

非線形座屈たわみ角要素による鋼パイプアーチの極限強度解析

ULTIMATE STRENGTH ANALYSIS OF STEEL PIPE ARCHES
BY NONLINEAR BUCKLING-SLOPE-DEFLECTION ELEMENTS

草間晴幸* 柴田良一** 加藤史郎***

By Haruyuki KUSAMA, Ryoichi SHIBATA and Shiro KATO

A new discrete model is proposed to analyse both geometrical and material non-linear behaviors of arch structures. An arch member is divided into some arch segments, one of which is consisted of a nonlinear elastic beam-column element and two elasto-plastic spring systems. It is assumed that an arch segment exists between two external nodal points and a beam-column element exists between two internal nodal points. The stiffness matrix of beam-column element is derived from the buckling-slope-deflection formula. The overall stiffness equation of arch segment is condensed for the external nodal points and is represented in the incremental expression. The accuracy of this model is investigated for the elastic post-buckling analysis and the elastic eigenvalue problem of arch structures. Several considerations are presented from the ultimate strength analysis of the basket handle type steel pipe arches.

1. まえがき

構造解析法の1つに座屈たわみ角法なる解析手法がある。座屈たわみ角法は、曲げ部材に対する通常のたわみ角法に、部材端に作用する軸力の影響を反映させた手法である。

骨組構造物あるいはそれを構成する部材を有限要素により解析する場合、概ね、たわみ関数は梁の曲げ変形に関する4階の微分方程式から導かれる3次式を利用する。そのため、そのたわみ関数を1階微分した式を基として得られる幾何剛性マトリックスを用いて座屈解析する場合、本質的には軸力である固有値パラメーターが幾何剛性マトリックスに対して陽の形で表現できる利点はあるものの、数値計算誤差は必ず存在する。それに対して、座屈たわみ角法は柱の座屈に関する4階の微分方程式を基としているため、それをマトリックス表現した座屈方程式によって骨組構造物を解析した場合、厳密解を得ることができる。

我が国における、座屈たわみ角法に関する研究の先駆者は坂¹⁾であり、剛接架構の安定性に関する研究を行なっている。GALAMBOS²⁾は著書「鋼構造部材と骨組」(福本・西野共訳)の中で、骨組の座屈解析法として座屈たわみ角法を紹介し、座屈たわみ角公式中に現われる安定関数が使い易いように座屈パラメーターの数表を与えている。福本も著書³⁾において、GALAMBOSと同じ観点に立ち、三角フレームなど簡単な骨組の解析を座屈たわみ角によって例示している。また、彼は、応力法表示式、変位法表示式両法による座屈たわみ角法を示し、それぞれを適用する場合における注意事項をまとめている。W.F.CHENおよび

* 正会員 工博 豊橋技術科学大学助教授 工学部建設工学系 (〒441豊橋市天伯町雲雀ヶ丘1の1)

** 工修 豊橋技術科学大学大学院博士後期課程 システム情報工学専攻 (同上)

*** 正会員 工博 豊橋技術科学大学教授 工学部建設工学系 (同上)

E.M.LUIの著書⁴⁾にも座屈たわみ角法が基本式から誘導されている。以上が座屈たわみ角法を取り上げている代表的な成書である。

これらの文献で取り上げられている座屈たわみ角法は骨組の「部材」に対して適用されており、「部材」を離散化した「要素」に対して適用したものではない。「部材に対する」と「要素に対する」とは、ややもすると混同されがちであるが、非常に重要な概念である。例えば、曲げ部材に対する通常のたわみ角法は「部材」に対する公式であるが、その公式中の部材回転角を部材端鉛直変位で表わし、さらに部材端外力と部材端変位の関係をマトリックス表示すると、通常の有限要素法における「曲げ要素」の剛性方程式が得られることは周知の通りである。つまり、たわみ角法は本質的には有限要素法と同一内容の力学的公式であるが通常は「部材」に対して用いられている。これは、部材に作用する中間荷重の影響をたわみ角公式の材端モーメント係数で表現し、最終的に解くべき連立方程式の未知数を少なくしようとするたわみ角法本来の性質に由来するものである。

しかし、座屈たわみ角法を「要素的」に利用することにより、解析対象の領域は格段と広がることになる。座屈たわみ角法を「要素的」に利用した研究としては、樋浦⁵⁾の研究がある。彼は座屈たわみ角法により若干のソリッドアーチリブの座屈強度計算を行ない、LOCKSCHEINの計算結果とよく近似することを示している。

著者らの研究グループは、これまで、ほとんど2次元弾性骨組構造解析にしか利用されていなかった上記の座屈たわみ角法を、3次元弾塑性骨組構造解析に適用すべく改良を加え、従来の研究には見られなかった「要素」としての座屈たわみ角法の定式化に成功した。そして、その手法を鋼製ラチスドーム(網目状シェル)の終局強度解析に適用し、一連の研究成果を報告している⁶⁾⁷⁾⁸⁾。さらに、これまでほとんど未解決であったラチスドームの座屈荷重の推定法および座屈耐荷力曲線を利用した設計法を提案している。

ところで、橋梁形式の1つにアーチ橋なる構造形態がある。アーチまたはアーチ橋の面内及び面外座屈あるいは耐荷力に関しては、今まで多数の研究が行なわれてきた。倉西・矢吹、前田・林、小松・新家、崎元らによる貴重かつ膨大な一連の研究は、福本が編集委員長である「土木学会編・座屈設計ガイドライン」⁹⁾にまとめられており、その成果は道路橋示方書等の改訂時に反映されてきたし、これからも反映されていくであろう。しかし、これらの研究はほとんど単一アーチ、または平行弦アーチを対象をしており、テーパのついたアーチ、いわゆるバスケットハンドル形式アーチを取り扱った研究はほとんどない。上記の「座屈設計ガイドライン」にもテーパのついたアーチは取り扱わない旨明記されている。

ベルギーのHERMALLE橋、ドイツのFEHMARN SUND橋、国立木曾三川公園の入口にかかる長良川大橋、大阪市の長柄橋などに代表されるように、実際に多くのバスケットハンドルアーチ(ニールセン橋)が建設され実用に供している。それにもかかわらず、バスケットハンドルアーチの座屈および耐荷力に関する研究があまり行なわれていないのは残念である。著者の知る限り、バスケットハンドルアーチに関しては奥村・松浦の研究¹⁰⁾¹¹⁾¹²⁾および、北田ら¹³⁾の研究のみがあると思われる。ベルギーのLIEGE大学には上記のHERMALLE橋の座屈と振動に関する研究を行なった報告書がある。

