

線形化有限変位解析による有効座屈長の算定

DETERMINATION OF EFFECTIVE LENGTH BY LINEARIZED FINITE DISPLACEMENT ANALYSIS

鈴木亘*, 堀井秀之**, 山口栄輝***, 西野文雄****

By Wataru SUZUKI, Hideyuki HORII, Eiki YAMAGUCHI, Fumio NISHINO

In the design of steel frames, the effective length concept has been used. However, the determination of the effective length is not always simple. In fact, there seems to be no rational method existing at the current stage of development.

In essence, the effective length is considered to be the measure of geometrical nonlinearity of a structural member. From this viewpoint, a method to evaluate the effective length is proposed. The method evaluates the effective length based on the increase of the internal bending moment due to the geometrical change of the structure. To this end, the linearized finite displacement analysis is utilized. The effectiveness of the proposed method is demonstrated by solving several frames.

1. 緒言

現行の骨組構造物の設計における安全性の照査は、設計者に微小変位解析を委ね、本来構造解析において取り扱うべき幾何学的非線形性の効果を設計基準において規定するという方法を用いている。このため、設計基準が複雑で分かりにくくなっており、必ずしも常に合理的な設計になっているとは言えない。過去の状況を考えれば、このような照査体系をとったのは当然のことと言えるが、計算機および構造解析理論の進歩を考えると、将来の安全照査体系として、設計者に非線形計算を委ね、設計基準を合理的なものに変えるという方向が一つの可能性として考えられる。

実際、非線形構造解析に基づく安全照査体系に関する研究はすでに始められており、その成果も報告されている^{1)~3)}。しかしながら、この新しい安全照査体系を確立するには、まだまだ解決すべき課題が多数存在している。問題点としては、例えばねじれに対する初期不整の与え方やその妥当性の検証方法などがある²⁾。また、解析も立体解析になるだけでなく、二次部材も含めた全体解析が必要となるため、計算機の能力が上がったとはいえ容易とは言いがたい。従って、少なくとも現時点においては、現行の基準耐荷力曲線に基づく安全照査体系下で、その改善を計るのが現実的かつ重要な対応であると思われる。

現行の設計基準における大きな問題点は、有効座屈長の算定方法にある。道路橋示方書⁴⁾では、有効座屈

-
- | | | |
|------|-------------------------|---------------------------|
| * | 工修 北海道開発局 | (〒062 北海道札幌市豊平区岸1条3-1-34) |
| ** | Ph. D. 東京大学助教授 工学部土木工学科 | (〒113 東京都文京区本郷7-3-1) |
| *** | Ph. D. 東京大学講師 工学部土木工学科 | (〒113 東京都文京区本郷7-3-1) |
| **** | Ph. D. 東京大学教授 工学部土木工学科 | (〒113 東京都文京区本郷7-3-1) |

長を簡単な構造に対し、その構造形式、境界条件により大まかに定めているが、本来、骨組構造物の有効座屈長は荷重条件や剛性分布にも依存するため、任意の荷重条件、構造に対して設計基準で対応することは難しい。任意の構造系に適用できる有効座屈長の算定方法として、構造全体の固有値解析に基づく手法も提案されているが⁵⁾、軸圧縮力の小さな部材では有効座屈長が過大に評価されるなどの問題点が指摘されている³⁾。

有効座屈長は幾何学的非線形性と深く関連している。そのため、有効座屈長は部材断面における幾何学的非線形性、すなわち軸力による曲げモーメントの増加の程度を表していると理解することができる。そこで、本研究では、有効座屈長を付加曲げモーメントの程度を表すパラメータとしてとらえ、付加曲げモーメントの大きさから有効座屈長を算定する手法を提案する。付加曲げモーメントを算定するためには、線形化有限変位解析⁶⁾を用いることとする。なお、線形化有限変位解析は梁-柱の支配方程式に基づいており、そこで取り扱われる幾何学的非線形性の程度は現行の設計基準と同じである。

