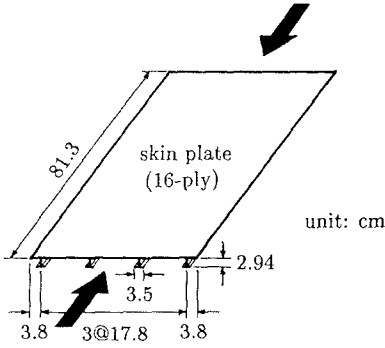


図-6 一様圧縮を受ける積層補剛板

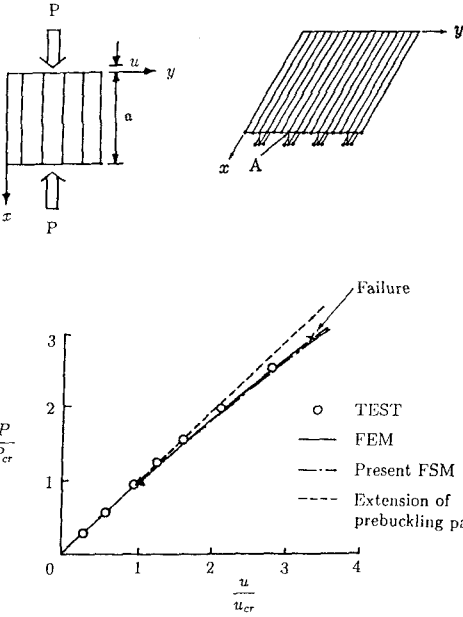


図-7 荷重-軸方向変位関係

張応力が片側に生じることが分かる。したがって、はくり現象を追跡するにはさらに高次の非線形解析が必要となる。本論文では、破壊を考慮しない後座屈挙動の解析の妥当性を示すにとどめる。

5. 結論

古典せん断変形理論（Mindlinの板理論）と同じ変数5個で変位場を表現した本論文の高次せん断変形理論は、少ないパラメータで多層の積層板の応力状態が計算できる点に特徴があり、古典せん断変形理論のようなせん断補正係数を使用することなしに構成則から直接板厚方向のせん断応力が求まる点に利点がある。このことは、既往の研究との比較により確かめられた。

変位場の中に、繊維の配向角と材料定数を含んでいることが、少ないパラメータで比較的良好な近似が得られる原因と考えられる。今後は、変位場をより簡明にして、実用的価値を向上させることが目標となる。

6. 謝辞

本報告の一部は、文部省科学研究費の援助によって行われたものである。ここに記して謝意を表します。

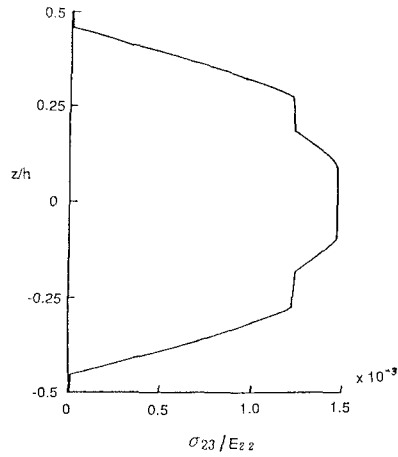


図-11 補剛材取り付け部の横方向せん断
応力 σ_{23} の分布 ($P/P_{cr}=3.4$; 22層)