また、従来の研究は、箱型閉断面アーチに関する研究がほとんどであるが、他断面形を有するアーチの研究も急務であると思われる。特にパイプ断面は、(i)圧縮、ねじりに対して有利である、(ii)断面二次半径が大である、(iii)風圧に対する抵抗係数が小である、という利点を有することから実用的に重要である¹⁴⁾。因に、ドイツのKAISERLE橋は全長220mの下路式パイプアーチ橋、天草の松島橋は全長126mの上路式パイプアーチ橋である。また、東名阪自動車道の木曾三川にかかる自動車橋に隣接する歩行者およびライフライン用の小橋員橋も連続パイプアーチ橋である。

本論文は、以上を鑑み、著者らが開発した座屈たわみ角要素を用い、バスケットハンドルパイプアーチの座屈・安定性を対象として、幾何学的、材料的両非線形性を考慮した複合非線形解析の基礎的研究を提示す

るものである。今まで行なってきた座屈たわみ角要素の定式化を統一し、幾何学的非線形解析ができるように増分型座屈方程式を示す。また、アーチの弾塑性挙動を追従できるように、座屈たわみ角要素の両端に弾塑性バネを挿入し、アーチの塑性化はこのバネで評価できるようにした。弾性座屈たわみ角要素の間に弾塑性バネを挿入することは、一見、粗雑なモデル化のように思われるが、このモデルは弾塑性領域の広がり評価できる通常の有限要素モデルと剛体・バネ要素モデル（いわゆる川井モデル）¹⁵⁾の中間に位置するモデルと考えることができる。つまり、弾性後座屈領域においては、変形挙動特性を極力正確に追従し、バネ要素が降伏状態に達するとそのバネ要素が位置する断面において塑性ヒンジが発生するというモデルを表わしている。そして、パイプ部材から構成されるラチスドームやバスケットハンドルアーチのような空間構造物の極限強度を、本論文で提案するモデルによって評価でき得ることを検討するものである。

2. 解析手法

(1) アーチセグメントの定義

アーチ部材の複合非線形解析を可能にするため、アーチ部材を図-1に示すような有限個のアーチセグメントに分割する。1つのアーチセグメントは図-2に示される構成要素(component)から形成される。図中、 B_e は弾性座屈たわみ角要素、 S_x は軸力を伝達する伸縮バネ要素、 S_y, S_z はそれぞれy軸回り、z軸回りのモーメントを伝達する回転バネ要素である。

図-1の(X,Y,Z)座標は構造物全体に対する全体座標系、図-2の(x,y,z)座標はアーチセグメントに対する局所座標系である。両座標系とも3次元右手直交デカルト座標系である。

アーチセグメントのA点、B点が通常FEMの節点に相当するが、本論文では、このA,B点を外部節点、また座屈たわみ角要素の両端点a,b点を内部節点と呼ぶことにする。

外部節点A,Bに挟まれるアーチセグメントの外部節点変位ベクトル $\{d_{AB}\}$ 、および外部節点外力ベクトル $\{f_{AB}\}$ は次のようになる。

$$\{d_{AB}\}^T = \begin{Bmatrix} d_A \\ d_B \end{Bmatrix} = \{u_A, v_A, w_A, \theta_{xA}, \theta_{yA}, \theta_{zA}, u_B, v_B, w_B, \theta_{xB}, \theta_{yB}, \theta_{zB}\} \quad (1)$$

$$\{f_{AB}\}^T = \begin{Bmatrix} f_A \\ f_B \end{Bmatrix} = \{N_A, Q_{yA}, Q_{zA}, M_{xA}, M_{yA}, M_{zA}, N_B, Q_{yB}, Q_{zB}, M_{xB}, M_{yB}, M_{zB}\} \quad (2)$$

式(1),(2)において、添字Aをaに、添字Bをbに置き換えると内部節点a,bに挟まれる座屈たわみ角要素の内部節点変位ベクトル $\{d_{ab}\}$ と内部節点外力ベクトル $\{f_{ab}\}$ が得られる。図-3に $\{d_{ab}\}, \{f_{ab}\}$ の各成分を示す。

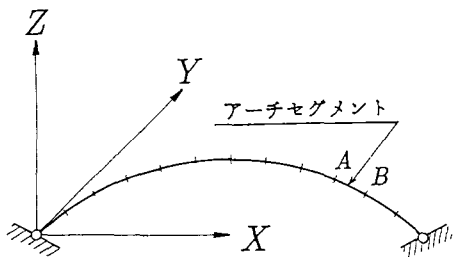


図-1 アーチセグメント

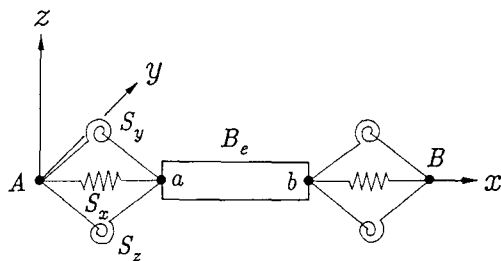


図-2 アーチセグメントのコンポーネント

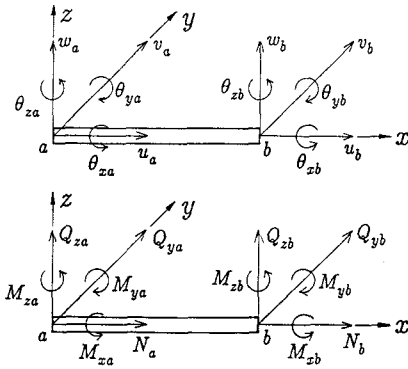


図-3 内部節点外力および内部節点変位

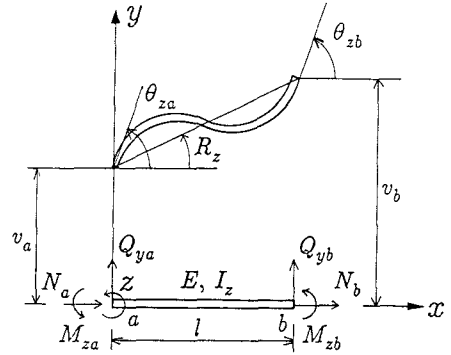


図-4 座屈たわみ角要素の曲げ変形

(2)基本仮定

アーチセグメントの剛性方程式を導くために必要となる基本仮定を以下に列記する。

- 曲線構造であるアーチ部材を有限個の直線アーチセグメントにより離散化する。
- アーチセグメントは断面寸法に比して部材長が十分に長い一次元構造要素である。
- アーチセグメントは外部節点において外力を受けるものとし、中間荷重は存在しない。
- アーチセグメントの軸方向変位に関しては、工学的に近似表示された軸ひずみと回転歪の影響を考慮する。
- アーチセグメントの両外部節点において発生する、軸方向と直交する変位は両節点における差が小さいとする。
- 曲げ変形に対してはベルヌーイ・オイラーの法則、ねじり変形に対してはクーロンの法則が成立する。
- 伸縮バネ、回転バネの長さを無視する。その結果、アーチセグメントに対する局所座標系と座屈たわみ角要素に対する局所座標系は等しくなる。