2. 有効座屈長の算定方法

両端単純支持の等断面梁-柱部材に一樣な曲げモーメントと軸方向力 N が作用する場合、部材の中央断面における曲げモーメントは次式のように与えられる。

$$M_N = \frac{M_L}{1 - N/P_E} \quad (1)$$

ここに、 M_N は幾何学的非線形性を考慮に入れた曲げモーメント、 M_L は微小変位解析による曲げモーメント、 P_E はオイラー座屈荷重を表している。

$1/(1-N/P_E)$ は幾何学的非線形性を表す項であり、部材長が長くなれば P_E は小さくなり、同じ軸力 N に対して付加曲げモーメントは大きくなる。このように、 P_E は付加曲げモーメントの程度を表しており、また有効座屈長 kL とは $P_E = \pi^2 EI / (kL)^2$ で関係づけられる。

骨組構造物の断面においては、微小変位解析より M_L と N が求まり、線形化有限変位解析より M_N が定まる。 M_L と M_N は異なる値であり、その違いは幾何学的非線形性に起因している。ここで付加曲げモーメント、すなわち幾何学的非線形性の程度を表すパラメータ P^* を式(1)にならい、次式により導入する。

$$M_N = \frac{M_L}{1 - N/P^*} \quad (2)$$

P^* は各断面に対して値が定まり、その値が小さいほど付加曲げモーメントが大きいことを表す。式(2)を変形すれば、 P^* は次式で与えられる。

$$P^* = \frac{N M_N}{M_N - M_L} \quad (3)$$

但し、式(3)は M_N が正の効果、すなわち M_L と M_N が同符号の場合にのみ意味を持つ。しかし、実際の構造物ではこの2つの曲げモーメントが逆符号の場合もあり、別の考慮が必要となる。そこで、まず式(2)を変形し、次式を得る。

$$\frac{M_N - M_L}{M_L} = \frac{N/P^*}{1 - N/P^*} \quad (4)$$

上式の左辺が M_N と M_L の比を表しているが、 M_N が負の効果をもつ場合、左辺は負となり、 P^* の算定に支障を生じる。そこで、 M_N の効果の絶対量を考え、式(4)の左辺の絶対値を用いて P^* を求めることにする。すなわち、

$$\frac{|M_N - M_L|}{|M_L|} = \frac{N/P^*}{1 - N/P^*} \quad (5)$$

を用いれば、 P^* が次のように求められる。

$$P^* = \frac{|M_N - M_L| + |M_L|}{|M_N - M_L|} N \quad (6)$$

この式によれば、 P^* は常に正の値として取り扱うことができるようになり、 M_N と M_L が同符号の場合も、逆符号の場合も式(6)により統一的に P^* が定まることとなる。本研究では、この P^* を用いて、有効座屈長 kL を次式で定義する。

$$kL \equiv \left[\frac{\pi^2 EI}{P^*} \right]^{1/2} \quad (7)$$

幾何学的非線形性の程度は荷重の大きさに依存するため、 M_N を算定する際の荷重の大きさにより、求まる有効座屈長が異なる可能性がある。この点を検討するために、図-1 に示す L 型の骨組構造物を解析した。荷重の大きさとして、耐荷力、耐荷力を 1.7 で除した大きさの荷重、さらにその半分の荷重の 3 通りを考慮したが、得られた有効座屈長の値に大きな差はなかった。すなわち、線形化有限変位解析を行う際に用いる荷重が耐荷力程度であるならば、荷重の大きさの影響は無視できると考えられる。

以上で述べた方法では、軸方向力のみを受ける部材の場合には M_L 、 M_N がともに発生しないため、有効座屈長を算定できない。このため、何らかの初期不整を加えることにより、 M_L および M_N を発生させ、有効座屈長を求める必要がある。ここでは初期不整として等分布荷重 q を与えることとする。

初期不整 q の大きさにより、 P^* の値が影響を受けることは十分に考えられる。この点を検討するために、両端単純支持の等断面柱を解析した(図-2)。初期不整の大きさを示すパラメータとしては qL/P を使い、その値と細長比パラメータ λ を変化させ計算を行った。本算定法より求まる有効座屈長 kL とその厳密解である L とを比較し、誤差をまとめたのが表-1 である。この結果より明らかにように、短柱、中間柱、長柱の全てにおいて kL は初期不

