

# ニューラルネットワークによる履歴挙動の モデリングと数値解析への応用

## MODELING OF HYSTERETIC BEHAVIOR WITH NEURAL NETWORKS AND ITS APPLICATION TO NON-LINEAR DYNAMIC ANALYSIS

山本広祐\*

By Kohsuke YAMAMOTO

This paper describes an application of neural networks to hysteretic modeling. In computational mechanics, the advantages in using neural networks are as follows: (a) Any mapping can be represented within a neural network. (b) The network can be built directly from experimental data using the self-organizing capabilities of the neural network.

With this new modeling strategy, the so-called "Ramberg-Osgood type hysteresis curves", that are currently used as mathematical model, were trained. And after training, non-linear dynamic response analyses of a single-degree-of-freedom system were carried out to confirm the efficiency in the application to computational analysis. Close agreement between the results of the present method and of the current mathematical modeling was obtained, and it is pointed out, therefore, that the modeling of hysteretic behavior using neural network could be incorporated into computational analyses as an alternative to mathematical modeling.

### 1. はじめに

部材の応力-歪関係や、構造物の荷重-変位関係に現れる非線形の履歴挙動は、構造物の終局状態を把握し、予測する上で重要であり、限界状態設計への移行期にあたる今日、簡易で精度の高いモデリング手法の構築が望まれている。現在までに、各種の非線形挙動に関して、多くの実験データや、部材・構造要素の詳細な有限要素解析事例が蓄積されており、これらを適切にモデリングする手法が構築され、数値解析に有効活用できれば、非線形解析の精度や効率の向上に果たす役割は大きいであろう。

近年、パターン認識(モデリング)の一手法として、人間の脳神経細胞(回路)網を模倣したニューラルネットワークが注目を集めている。これは、人工知能の一分野であるコネクショニズム(Connectionism)の研究者によって開発されたもので、計算力学的立場からその有用性を抽出すれば、任意の連続写像関数をニューラルネットワークの持つ自己組織化(学習)能力を利用して、直接そのネットワーク内部に構築できる

\* 工修 (財)電力中央研究所 我孫子研究所 FBR部 (〒270-11 千葉県我孫子市我孫子1646)

ことにある。Ghaboussiらは、既にこの知識表現パラダイムを有限要素解析における材料挙動のモデリングに活用すべく、予備的な検討を進めている<sup>1)</sup>。彼らは、プレーンコンクリートの2軸の単調載荷試験、及び、1軸のサイクリック試験における非線形の応力-歪関係(経路)の認識問題に取り組んでいるが、ニューラルネットワークの非線形挙動に関する表現能力を検証するに至っていない。

著者は、より一般的な非線形挙動の認識問題を取り上げる。具体的には、構造物の荷重-変位関係における紡錘型の履歴挙動を例に、そのモデリングにニューラルネットワークを適用し、既存の数学モデルの認識問題を通して本モデリング手法の表現能力と有効性を考察する。更に、学習を経たニューラルネットワークを用いて、1質点系の非線形時刻歴応答解析を行うことにより、本モデリング手法が既存の数学モデルと対等に数値解析に導入できることを示す。

## 2. 履歴モデルの設定

構造物の非線形の荷重-変位関係は、実験や詳細な有限要素解析により得られる。構造物は一般に鋼構造やコンクリート構造等に分類されるが、構成する材料の特性や構造形態に応じて種々の非線形挙動を呈する。鋼構造なら屈座やバウシinger効果、コンクリート構造ならひびわれの発生によるスリップ挙動や材料劣化など、複雑な非線形挙動を示す場合が多い。一般にその数学的なモデリングは、挙動が単純であれば定式化が容易であるが、挙動が複雑であれば安全側の仮定を前提に簡易な数学モデルを設定するのが通例である。一方、荷重-変位関係に現われる非線形挙動の支配的なパラメータさえ抽出できれば、ニューラルネットワークによるモデリングが可能である。ここで、通常の数学モデルを構築する場合と同様、初めから実験データをそのままニューラルネットワークの認識対象として選定した場合、実験操作・計測やデータ収録に含まれる誤差、挙動の再現精度等が障害となりニューラルネットワークの表現能力と有効性を十分検証できない可能性がある。従って、本論文では、従来から構造物の荷重-変位関係を再現するために使用される数学モデルを認識対象として選定することにした。