(3)座屈たわみ角要素

a)曲げモーメント及びせん断力の表示式

x y 平面内における、座屈たわみ角要素の節点外力と節点変位を図-4に示す。図-4において、a,b点は内部節点である。要素は長さ l 、曲げ剛性 EI_z を持ち、軸力 N_a, N_b 、曲げモーメント M_{za}, M_{zb} を受けて変形している。このとき、x y 平面内における座屈たわみ角要素の支配方程式は次式となる。

$$EI_z \cdot d^2 y / dx^2 + N_a \cdot y(x) + M_{za} - [(M_{za} + M_{zb}) / l + N_a \cdot R_z] \cdot x = 0 \quad (3)$$

ここで R_z は要素の剛体回転角である。 $\xi = x/l$ なる正規化パラメータを導入すると上式は次のようになる。

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + \frac{l^2}{EI_z} N_a \cdot y(\xi) = - \frac{M_{za} \cdot l^2}{EI_z} (1-\xi) + \frac{M_{zb} \cdot l^2}{EI_z} \xi + \frac{N_a \cdot l^3}{EI_z} R_z \cdot \xi \quad (4)$$

これを解けば曲げモーメントとたわみ角の関係を示す式を得ることができるが、軸力の正負(圧縮力又は引張力)により取り扱いが異なるため、それぞれの場合における支配方程式とその解を列挙する。

・軸力が圧縮力の場合($N_a = P, N_b = -P$)

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} + Z_c^2 \cdot y(\xi) = - \frac{M_{za} \cdot l^2}{EI_z} (1-\xi) + \frac{M_{zb} \cdot l^2}{EI_z} \xi + Z_c^2 \cdot R_z \cdot l \cdot \xi \quad (5)$$

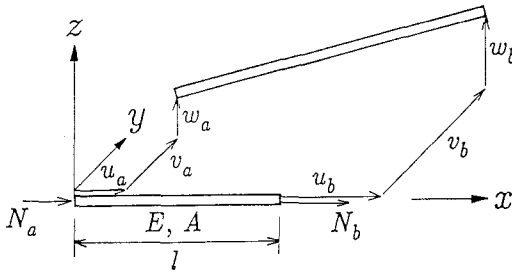


図-5 座屈たわみ角要素の軸変形

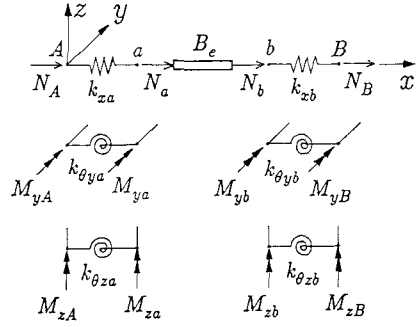


図-6 バネ要素

上式の解

$$y = c_1 \cos Z_c \xi + c_2 \sin Z_c \xi - \frac{M_{za} \cdot l^2}{EI_z \cdot Z_c^2} (1 - \xi) + \frac{M_{zb} \cdot l^2}{EI_z \cdot Z_c^2} \xi + R_z \cdot l \cdot \xi \quad (6)$$

・軸力が引張力の場合、($N_a = -P, N_b = P$)

$$\frac{d^2 y(\xi)}{d\xi^2} - Z_t^2 \cdot y(\xi) = -\frac{M_{za} \cdot l^2}{EI_z} (1 - \xi) + \frac{M_{zb} \cdot l^2}{EI_z} \xi - Z_t^2 \cdot R_z \cdot l \cdot \xi \quad (7)$$

上式の解

$$y = c_3 \cosh Z_t \xi + c_4 \sinh Z_t \xi + \frac{M_{za} \cdot l^2}{EI_z \cdot Z_t^2} (1 - \xi) - \frac{M_{zb} \cdot l^2}{EI_z \cdot Z_t^2} \xi + R_z \cdot l \cdot \xi \quad (8)$$

ここで、 $Z_c^2 = \frac{Pl^2}{EI_z}$, $Z_t^2 = -\frac{Pl^2}{EI_z}$, である。式(6),(8)で表わされる微分方程式の解が持つ積分定数を決定するために、次の幾何学的境界条件を与える。

$$\xi = 0; y = 0, \quad \xi = 1; y = R_z \cdot l \quad (9)$$

積分定数が決定した後、式(6),(8)に対し、たわみ角の表示を導入するため、次の境界条件を考慮する。

$$\xi = 0; \frac{dy}{d\xi} = \theta_{za} \cdot l, \quad \xi = 1; \frac{dy}{d\xi} = \theta_{zb} \cdot l \quad (10)$$

以上により、最終的に次の座屈たわみ角公式が得られる。

$$M_{za} = \frac{2EI_z}{l} \left[2A_z \cdot \theta_{za} + B_z \cdot \theta_{zb} - (2A_z + B_z) R_z \right], \quad M_{zb} = \frac{2EI_z}{l} \left[B_z \cdot \theta_{za} + 2A_z \cdot \theta_{zb} - (2A_z + B_z) R_z \right] \quad (11)$$

・軸力が圧縮力の場合

$$A_z = \frac{1}{4} \cdot \left[\frac{Z_c (\sin Z_c - Z_c \cos Z_c)}{2(1 - \cos Z_c) - Z_c \sin Z_c} \right], \quad B_z = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{Z_c (Z_c - \sin Z_c)}{2(1 - \cos Z_c) - Z_c \sin Z_c} \right] \quad (12)$$

・軸力が引張力の場合

$$A_z = -\frac{1}{4} \cdot \left[\frac{Z_t (\sinh Z_t - Z_t \cosh Z_t)}{2(1 - \cosh Z_t) + Z_t \sinh Z_t} \right], \quad B_z = -\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{Z_t (Z_t - \sinh Z_t)}{2(1 - \cosh Z_t) + Z_t \sinh Z_t} \right] \quad (13)$$

式(11)より曲げモーメントとせん断力のマトリックス表示式が次のように得られる。

$$\{F_y\} = [K_y] \cdot \{D_y\} \quad (14)$$

ここで、

$$\{F_y\}^T = \{Q_{ya} \ M_{za} \ Q_{yb} \ M_{zb}\}, \quad \{D_y\}^T = \{v_a \ \theta_{za} \ v_b \ \theta_{zb}\} \quad (15)$$

$$[K_y] = \begin{bmatrix} \frac{4EI_z}{l^3}(2A_z+B_z) - \frac{P}{l} & \frac{2EI_z}{l^2}(2A_z+B_z) & -\frac{4EI_z}{l^3}(2A_z+B_z) + \frac{P}{l} & \frac{2EI_z}{l^2}(2A_z+B_z) \\ & \frac{4EI_z}{l}A_z & \frac{2EI_z}{l^2}(2A_z+B_z) & \frac{2EI_z}{l}B_z \\ & & \frac{4EI_z}{l^3}(2A_z+B_z) - \frac{P}{l} & -\frac{2EI_z}{l^2}(2A_z+B_z) \\ \text{SYM.} & & & \frac{4EI_z}{l}A_z \end{bmatrix} \quad (16)$$