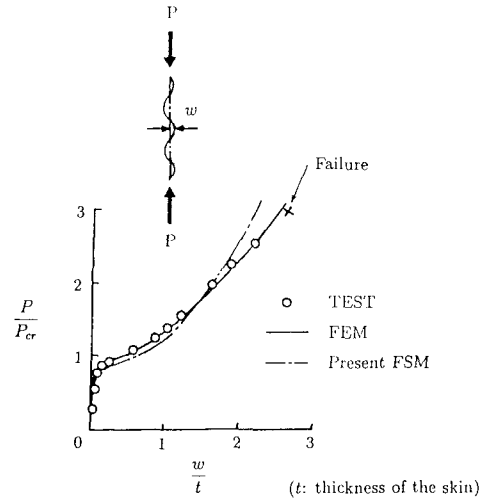


図-8 荷重-最大たわみ関係

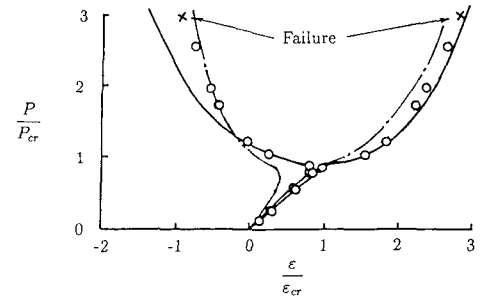


図-9 荷重-最大ひずみ関係

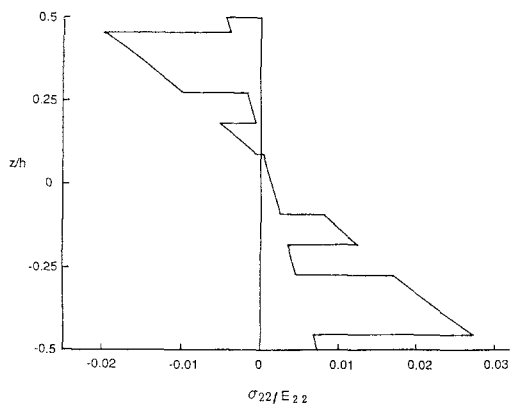


図-10 補剛材取り付け部の横方向垂直応力 σ_{22}
の分布 ($P/P_{cr}=3.4$; 22層)

参考文献

- 1) Reissner, E. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates, Journal of Applied Mechanics Vol.12, pp.69-77, 1945.
- 2) Mindlin, R.D. : Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic,

- elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* Vol.73, pp.31-38, 1951.
- 3) Reissner, E. and Stavsky, Y. : Bending and stretching of certain types of heterogeneous aeolotropic elastic plates, *Journal of Applied Mechanics* Vol.28, pp.402-408, 1961.
 - 4) Lo, K. H., Christensen, R. M. and Wu, E. M. : A high-order theory of plate deformation, *Journal of Applied Mechanics* Vol.44, pp.663-676, 1977.
 - 5) Levinson, M. : An accurate, simple theory of the statics and dynamics of elastic plates, *Mechanics Research Communications* Vol.7, pp.343-350, 1980.
 - 6) Murthy, M.V.V. : An improved transverse shear deformation theory for laminated anisotropic plates, *NASA Technical Paper* 1903, 1981.
 - 7) Reddy, J.N. : A simple higher-order theory for laminated composite plates, *Journal of Applied Mechanics* Vol.51, pp.745-752, 1984.
 - 8) Noor, A.K. and Burton, W.S. : Assessment of shear deformation theories for multilayered composite plates, *Applied Mechanics Review* Vol.42, pp.1-12, 1989.
 - 9) Reddy, J.N. : A review of refined theories of laminated composite plates, *Shock and Vibration Digest* Vol.22, pp.3-17, 1990.
 - 10) Kant, T., Owen, D.R.J. and Zienkiewicz, O.C. : A refined higher-order C^0 plate bending element, *Computers and Structures* Vol.15, pp.177-183, 1982.
 - 11) Kant, T. and Pandya, B.N. : A simple finite element formulation of a higher-order theory for unsymmetrically laminated composite plates, *Computers and Structures* Vol.9, pp.215-246, 1988.
 - 12) Pandya, B.N. and Kant, T. : Finite element analysis of laminated composite plates using a higher-order displacement model, *Composite Science and Technology* Vol.32, pp.137-155, 1988.
 - 13) Reddy, J.N. : A review of the literature on finite-element modeling of laminated composite plates, *Shock and Vibration Digest* Vol.17, pp.3-8, 1985.
 - 14) Cheung, Y.K. : *Finite Strip Method in Structural Analysis*, New York; Pergamon, 1976.
 - 15) Graves-Smith, T.R. and Sridharan, S. : A finite strip method for the post-locally buckled analysis of plate structures, *International Journal of Mechanical Science* Vol.20, pp.833-842, 1978.
 - 16) Lengyel, P. and Cusens, A.R. : A finite strip method for the geometrically nonlinear analysis of plate structure, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* Vol.19, pp.331-340, 1983.
 - 17) Chia, C.Y. : Geometrically non-linear behavior of composite plates : A review, *Applied Mechanics Review* Vol.41, pp.439-451, 1988.
 - 18) Pagano, N.J. : Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending, *Journal of Composite Materials* Vol.3, pp.398-411, 1969.
 - 19) Pagano, N.J. : Exact solutions for rectangular bidirectional composites and sandwich plates, *Journal of Composite Materials* Vol.4, pp.20-34, 1970.
 - 20) Starnes Jr., J.W., Knight Jr. N.F. and Rouse, M. : Postbuckling behavior of selected flat stiffened graphite-epoxy panels loaded in compression, *AIAA Journal* Vol.23, pp.1236-1246, 1985.
 - 21) Jones, R.M. : *Mechanics of Composite Materials*, New York : McGraw-Hill, 1975.
 - 22) Bathe, K.J. : *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, New Jersey : Prentice-Hall, 1982.

(1991年9月30日受付)