構造物の荷重-変位関係のモデリングには、構造物の非線形挙動に即して多くの履歴モデルが考案され、活用されている<sup>2), 3)</sup>。本論文で取り上げる紡錘型の非線形挙動に関しては、バイリニア (bi-linear) 型モデル、トライリニア (tri-linear) 型モデルが、簡易さから代表として上げられるが、実験結果の詳細なモデル化には、更に複雑なモデルが考案されており、その1つがRamberg-Osgood型モデルである。このモデルは、Ramberg-Osgood<sup>4)</sup>の骨格曲線を用い、Masingsの法則に従って履歴曲線を表すことによりJenningsが汎用性を高めた<sup>5)</sup>もので、図-1に示すような非線形挙動をとる。Ramberg-Osgood型モデルは、周期的な応答の予測を意図して作られたもので、正負同一の変位点(荷重値も必然的に正負同一)間の応答しか定義されておらず、過渡的な応答に関しては、利用者にそのモデル化が委ねられてきた。過渡的な応答の予測を意図して作られたモデルとしては、Iwanによるdistributed-elementモデル<sup>6)</sup>が有効である。このモデルは、線形バネとスリップ要素を直列的または並列的に組み合わせたものであり、非線形挙動の表現能力は高いが、設定すべきパラメータが多いことから、あまり利用されていないのが実状であろう。

従って、本論文では、Ramberg-Osgood型モデルに過渡的な応答に耐え得る単純な履歴則を追加して用いるものとした。ニューラルネットワークによる認識問題の対象とする数学モデルは以下に示す通りとする。

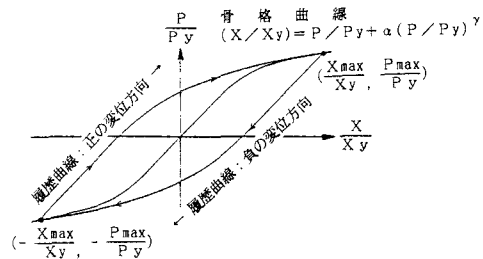


図-1 Ramberg-Osgood型履歴モデル

- ① 骨格曲線は、Ramberg-Osgood型モデルに倣い、以下に示す式に従う。

$$\frac{X}{X_y} = \frac{P}{P_y} + \alpha \left( \frac{P}{P_y} \right)^\gamma \quad \dots \dots \dots (1)$$

ここに、

- X：構造物の変位
- P：構造物の変位Xにおける復元力（荷重）
- X<sub>y</sub>：構造物が降伏荷重に至る時の線形変位
- P<sub>y</sub>：構造物の降伏荷重
- α, γ：骨格曲線の形状パラメータ

なお、骨格曲線の形状パラメータは、適度な非線形性を有するよう α=0.35、γ=5に設定した。

- ② 非線形領域において経路が指向する点は、符号を問わず、常に最大経験変位値を示す点とし、経路はその点で骨格曲線に接する放物線上をたどるものとする。即ち、最大経験変位が±X<sub>max</sub>（それに対応する荷重が±P<sub>max</sub>）の場合、経路が指向する点は以下になる。

- 正の変位方向：（X<sub>max</sub>/X<sub>y</sub>, P<sub>max</sub>/P<sub>y</sub>）
- 負の変位方向：（-X<sub>max</sub>/X<sub>y</sub>, -P<sub>max</sub>/P<sub>y</sub>）

### 3. ニューラルネットワークの構築

誤差逆伝播（back-propagation）学習による階層型ニューラルネットワークを用いるものとし、定式化を行った<sup>7),8)</sup>。基本的な構造は、入力層、複数の中間層、出力層からなり、各層は人間の脳神経細胞（ニューロン）を理想化した複数のユニット（processing unit）から構成される（図-2）。