同様に、x z 平面内における座屈たわみ角要素の支配方程式を導き、その結果をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\{F_z\} = [K_z] \cdot \{D_z\} \quad (17)$$

ここで、

$$\{F_z\}^T = \{Q_{za} \ M_{ya} \ Q_{zb} \ M_{yb}\}, \quad \{D_z\}^T = \{w_a \ \theta_{ya} \ w_b \ \theta_{yb}\} \quad (18)$$

また $[K_z]$ の内容は式(16)の添字 z を y に置きかえることにより得られる。

b)ねじりモーメントの表示式

内部節点に作用するねじりモーメント M_{za}, M_{zb} と、その節点に発生するねじり角 θ_{za}, θ_{zb} との関係が線形であると仮定すると、次式で表わされる周知のマトリックス表示式が成立する。

$$\begin{Bmatrix} M_{za} \\ M_{zb} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} GI_x/l & -GI_x/l \\ -GI_x/l & GI_x/l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_{za} \\ \theta_{zb} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

c)軸力の表示式

幾何学的非線形性を考慮して軸力と要素の変形の関係を厳密に表現しようとする Green のひずみテンソルを用いなければならない。しかし、ひずみテンソル、回転テンソルの値が 1 に比して十分に小さい場合には、通常、工学的に近似表示された式が用いられる。ここでも、その表示式を採用する。座屈たわみ角要素が図-5 のように変位していると仮定すると軸力と変位の関係は次のように表示することができる¹⁶⁾。

$$N_a = -N_b = -EA \left[\frac{u_b - u_a}{l} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_b - w_a}{l} \right)^2 \right] \quad (20)$$

ここで、非線形項を次のように表わす。

$$N_{Na} = -EA \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_b - w_a}{l} \right)^2 \right], \quad N_{Nb} = EA \left[\frac{1}{2} \left(\frac{v_b - v_a}{l} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{w_b - w_a}{l} \right)^2 \right] \quad (21)$$

式(20),(21)をマトリックス表示すると次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} N_a \\ N_b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/l & -EA/l \\ -EA/l & EA/l \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u_a \\ u_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N_{Na} \\ N_{Nb} \end{Bmatrix} \quad (22)$$

d)座屈たわみ角要素の剛性方程式

これまでに得られた式(14),(17),(19),(22)を重ね合わせるにより次に示す座屈たわみ角要素の剛性方程式が求まる。

$$\{f_{ab}\} = [K_B] \cdot \{d_{ab}\} + \{f_N\} \quad (23)$$

ここで、 $\{d_{ab}\}, \{f_{ab}\}, \{f_N\}$ はそれぞれ、内部節点変位ベクトル、内部節点外力ベクトルおよび非線形軸力ベクトルであり、 $[K_B]$ は要素剛性マトリックスである。 $\{d_{ab}\}, \{f_{ab}\}$ の構成成分は前述したように、それぞれ、式(1),(2)の添字Aをaに、添字Bをbに置き換えることによって表わされる。

(4)弾性バネ要素

アーチセグメントには図-6に示すように6つのバネ要素が存在する。外部節点Aと内部節点aの間にあるバネには添字のaを付けて S_{xa}, S_{ya}, S_{za} と表わし、それぞれのバネ定数を $k_{xa}, k_{\theta ya}, k_{\theta za}$ とする。同様に、内部節点bと外部節点Bの間にあるバネに対しては添字bを付けて、 $S_{xb}, S_{yb}, S_{zb}, k_{xb}, k_{\theta yb}, k_{\theta zb}$ なる記号を用いる。外部節点Aと内部節点aに挟まれるバネ系の節点変位ベクトル $\{d_{Aa}\}$ および節点外力ベクトル $\{f_{Aa}\}$ は次のようになる。

$$\left\{ d_{Aa} \right\} = \begin{Bmatrix} d_A \\ d_a \end{Bmatrix}, \quad \left\{ f_{Aa} \right\} = \begin{Bmatrix} f_A \\ f_a \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$\{d_{Aa}\}$ と $\{f_{Aa}\}$ の関係は、バネ系の剛性マトリックス $[K_{sa}]$ によって次のように表わされる。

$$\{f_{Aa}\} = [K_{sa}] \cdot \{d_{Aa}\} \quad (25)$$

同様に、内部節点bと外部節点Bに挟まれるバネ系に対しては次の剛性方程式が成立する。

$$\{f_{bB}\} = [K_{sb}] \cdot \{d_{bB}\} \quad (26)$$

バネ定数は変形の適合性を満足するように次のように定めた。

バネ要素と座屈たわみ角要素の剛性の比を表わす無次元バネ定数パラメーター $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$ を以下のように定義する。

$$\alpha_x = k_x / (EA/l), \quad \alpha_y = k_{\theta y} / (EI_y/l), \quad \alpha_z = k_{\theta z} / (EI_z/l) \quad (27)$$

本解析では、既往の研究(6)~(8)に基づいて上記のパラメーターの値を次のように設定した。

$$\alpha_x = 10, \quad \alpha_y = \alpha_z = 100 \quad (28)$$

(5)増分表示によるアーチセグメントの剛性方程式

前節までに得られた座屈たわみ角要素、バネ要素の剛性方程式を重ね合わせることにによりアーチセグメント全体の剛性方程式を得ることができる。しかし、非線形解析を可能にするため各要素の剛性方程式を増分表示することが必要である。

例えば、式(20)を増分表示する場合、以下のように処理する。変位が $\{d_{ab}\}$ から $\{d_{ab} + \Delta d_{ab}\}$ に増加し、それに対応して軸力が $N_a(d)$ から $N_a(d + \Delta d)$ に変化したとする。すると、

$$N_a(d + \Delta d) = -EA \left[\frac{(u_b + \Delta u_b) - (u_a + \Delta u_a)}{l} + \frac{1}{2} \left[\frac{(v_b + \Delta v_b) - (v_a + \Delta v_a)}{l} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{(w_b + \Delta w_b) - (w_a + \Delta w_a)}{l} \right]^2 \right] \quad (29)$$