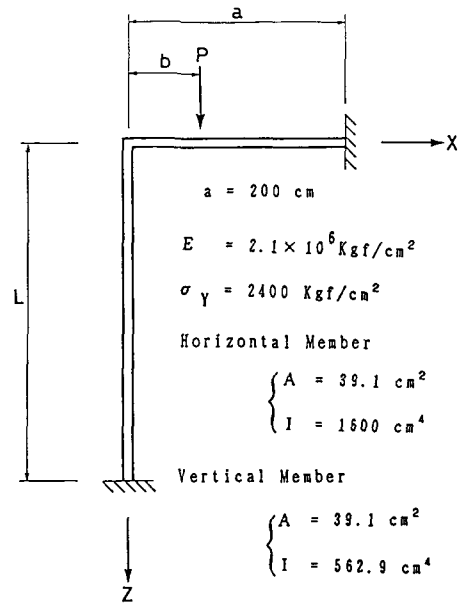


図-1 L型ラーメン

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$$

$$A = 39.1 \text{ cm}^2$$

$$I_{zz} = 562.9 \text{ cm}^4$$

$$\sigma_Y = 2400 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\lambda = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \frac{L}{r}$$

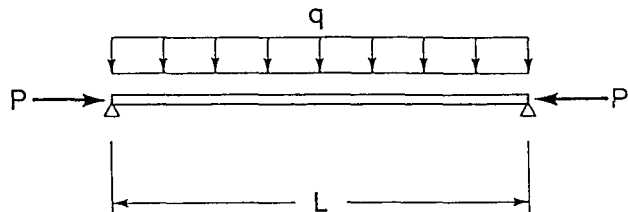


図-2 等断面柱

表-1 初期不整が及ぼす影響 $(kL-L)/L \times 100$ (%)

λ	Initial Imperfection qL/P				
	1/3.9063	1/7.8125	1/15.625	1/62.500	1/250.00
0.1985	0.3714	0.3143	0.3571	0.2286	0.4714
0.5956	0.2326	0.4762	0.3810	0.3333	0.3333
0.9926	0.5143	0.3429	0.2857	0.2286	0.2143
1.390	0.4490	0.3878	0.2857	0.1429	0.0612
1.787	0.3492	0.3651	0.2540	0.1111	0.0317

整と無関係に一定となった。このことより、完全系の部材に対しては、任意の大きさの初期不整 q を導入して有効座屈長を求めればよいと考えられる。

3. 計算例

簡単な骨組構造物と変断面部材を取り上げ、本手法により有効座屈長を算定し、これを基に道示の照査式から耐荷力を計算する。また比較のために、固有値解析を用いて有効座屈長を計算し、それより耐荷力を求める⁶⁾。さらに線形化有限変位解析による耐荷力の直接算定¹⁾、道示規定⁴⁾による耐荷力評価も行う。以下では、簡単のために、これらの計算法をそれぞれ LFDA1, EVA, LFDA2, JRA と記述する。なお、道示の照査式を用いて求めた耐荷力には安全率が含まれているため、LFDA2 の場合、得られた終局荷重を安全率で除した値を耐荷力とする。

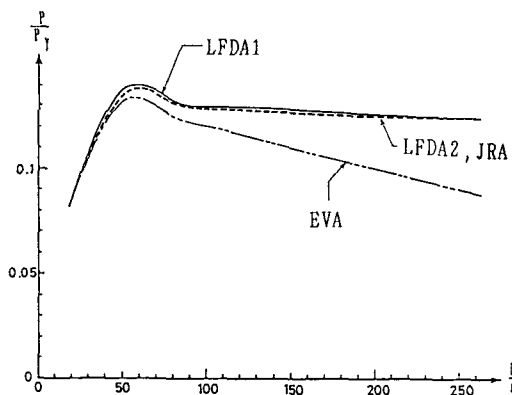
(1) L型ラーメン

図-1 に示す L 型ラーメンの耐荷力計算をまず行う。その際、水平部材の長さは一定に保った上で、垂直部材長を変化させ検討を加える。また載荷点を変えることにより、3 ケースについて考慮する。