ニューラルネットワークは、入力信号を受け取ると入力層、中間層、出力層と信号が伝わり、最終的に出力信号を出力する。i ユニット（i = 1 ~ n<sub>i</sub>）から j ユニットへの入力信号を x<sub>i</sub> とすると、信号の伝達により j ユニットには以下に示す内部ポテンシャル r<sub>j</sub> が蓄積される。

$$r_j = \sum_{i=1}^{n_i} (w_{ji} \cdot x_i) - \theta_j \quad \dots \dots \dots (2)$$

ここに、 w<sub>ji</sub>：i ユニットと j ユニット間の結合の重み（結合係数）

θ<sub>j</sub>：j ユニットのしきい値

この r<sub>j</sub> は、以下に示すシグモイド（sigmoid）関数（[0, 1] に規格化されたロジスティック（logistic）関数）と呼ばれる応答関数 f（r<sub>j</sub>）の出力として、更に次層への入力信号 y<sub>j</sub> として伝達される。

$$y_j = f(r_j) = 1 / \{1 + \exp(-r_j/T)\} \quad \dots \dots \dots (3)$$

ここに、 T：シグモイド関数の形状パラメータ

一方、最終的に出力される出力信号と正しい解（教師信号）との間に誤差が生じるが、この誤差を減らすために各層間の結合係数、及び、各ユニットのしきい値が修正される。この修正過程がニューラルネットワークによる学習に相当し、誤差を最小化するように出力層から中間層へ、中間層から入力層へと最急降下法により修正が進められることから、誤差逆伝播学習と呼ばれている。以下に、この修正過程を示す。まず、学習データ p に対する誤差関数 E<sub>p</sub> を定義する。

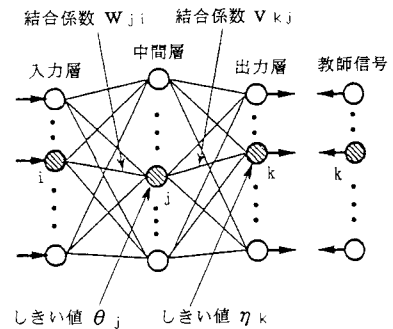


図-2 階層型ニューラルネットワーク

$$E_p = \sum_{k=1}^{n_3} (T_{pk} - O_{pk})^2 / 2 \quad \dots \dots \dots (4)$$

ここに、  $n_3$  : 出力層のユニット数

$T_{pk}$  : 学習データ  $p$  に関する  $k$  ユニットの教師信号

$O_{pk}$  : 学習データ  $p$  に関する  $k$  ユニットの出力信号

$$O_{pk} = f(q_k) \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$q_k = \sum_{j=1}^{n_2} (v_{kj} \cdot y_j) - \eta_k \quad \dots \dots \dots (6)$$

ここに、  $q_k$  :  $k$  ユニットの内部ポテンシャル

$n_2$  : 中間層のユニット数

$v_{kj}$  :  $j$  ユニットの  $k$  ユニットの結合の重み (結合係数)

$\eta_k$  :  $k$  ユニットのしきい値

この  $E_p$  を最急降下法を用いて極小化 (理想的には最小化) する。最急降下法に基づいて任意の状態から誤差関数  $E_p$  の極小値 (理想的には最小値) に到達するためには、学習データ  $p$  が入力された時、結合係数  $v_{kj}$  を  $\Delta v_{kj}$  だけ修正し、これを全データについて繰り返せば良い。

$$\begin{aligned} \Delta v_{kj} &= -\mu \frac{\partial E_p}{\partial v_{kj}} = -\mu \frac{\partial E_p}{\partial O_{pk}} \frac{\partial O_{pk}}{\partial v_{kj}} = -\mu \frac{\partial E_p}{\partial O_{pk}} \frac{\partial O_{pk}}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial v_{kj}} \\ &= \mu \cdot (T_{pk} - O_{pk}) \cdot f'(q_k) \cdot y_j \quad \dots \dots \dots (7) \end{aligned}$$

ここに、  $\mu$  : 学習制御パラメータ ( $\mu > 0$ ,  $\mu$  は定数)

$f'$  : 応答関数  $f$  の 1 次偏分

同様に、しきい値  $\eta_k$  の修正量  $\Delta \eta_k$  も得ることができる。

$$\Delta \eta_k = \nu \cdot (T_{pk} - O_{pk}) \cdot f'(q_k) \quad \dots \dots \dots (8)$$