$\Delta v_a, \Delta v_b, \Delta w_a, \Delta w_b$ が十分に小さいとすれば次式が成立する。

$$N_a(d + \Delta d) = N_a - \frac{EA}{l} (\Delta u_b - \Delta u_a) - \frac{EA}{l} \left[\frac{v_b - v_a}{l} (\Delta v_b - \Delta v_a) + \frac{w_b - w_a}{l} (\Delta w_b - \Delta w_a) \right] \quad (30)$$

曲げモーメント、せん断力、ねじりの各表示式に対し、上式と同様な処理を行い、その結果をマトリックス表示すると、増分表示された座屈たわみ角法の剛性方程式が得られる。

$$\{f_{ab}(d+\Delta d)\}=[K_B^t]\cdot\{\Delta d_{ab}\}+\{f_{ab}(d)\} \quad (31)$$

ここで、 $[K_B^t]$ は接線剛性マトリックスであり次式を意味する。

$$[K_B^t]=[K_B]+[K_N] \quad (32)$$

$[K_B]$ は既に与えられている。また $[K_N]$ は増分表示に伴って出現する非線形剛性マトリックスであり、その成分は付録に示される。バネ要素の剛性方程式(25),(26)に対しても増分表示を行うと、それぞれ次のようになる。

$$\{f_{Aa}(d+\Delta d)\}=[K_{sa}]\cdot\{\Delta d_{Aa}\}+\{f_{Aa}(d)\} \quad (33)$$

$$\{f_{bB}(d+\Delta d)\}=[K_{sb}]\cdot\{\Delta d_{bB}\}+\{f_{bB}(d)\} \quad (34)$$

式(31),(33),(34)を重ね合わせることで増分表示されたアーチセグメントの全体剛性方程式を作成することができる。その場合の剛性マトリックスのサイズは 24×24 となる。

しかし、式(31),(33),(34)の表示式には外部節点と内部節点双方の節点変位ベクトル、節点外力ベクトルが含まれている。アーチセグメントの全体剛性方程式を外部節点のみに対する表示式にするため、剛性マトリックスの縮約を行なう必要がある。縮約の方法および縮約された剛性マトリックスの物理的性質についてはGALLAGHERの著書¹⁷⁾に詳しくのべられている。

最終的に、増分表示されたアーチセグメントの全体剛性方程式は次のようになる。

$$\{f_{AB}(d+\Delta d)\}=[K_C]\cdot\{\Delta d_{AB}\}+\{f_{AB}(d)\} \quad (35)$$

ここで、 $[K_C]$ が縮約剛性マトリックスであり、そのサイズは 12×12 である。

(6)弾塑性バネ要素

アーチセグメントの塑性化をバネ要素で評価するための、弾塑性領域におけるバネ系の剛性マトリックスが必要となる。ここでは、塑性ポテンシャル理論と塑性流動則に従って、その剛性マトリックスを導く¹⁸⁾。

外部節点と内部節点に挟まれるバネ系の増分外力ベクトルは次式となる。

$$\{\Delta f\}^T=\{\Delta N_x, \Delta M_y, \Delta M_z\} \quad (36)$$

また増分外力ベクトルに対応する増分変位ベクトルは弾性成分と塑性成分の線形和で表わされるとする。

$$\{\Delta d\}=\{\Delta d_e\}+\{\Delta d_p\} \quad (37)$$

増分外力ベクトルは増分変位の弾性成分のみによって増加すると考える。

$$\{\Delta f\}=[K_e]\cdot\{\Delta d_e\} \quad (38)$$

ここで、 $[K_e]$ はバネ系の弾性剛性マトリックスである。

塑性ポテンシャル理論によると、降伏関数は通常次式によって表わされる。

$$f=f(N_x, M_y, M_z)=0 \quad (39)$$

また、降伏関数の接線ベクトルは次のように表わされる。

$$\{\phi\}^T=\{\phi_x, \phi_y, \phi_z\}=\left\{\frac{\partial f}{\partial N_x}, \frac{\partial f}{\partial M_y}, \frac{\partial f}{\partial M_z}\right\} \quad (40)$$

塑性流動則により、次の関係式が成立する。

$$\{\Delta d_p\}=\lambda\cdot\{\phi\} \quad (41)$$

ここで、 λ は塑性流れ定数と呼ばれるスカラーである。また、式(36),(40)の間には、次の関係が成立する。

$$\{\phi\}^T \cdot \{\Delta f\} = 0 \quad (42)$$

上式に式(37),(38),(41)を代入して整理すると、 λ が次のように決定される。

$$\lambda = \frac{\{\phi\}^T [K_e] \{\Delta d\}}{\{\phi\}^T [K_e] \{\phi\}} = \{\phi_\lambda\}^T \cdot \{\Delta d\} \quad (43)$$

式(38)に式(37),(43)を代入して整理すると、増分変位ベクトルと増分外力ベクトルの関係式が導かれる。

$$\{\Delta f\} = \left[[K_e] - [K_e] \{\phi\} \{\phi_\lambda\}^T \right] \{\Delta d\} = [K_p] \{\Delta d\} \quad (44)$$

上式の $[K_p]$ がバネ要素の弾塑性剛性マトリックスである。

(7)数値解析手法

本研究では、アーチ構造物の力学的特性を検討するために、線形固有値解析と弾性または弾塑性増分解析を行なっている。式(16)から分かるように、座屈たわみ角要素の剛性マトリックスに対して軸力が陰の形で含まれているため、通常の線形固有値解析はできない。そこで次の手順により固有値解析を行った。

- (i) 剛性マトリックス $[K_B(N)]$ を用いて、軸力 $N=0$ の場合の線形剛性マトリックス $[K_B(N=0)]$ を計算する。
- (ii) 構造物に対して基本荷重 P_0 を与え、線形剛性マトリックスより各部材の軸力 N_0 を求める。
- (iii) 想定荷重 $P=\lambda \cdot P_0$ に対応して、軸力も $N=\lambda \cdot N_0$ に変化すると仮定して、 $\lambda \cdot N_0$ を代入した剛性マトリックス $[K_B(N=\lambda \cdot N_0)]$ を作成する。
- (iv) λ を増分させ、剛性マトリックスの行列式が0となる値 λ_{cr} を、二分法を用いて求める。
- (v) 得られた λ_{cr} は、最小の座屈荷重を与える固有値に対応するものであり、座屈荷重は $P_{cr}=\lambda_{cr} P_0$ となる。
- (vi) $\lambda_{cr} \cdot N_0$ を代入した剛性マトリックスを用いて、Jenningsの同時反復法より座屈モードを求める。

一方、弾性および弾塑性増分解析に対しては、通常の実数非線形解析にしばしば利用される区分的線形型Newton-Raphson法を用いた。最大荷重以前においては荷重増分法、それ以後は変位増分法により解析を行っている。