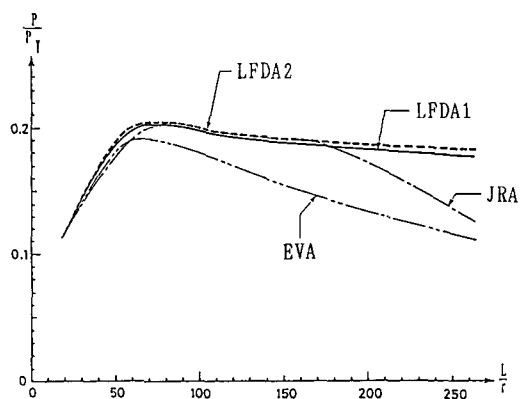
i) 載荷点が垂直部材から $a/4$ および $a/8$ の場合

荷重を垂直部材から $a/4$ の位置に加えたときの計算結果を図-3 a に、 $a/8$ の位置に加えた場合の結果を図-3 b に示している。縦軸には、耐荷力 P を垂直部材の降伏軸力 P_y で無次元化した P/P_y を、横軸には垂直部材の部材長 L を断面の回転半径 r で無次元化した L/r を用いて計算結果を表している。この場合には、十分な曲げモーメントが垂直部材に発生しているため、LFDA2 においても初期不整は加えていない。

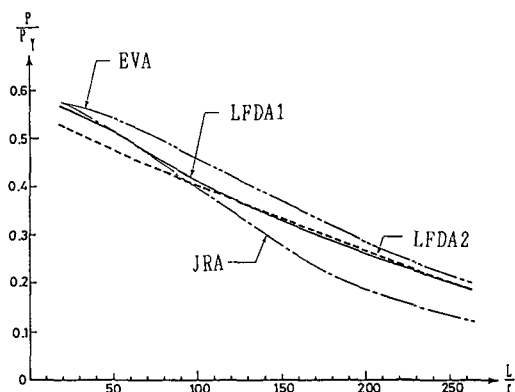
LFDA1 による耐荷力は、計算した全ての範囲において LFDA2 により得られた耐荷力、および JRA による耐荷力と良く一致している。これに対して、EVA の場合、軸方向圧縮力が小さい水平部材では、耐荷力が過小に評価されている。これは、EVA の問題点の一つであり、最近その対策法も検討されている⁷⁾。



(a) $b=a/4$



(b) $b=a/8$



(c) $b=0$

図-3 L型ラーメンの耐荷力

ii) 荷重が垂直部材の真上に加えられた場合

この問題では、垂直部材に作用する曲げモーメントが非常に小さいため、LFDA2 により耐荷力を算定する場合、初期不整を含めて解析する必要がある、初期不整 $qL/P=1/40$ を X 軸の正の方向に加えて計算を行う。この初期不整の値は、LFDA2 で求めた両端単純支持柱の耐荷力が、道示⁴⁾の基準耐荷力曲線と一致するように決められたものである¹⁾。これに対し、LFDA1 は M_N と M_L の比をもとに計算を行うため、この問題のように曲げモーメントの値が小さい場合にも、初期不整を導入することなく有効座屈長を計算することが可能である。

計算結果を図-3 c に示している。この問題の場合、構造全体の耐荷力に対して垂直部材の耐荷力が支配的であり、EVA も比較的良好な結果を与えている。垂直部材が長い場合、JRA を除いた他の三種類の方法による耐荷力は比較的良好に一致している。垂直部材の短い範囲では有効座屈長を用いる三種類の方法(LFDA1, EVA, JRA)による耐荷力が LFDA2 による耐荷力より高めの結果を与えている。これは、基準耐荷力曲線において短柱部の終局軸力として降伏軸力を用いていることに起因していると思われる。