ここに、  $\nu$  : 学習制御パラメータ ( $\nu > 0$ ,  $\nu$  は定数)

更に、出力層だけでなく、中間層についても同様の修正が加えられる。なお、ネットワークの結合係数、及び、しきい値の修正方法として特別な加速法を用いず、式 (7)、式 (8) により各学習データに対して単純で逐次的な修正を行うものとした。

以上の過程を全学習データに対して繰り返すことにより、最小 2 乗誤差の総和  $E$  の極小化 (理想的には最小化) が図られることになる。

$$E = \sum_{p=1}^{n_4} E_p \quad \dots \dots \dots (9)$$

ここに、  $n_4$  : 学習データ総数

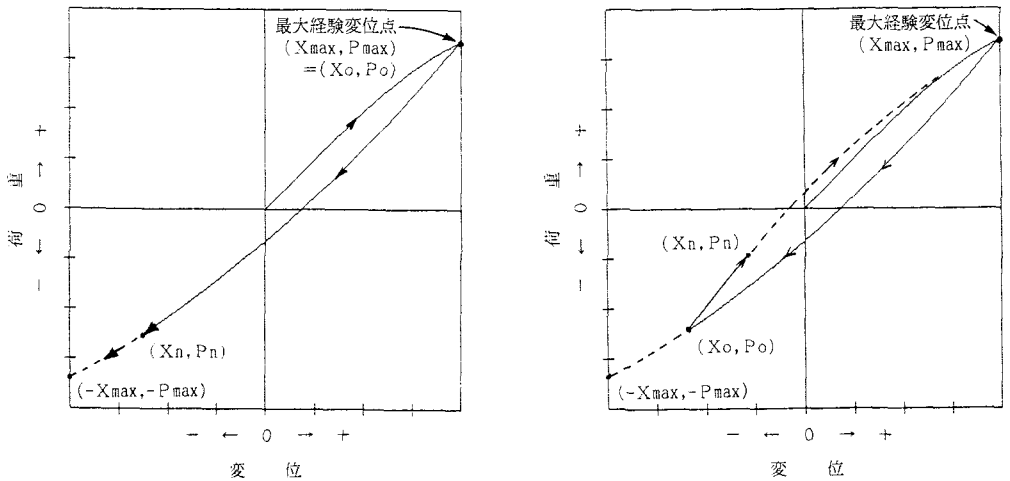
ニューラルネットワークにより任意の連続写像関数を構築するためには、中間層を 1 層 (入・出力層を含めて 3 層) 以上とし、各中間層に適切なユニット数を設ければ良い (但し、出力層の応答関数は線形関数で良い) ことが既に知られている<sup>9), 10)</sup> が、本論文では、入力層、中間 2 層、及び出力層の 4 層構造を用いることにした。履歴挙動には経路依存性があるため、入力信号は Ramberg-Osgood 型モデルの履歴曲線の特徴づける過去の状態、及び、次のステップの変位値とし、出力信号を次ステップの変位値に対する復元力 (荷重値) とした (図-3)。

・入力層 5 ユニット : 最大経験変位点座標値 ( $X_{max}$ ,  $P_{max}$ )

最新の変位方向折り返し点座標値 ( $X_o$ ,  $P_o$ )