3.解析手法の照査

本解析法による幾何学的非線形解析の精度を照査するため求心満載荷重が作用する偏平円弧固定アーチの後座屈挙動の追跡計算を行った。偏平円弧固定アーチは飛移り現象が発生する非線形性の強い構造である。

計算結果を図-7に示す。縦軸には無次元荷重パラメーター、横軸には無次元水平反力を採っている。本計算において、 $L=10.0m$, $EI=68943tf \cdot cm^2$ ($675641.4KNm^2$)を使用した。

実線が本解析法による計算結果であり、円弧アーチを12個のアーチセグメントに分割している。破線は理論解であるが、本解析法によって得られる解析曲線は理論曲線と概ね良い一致を示している。伊藤らは¹⁵⁾、剛体要素内において2本の軸方向バネと1本の集中せん断バネを有する剛体バネモデルにより同一円弧アーチの後座屈解析を行っているが、本解析法とほぼ同じ精度を得るために18個の要素を必要としている。

図-8は図-7と同じ偏平円弧固定アーチの荷重と鉛直方向変位の関係を示している。Z7曲線がアーチクラウンの、Z4曲線がアーチのL/4点の変形挙動を表わしている。アーチの座屈荷重は無次元荷重パラメーターの値で7.56である。両図より、飛移り現象を十分な精度で追跡していることが判る。

次に弾性固有値解析に対する本解析法の精度を検証する。奥村・松浦¹¹⁾がエネルギー法によりバスケッ

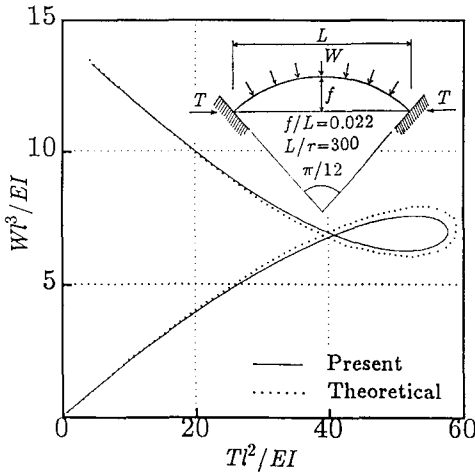


図-7 偏平円弧固定アーチの後座屈挙動

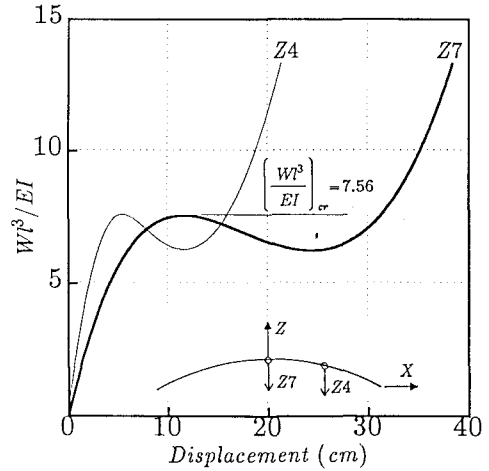


図-8 偏平円弧固定アーチの荷重変位曲線

トハンドル鋼パイプアーチの弾性固有値解析を行っているので、その研究結果と本解析法による数値計算結果を比較する。

図-9にバスケットハンドルアーチ全体構造の概形図を示す。アーチ形態は2本のアーチリブが円弧形であり、スパン中央クラウンで剛結されているとする。1本のアーチリブは同図に示される π 平面内に位置すると考えられる。また、テーパ角は同図に示された角度 Φ で定義される。

奥村・松浦はバスケットハンドルアーチの座屈モードとして、(i) XZ平面内における対称座屈モード、(ii) XZ平面内におけるスウェイモード、(iii) X軸回りの面外座屈モード、(iv) Z軸回りのねじれ座屈モードの4つを挙げている。

上記論文の結論として、対称座屈モードに対する座屈荷重はテーパ角に依存しないこと、また解析上は面外座屈モードも問題となるが通常はスウェイ座屈モードに対する検討が最も必要であることが明記されている。よって、スウェイ座屈モードに対して本解析法の精度を比較検討する。

図-10はバスケットハンドル鋼パイプアーチの弾性スウェイ座屈値をテーパ角の変化に対してプロットしたものである。アーチ支承の条件は、図-9の π 平面に垂直な軸回りの回転のみが自由である。

実線が奥村・松浦の解析結果であり、○△印が本解析法による計算結果である。両者は良く一致しており、弾性固有値解析に対する本解析法の妥当性を示している。

次に、植木ら⁷⁾による単層ラチスドームの載荷実験結果と、本解析法による数値計算結果を比較検討することにより、骨組の弾塑性解析に対する本解析手法の精度を照査する。図-11は1節点に集中荷重を受ける六角形平面単層ラチスドームの荷重-変位曲線である。○印が実験結果であり、他の3曲線は式(28)に示された無次元バネ定数パラメータの値を変化させたことによって得られる解析結果である。1点鎖線と破線の差はバネ定数の値を2倍にすることにより、また、破線と実線の差はバネ定数の値を5000倍することにより現れる。

このように本解析手法によるバネ要素は、そのバネ定数の変化に対して、対象とする構造物の変形挙動が急激に鈍感になる値が存在するという特性を持っている。そして、その値を採用することにより、十分に満足するシミュレーションを行えることが、今までの研究により判明している。よって、以下の数値解析においては、そのバネ定数を使用することとする。