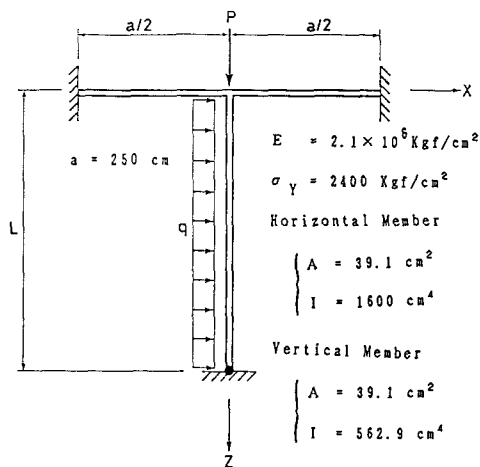


図-4 T型ラーメン

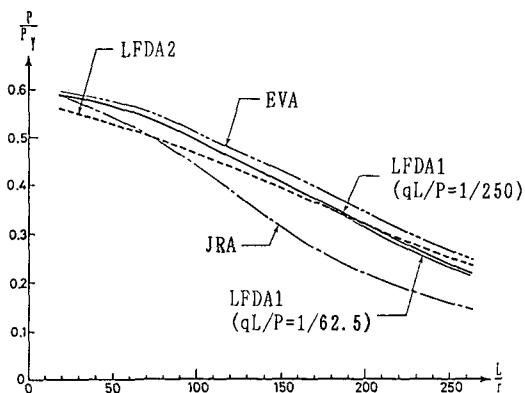


図-5 T型ラーメンの耐荷力

(2) T型ラーメン

次に、軸方向圧縮力のみを受ける部材を含む骨組構造物を考える。例題としては、図-4に示すT型のラーメンを取り上げる。解析は全ての部材を等断面部材とし、水平部材の部材長を一定に保ち、垂直部材の部材長を変えて耐荷力を求める。

この問題では、構造物の垂直部材に軸方向圧縮力のみが作用するので、初期不整を加えて計算する必要がある。ここでは、LFDA1が初期不整の大きさに依らず有効座屈長を算定できることを再確認するために、 $qL/P=1/62.5$ 、および $1/250$ の二通りの場合について計算する。

計算結果を図-5に示しているが、L型ラーメンのii)と同様の傾向が見受けられ、JRAを除く三種類の方法による計算結果は、 L/r の全領域において比較的良く一致している。また、LFDA1において、解析の際に加える初期不整の影響はほとんど見られなかった。

(3) 変断面部材

これまでの、等断面部材のみで構成されている骨組構造物の有効座屈長について考えてきた。その結果、こうした構造物に関しては、本研究で提案しているLFDA1が比較的良好な結果を示すことが確かめられた。次に、変断面部材を例題として取り上げる。

現行の設計基準における照査式は、基本的に等断面部材に対するものであり、変断面部材については特別な配慮が必要であるとしている。道示⁴⁾では便宜的に各断面に対して等断面部材の照査式を用いて照査することとしているが、照査方法や有効座屈長の算定方法、およびその妥当性は必ずしも明らかではない。

本手法においても、線形化有限変位解析の支配方程式が等断面部材という仮定の下で導かれているため、変断面部材に対しては精度の確認をする必要がある。そこで、両端単純支持の変断面柱に対して要素分割数を変え、それぞれの場合について耐荷力を調べた。その結果、8要素程度の分割数で解は十分に収束することが認められたため、以下では要素分割数を8とした上で、本手法の妥当性を検討する。

解析対象構造物を図-6、その諸元を表-2aに示している。断面は、板厚 t_f 、 t_w およびフランジ幅 b を一定とし、ウェブ高を d から d_i まで直線的に変化させたものを考える。拘束条件は両端単純支持とし、荷重は軸方向圧縮力 P と大断面側に曲げモーメント M を加える。その際、荷重条件による影響も調べるた