次の変位状態  $X_n$

・出力層 1 ユニット：次の変位状態  $X_n$  に対する復元力  $P_n$



(a) 骨格曲線上から変位方向を折り返す場合

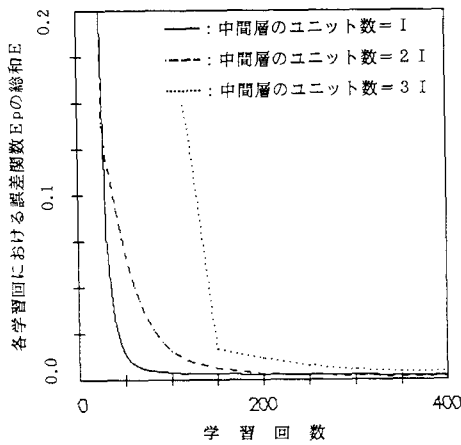
(b) 履歴曲線上から変位方向を折り返す場合

図-3 ニューラルネットワークに与える入・出力信号（データ）

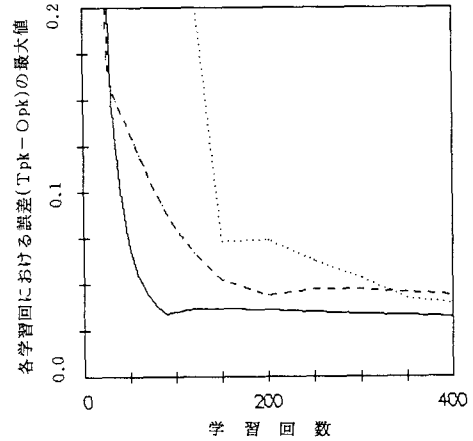
中間層のユニット数の決定は、従来、試行錯誤的な方法が用いられてきた。近年、統計的な情報量を導入し、それを評価基準として中間層のユニット数を決定する方法も考案されている<sup>11)</sup>が、本論文で用いるネットワークは入・出力層ともユニット数が少ないため、簡単な数値的検討（ケーススタディ）により決定することにした。数値的検討を行うネットワークは、表-1 に示す 2 タイプ、6 ケースとした。学習データは、設定した数学モデルを用いて作成し、周期的な応答による履歴曲線上から 100 組を選定した。なお、学習に用いる入力信号、及び、教師信号は、 $[0, 1]$  に正規化を行った。ネットワーク A、及び、ネットワーク B に関する学習回数と誤差の推移状況を、各々、図-4、図-5 に示す。ここで、全学習データに対する 1 通りの学習を 1 回の学習回と定義した。これらの図より、出力層を線形応答関数とした方が誤差の消散傾向が良い（正解値への収束精度が高い）ことが分かる。正解値への収束精度が高いネットワーク A に関して、中間層のユニット数と誤差の推移状況を更に詳細に検討した結果、長期的な誤差推移の安定性、最終的な収束値への見通し、未学習データに関する認識率の推移から、中間層のユニット数を入力層の 2 倍（10 ユニット）にするのが有効であることが確認され、以降の検討に用いることに決定した。なお、シグモイド関数の形状パラメータ  $T$ 、及び、学習制御パラメータ  $\mu$ 、 $\nu$  は、数値的検討（パラメータスタディ）の結果、 $T=1.0$ 、 $\mu=0.8$ 、 $\nu=0.6$  に決定した。

表-1 数値的検討（ケーススタディ）に用いたニューラルネットワークの概要

| ネットワーク<br>の名称 | 出力層の<br>応答関数       | 入力層<br>ユニット数 | 第1中間層<br>ユニット数 | 第2中間層<br>ユニット数 | 出力層<br>ユニット数 | ユニット間の<br>全結合数 |
|---------------|--------------------|--------------|----------------|----------------|--------------|----------------|
| A             | 線形応答関数<br>$f(x)=x$ | 5 (= I)      | I              | I              | 1            | 5 5            |
|               |                    |              | 2 I            | 2 I            |              | 1 6 0          |
|               |                    |              | 3 I            | 3 I            |              | 3 1 5          |
| B             | シグモイド<br>関数        | 5 (= I)      | I              | I              | 1            | 5 5            |
|               |                    |              | 2 I            | 2 I            |              | 1 6 0          |
|               |                    |              | 3 I            | 3 I            |              | 3 1 5          |