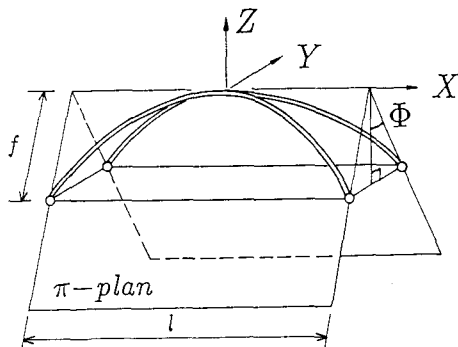


図-9 バスケットハンドルパイプアーチの概形図

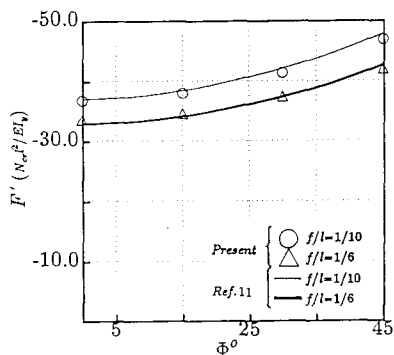


図-10 バスケットハンドルパイプアーチの弾性座屈値

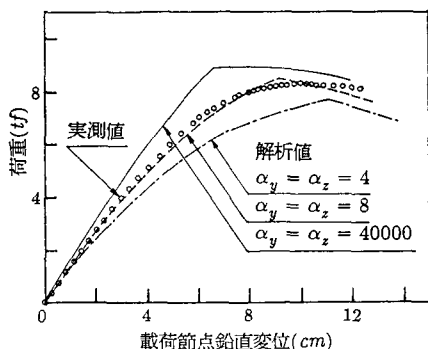


図-11 六角形平面単層ラチスドームの荷重変位曲線

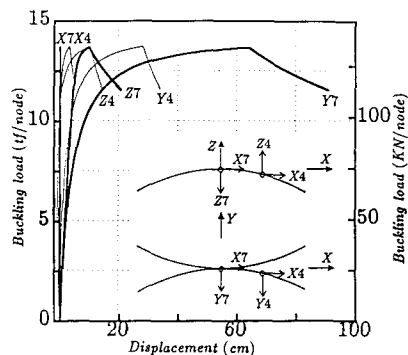


図-12 面外初期変形を有する固定アーチの荷重変位曲線

4. 極限強度解析

本解析法により、バスケットハンドル鋼パイプアーチ(以下、簡潔にアーチと称する) に対する若干の極限強度解析を行う。計算の基礎的条件として次の仮定や制約を設ける。

アーチの基本形および構造全体に対する座標系は図-9に示されるものを採用する。荷重は最も基本的な載荷状態として、アーチ断面のせん断中心を通り、図-9の π 平面内曲率中心方向に等分布荷重 w が満載され、座屈前、座屈後も作用方向が変化しないとする。パイプ断面は外径 $D=50\text{ cm}$ 、肉厚 $t=1\text{ cm}$ とし、支間 $l=60\text{ m}$ 、ライズ比 $f/l=1/6$ 、アーチ円弧半径 $R=50\text{ m}$ 、テーバー角 $\Phi=15^\circ$ とする。また、アーチリブ1本を12個のアーチセグメントに分割する。

図-12は、面外方向(Y方向)に、クラウン位置が最大値($l/1000$)となる $\sin$ 半波の初期たわみを有する固定アーチの荷重変位曲線である。この初期たわみモードはアーチをはじめ鋼構造部材の初期変形としてしばしば用いられる⁹⁾。(X7,Y7,Z7)はアーチクラウンの、(X4,Y4,Z4)はアーチの $l/4$ 点の X,Y,Z軸各方向の変形挙動を表わしている。また、図-13に同アーチの立体変形図を示す。荷重増分112ステップの段階で図-13の変形図に●記号で示される位置のバネ系に降伏開始点が発生する。この位置は面外初期たわみの凸側アーチリブにおけるクラウン両側のバネ系を表わす。降伏開始位置がアーチの極限強度となり、このとき $w_{cr}=2.56\text{ tf/m}(25.1\text{ KN/m})$ であり、1節点当たり $P_{cr}=13.7\text{ tf}(134\text{ KN})$ の節点外力が作用している。それ以後は、同図から明らかなように、変形量は増大するが強度が急激に低下する面外崩壊の様相を呈する。

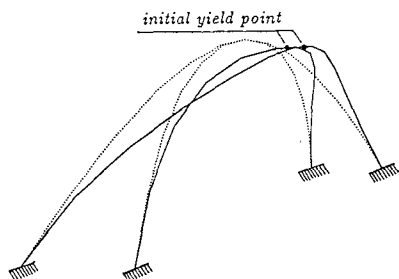


図-13 面外初期変形を有する固定アーチの変形図

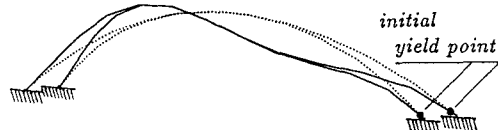


図-14 面内初期変形を有する固定アーチの変形図

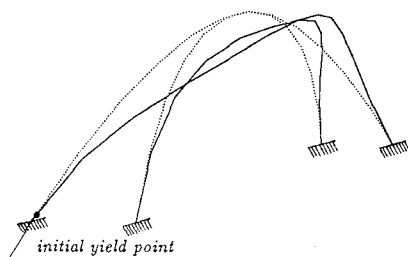


図-15 面内及び面外初期変形を有する固定アーチの変形図

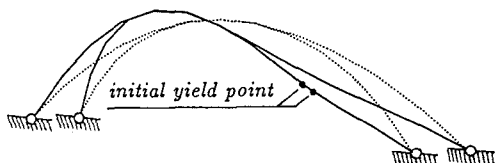


図-16 面内及び面外初期変形を有するヒンジアーチの変形図

図-14は、面内 Z 方向に、アーチ $l/4$ 点の位置が最大値 ($l/1000$) となる $\sin 1$ 波の初期たわみを有する固定アーチの立体変形図である。この初期たわみモードも、面外 $\sin$ 半波同様鋼構造部材に対して、しばしば利用される。初期たわみの形状を追従するスウェイ座屈の変形挙動により崩壊に至ることが同図より判明する。図-14に示されるように固定端隣接バネ系に降伏開始点が発生する。そのときがアーチの極限強度となり、 $w_{cr}=3.34tf/m(32.7KN/m)$ 、1節点当たり $P_{cr}=17.9tf(175KN)$ の節点外力が作用している。

図-15は前2例に採用した面外および面内の両初期たわみを有する固定アーチの立体変形図である。この固定アーチの極限強度時の荷重は $w_{cr}=2.55tf/m(25.0KN/m)$ 、 $P_{cr}=13.7tf(134KN)$ であり、面外初期たわみのみを有する固定アーチの極限強度にほぼ等しくなることは非常に興味深いことである。しかも、図-13、図-15両変形図は類似しており、いわゆる面外座屈モードにより崩壊に至っている。しかし、降伏開始点は異なる。

図-16は図-15の変形挙動を示す固定アーチと同一構造、同一初期たわみを有するヒンジアーチの立体変形図である。ここでいうヒンジ支承は図-9に示された π 平面に垂直な軸回りの回転のみが自由である構造である。塑性開始点は面外初期たわみの凹側アーチリブにおけるアーチ $l/4$ 点両側のバネ系である。このヒンジアーチの極限強度時の荷重は $w_{cr}=1.73tf/m(17.0KN/m)$ 、 $P_{cr}=9.26tf(90.7KN)$ である。図-16から分かるように、このヒンジアーチはスウェイ座屈モードにより崩壊に至ることを示しており、同一構造、同一初期変形を有していても支承条件の違いにより崩壊モードが異なることを示す例である。

奥村・松浦はヒンジアーチの弾性固有値解析の結果からスウェイ座屈荷重の重要性を指摘したが、本極限強度解析により、固定アーチの方がヒンジアーチに比べてより実際構造物に近いことを考えると、スウェイ座屈だけでなく境界条件の影響を考慮した、面外座屈に対する検討を充分に行うことが必要であると思われる。