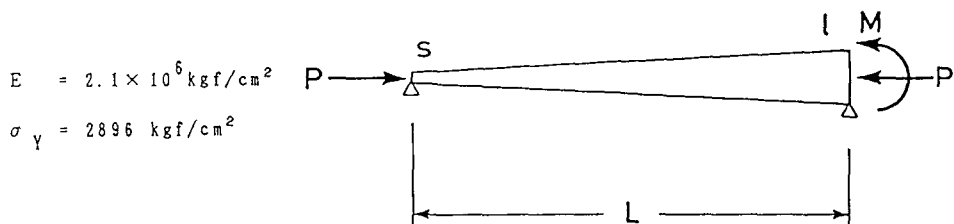


図-6 変断面柱

表-2 変断面柱の諸元および計算結果

(a) 諸元 (cm)

F l a n g e		W e b			L	r_1
b	t_f	d_s	d_1	t_w		
11.03	0.794	11.07	19.52	0.605	200.0	8.625

(b) $M/Pr_1 = 2.67$

P_{L0}/P_{LFD}	P_{EG}/P_{LFD}
0.99	0.95

(c) $M/Pr_1 = 0.0$

P_{L1}/P_{LFD}	P_{L2}/P_{LFD}	P_{EG}/P_{LFD}
0.97	0.97	0.97

め、大断面での回転半径 r_1 を用いて無次元化した M/Pr_1 を二通り選び、耐荷力を算定する。

結果は、LFDA1 および EVA から求まる耐荷力を LFDA2 による耐荷力 P_{LFD} を用いて無次元化して表す。

i) $M/Pr_1 = 2.67$ の場合

LFDA1 による結果を P_{L0} 、EVA による結果を P_{EG} とし、 P_{LFD} との比率を表-2 b に示している。

ii) $M/Pr_1 = 0.0$ の場合

この場合には曲げモーメントが全く作用しないため、初期不整を含めて計算する必要がある。LFDA2 では、初期不整 $qL/P=1/40$ を用いて P_{LFD} を計算し、LFDA1 の場合には、初期不整として $qL/P=1/62.5$ 、および $1/31.25$ の二種類について計算を行う。LFDA1 による結果はそれぞれ P_{L1} 、 P_{L2} 、EVA による結果を P_{EG} とし、 P_{LFD} との比率を表-2 c に示している。

表-2 b, c から明らかなように、LFDA1 による計算結果は、LFDA2 や EVA による結果と良く一致しており、LFDA1 は変断面に対しても有効であることがわかる。

4. 結言

本研究では、有効座屈長が幾何学的非線形性と深く関連していることに着目し、軸力による曲げモーメントの増加の程度から有効座屈長を算定する手法を提案した。その有効性は、骨組構造物や変断面部材の計算例により検証した。本算定法では、部材が完全系の場合、初期不整を加える必要が生じる。しかしながら、得られる有効座屈長は初期不整の大きさに依存しないため、より一般的で複雑な構造物にも十分適用できるものと考えられる。

参考文献

- 1) 堀井秀之・鈴木亘・奥野剛司・西野文雄：線形化有限変位解析に基づく骨組構造物の安全照査体系（面内問題），土木学会第43回年次学術講演会講演概要集第1部，1988年。
- 2) 奥野剛司・鈴木亘・堀井秀之・長谷川彰夫：線形化有限変位解析に基づく骨組構造物の安全照査体系（面外問題），土木学会第43回年次学術講演会講演概要集第1部，1988年。
- 3) 宇佐美勉：鋼骨組構造物の座屈設計法の問題点，第1回SGST拡大研究会論文集，pp.107-120，1991年。
- 4) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，1990年。
- 5) 西野文雄・三木千寿・鈴木篤：道路橋示方書Ⅱ鋼橋編改訂の背景と運用第8回13章ラーメン構造，橋梁と基礎，pp.10-13，1981年。
- 6) 西野文雄・長谷川彰夫：構造物の弾性解析，新体系土木工学7，技報堂，1983年。
- 7) Attia, W.A.L.: A proposal for stability design procedure of steel framed structures, Doctoral Dissertation Submitted to The University of Tokyo, 1991.

(1991年9月30日受付)