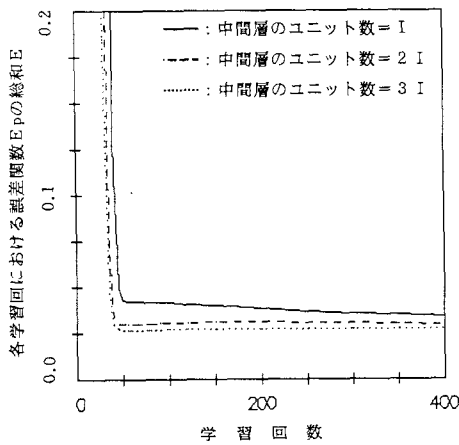


(a) 平均的な誤差の推移状況

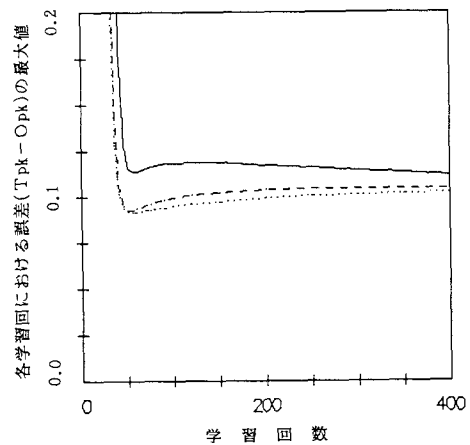


(b) 局所的な誤差の推移状況

図-4 ネットワークAに関する学習回数と誤差の推移状況



(a) 平均的な誤差の推移状況



(b) 局所的な誤差の推移状況

図-5 ネットワークBに関する学習回数と誤差の推移状況

#### 4. 基本的な履歴挙動の学習と認識結果

実験、あるいは、詳細な有限要素解析で取得する典型的な経路データを選定し、学習データとした。通常、骨格曲線は容易に設定できることから学習の対象範囲外とし、設定した数学モデルを用いて、以下に示す2種類の履歴曲線上で総計1600組の学習データを作成した。代表的な履歴を図-6に実線で示す。なお、以降の計算上、 $X_y = 1\text{cm}$ 、 $P_y = 1,000\text{kgf}$  (初期剛性:  $K = 1,000\text{kgf/cm}$ ) に設定した。

- ・正負に周期的な履歴を描く場合 (図-6 (a) 参照)
- ・履歴を描きながら、変形が1方向のみに増大する場合 (図-6 (b) 参照)

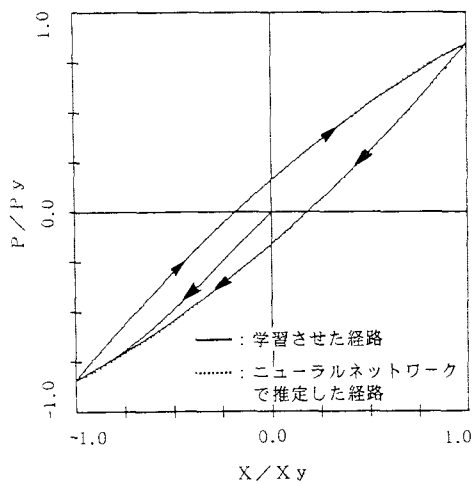
学習開始後、50回程度の学習で大きな誤差が消散し、その後はなだらかに誤差が減少して10,000回程度の学習ではほぼ収束に達した。なお、学習終了の判断にあたっては、任意に選定した未学習データに関する認識 (正解) 率の推移も参考にした。

10,000回学習後のニューラルネットワークを用いて図-6に実線で示す経路の変位データを連続的に認識させ、荷重履歴の推定を行った。推定結果を図-6に点線で示す。図-6は、荷重の予測値を更に先の予測に用いて認識を進めている。但し、骨格曲線上の経路は、別途、数学モデルを用いて算出した。従って、ニューラルネットワークの入力データとして、変位は意図的に与えた変位履歴を、荷重は骨格曲線上から変位方向を折り返す場合には数学モデルより、履歴曲線上から変位方向を折り返す場合にはニューラルネットワークより予測した値を使用している。図-6に示さない学習データに関しても同様の結果が得られ、学習させた全ての変位履歴に関する認識結果より以下に示すことが確認された。