また、面内初期たわみのみを有するヒンジアーチの解析も行ったが、面外、面内両初期たわみを有するヒンジアーチと同じスウェイモードで崩壊した。しかも、両ヒンジアーチの極限強度時の荷重は概ね等しくな

った。しかし、面内初期たわみのみを有するヒンジアーチでは、2本のアーチリブ $l/4$ 点に隣接する4つのバネ系が同時に塑性開始点となった。

アーチの幾何的寸法や初期たわみの最大量を変化させるなどのパラメトリック解析をしていないので、上記の解析例だけで判断するには危険を伴うかもしれないが、解析結果の1評価として言及すれば、以上の固定アーチ及びヒンジアーチの極限強度解析より次のことが推測できる。

本論文で取りあげた制約範囲内において、面外および面内初期たわみを有するバスケットハンドルパイプアーチの極限強度に対して、構造条件の違いにより面外、面内どちらか一方の初期たわみの影響が卓越する。その結果、両初期たわみを有するアーチの極限強度は、卓越する初期たわみのみを有するアーチの極限強度にほぼ等しくなると思われる。

面外、面内どちらの初期たわみが卓越するのか、構造系を分類すること、ならびに現在までほとんどなされていないバスケットハンドルアーチの面外極限強度に対する解析データの蓄積と設計強度公式の提案が今後の研究課題であろう。

5. まとめ

本研究により得られた結果は次の通りである。

- (1) 非線形弾性座屈たわみ角要素および弾塑性バネ系から構成されるアーチセグメントに対する増分型剛性方程式の統一化を行った。
- (2) 本解析法の精度を検証するため、偏平円弧固定アーチの後座屈解析およびバスケットハンドル鋼パイプアーチの弾性固有値解析に関する既応の研究結果と本解析法による計算結果の比較検討、並びに、ラチスドームの載荷実験結果と本解析法による弾塑性解析を比較検討し、本解析法の妥当性が証明された。
- (3) バスケットハンドル鋼パイプアーチの極限強度に関する若干の例題を解析し、既応の弾性固有値解析から得られた考察に問題点のあることを指摘した。
- (4) 実際に発生し得る面外、面内両初期たわみを有するバスケットハンドル鋼パイプアーチの崩壊モードは面内スウェイまたは面外変形であると思われるが、ライズ比、リブ剛性、支承条件を変化させるなど、同アーチ構造の極限強度に関するパラメトリック解析の必要が認められる。

今後は本論文で提案した解析法を用いて、上横構、吊材などアーチ実構造の影響をも考慮した解析を進め、バスケットハンドルアーチの設計強度公式の提案などに取り組む予定である。

APPENDIX

式(32)における $[K_N]$ の成分を以下に示す。 $[K_N]$ はサイズ 12×12 の対称マトリックスであり、下記の成分及びそれらに対応する対称マトリックス成分以外はゼロ成分である。

$$\mu = \frac{AE}{l}, v_{ab} = \mu(v_b - v_a)/l, w_{ab} = \mu(w_b - w_a)/l \text{ とすると、}$$

$$\begin{array}{lll} K_N(1,2) = v_{ab} & K_N(2,7) = -v_{ab} & K_N(3,9) = -w_{ab}^2 \\ K_N(1,3) = w_{ab} & K_N(2,8) = -v_{ab}^2 & K_N(7,8) = v_{ab} \\ K_N(1,8) = -v_{ab} & K_N(2,9) = -v_{ab}w_{ab} & K_N(7,9) = w_{ab} \\ K_N(1,9) = -w_{ab} & K_N(3,3) = w_{ab}^2 & K_N(8,8) = v_{ab}^2 \\ K_N(2,2) = v_{ab}^2 & K_N(3,7) = -w_{ab} & K_N(8,9) = v_{ab}w_{ab} \\ K_N(2,3) = v_{ab}w_{ab} & K_N(3,8) = -v_{ab}w_{ab} & K_N(9,9) = w_{ab}^2 \end{array}$$

参考文献

1. 坂静雄：撓角撓度法による剛接架構の安定論、建築雑誌、45、551、pp.1629-1676、1931年
2. T.V.GALAMBOS(福本昉士、西野文雄共訳)：鋼構造部材と骨組-強度と設計-、丸善、1970年
3. 福本昉士：新大系土木工学9、構造物の座屈・安定解析、技報堂、1982年
4. W.F.CHEN,EM.LUI：Structural Stability、Elsevire Science Publishing Co.,Inc.、1987
5. 樋浦大三：ソリッドアーチリブの座屈強度の計算法について、土木学会誌、第26巻第12号、pp.1116-1135、1940年
6. 加藤史郎、石川浩一郎：ピン接合単層ラチスドームの弾塑性座屈荷重について、日本建築学会構造系論文報告集、第404号、pp.105-114、1989年10月
7. 植木隆司、向山洋一、庄村昌明、加藤史郎：単層ラチスドームの載荷実験および弾塑性座屈解析、日本建築学会構造系論文報告集、第421号、pp.117-128、1991年3月
8. 加藤史郎、山田聖志、高島英幸、柴田良一：剛接合単層ラチスドームの座屈応力度に関する研究、日本建築学会構造系論文報告集、第428号、pp.97-105、1991年10月
9. 福本昉士編：座屈設計ガイドライン、土木学会、1987年
10. 奥村敏恵、松浦聖：テーバーのついているアーチに関する応力、変形の解析、土木学会論文集、第132号、pp.1-17、1966年8月
11. 奥村敏恵、松浦聖：テーバーのついているアーチの弾性安定に関する基礎的研究、土木学会論文集、第156号、pp.25-36、1968年8月
12. 奥村敏恵、松浦聖：テーバーのついている円弧アーチの固有振動について、土木学会論文集、第161号、pp.1-12、1969年1月
13. 北田俊行、中井博、吉川紀、阪野雅則：ニールセンローゼ橋アーチリブの座屈に対する合理的設計法について、構造工学論文集、Vol.34A、pp.315-326、1988年3月
14. 小西一郎、奥村敏恵、上原哲雄、繁戸武一：パイプアーチ橋の格点構造、土木学会誌、第48巻第4号、pp.51-55、1963年4月
15. 伊藤文人、野上邦栄、尾崎浩明：剛体棒要素モデルによるアーチの面内座屈解析、構造工学論文集、Vol.33A、pp.27-40、1987年3月
16. C.L.DYM, I.H. SHAMES (砂川恵 監訳)：材料力学と変分法、ブレイン図書、1977年
17. R.H.GALLAGHER (川井忠彦 監訳)：有限要素解析の基礎、丸善、1976年
18. H.KUSAMA：Cyclic Deformation Behavior of Thin-walled Structural Members、Doctor Dissertation、NAGOYA UNIVERSITY、1985年

(1991年9月30日 受付)