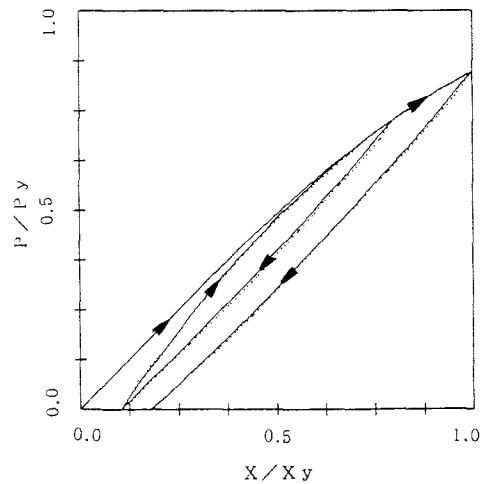
① ニューラルネットワークによる認識（推定）結果は、正解にほぼ一致した。

② 荷重の予測値を更に先の予測に使用しても、認識（推定）結果に発散的な挙動が生じなかった。

このことにより、ネットワークが十分な学習を経て履歴挙動を再現する近似関数をその内部に構築したものと判断できた。



(a) 正負に周期的な履歴を描く場合



(b) 履歴を描きながら、変形が1方向のみに増大する場合

図-6 代表的な学習データと認識結果

## 5. 数値解析への応用

先に示した学習を経たニューラルネットワークを、数値解析に直接活用する事例を検討する。強制振動を受ける1質点系の非線形の時刻歴応答解析を取り上げ、数学モデルとニューラルネットワークによる解析（推定）結果の比較を通して本モデリング手法の有効性を検討する。

強制振動を受ける1質点系の運動方程式は以下に示す通りである。

$$m \ddot{d}_n + c \dot{d}_n + F(d_n) = -m \ddot{z}_n \quad \dots \dots \dots (10)$$

ここに、 $d$  : 質点の相対応答変位

$d_n$  :  $n$ 時点における質点の相対応答変位

$\dot{d}_n$  :  $n$ 時点における質点の相対応答速度

$\ddot{d}_n$  :  $n$ 時点における質点の相対応答加速度

$F(d_n)$  : 質点が相対変位  $d_n$  を生じた時の復元力（線形時は、 $K d_n$ ）

$\ddot{z}_n$  : n 時点において質点基部に作用する強制外力 (加速度)  
 $m$  : 質点の質量  
 $c$  : 粘性減衰係数

時間積分計算には以下に示す中央差分法を用いる。

$$\dot{d}_n = (d_{n+1} - d_{n-1}) / 2 \Delta t \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$\ddot{d}_n = (d_{n+1} - 2d_n + d_{n-1}) / (\Delta t)^2 \quad \dots \dots \dots (12)$$

ここに、 $\Delta t$  : 強制外力データの時間間隔

式 (11)、式 (12) を式 (10) に代入すると、n 時点以前の状態をもとに (n+1) 時点の応答変位  $d_{n+1}$  が求まる。この変位  $d_{n+1}$  における復元力  $F(d_{n+1})$  を、数学モデル、及び、学習を経たニューラルネットワークから推定し、更に、次のステップの計算に活用する。なお、計算上必要な質点の質量  $m$  は線形時の系の固有周期が 5 Hz になるように、粘性減衰係数  $c$  は減衰定数が 1 % になるよう設定した。また、強制外力は、図-7 に示す、短時間 (1 秒) の周期的ではない時刻歴波形 (100 gal に正規化) を縮尺して用いた。

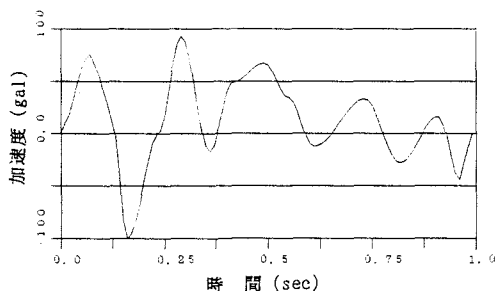


図-7 応答解析に用いた強制外力

図-8 に、非線形性の代表値となる最大応答変位  $d_{max}$  と最大入力加速度の関係を示す。両者の差は、最大でも高々 2.8 % であり、非線形性が進展しても両者の間に大きな差異は生じないものと判断できる。一例として、最大加速度 300 gal 入力時の数学モデルを用いた解析結果 (図-9) と、学習後のニューラルネットワークを用いた解析 (推定) 結果 (図-10) を図示する。図-9、図-10 は、ほぼ一致しており、履歴挙動に有意な差は見られない。なお、この時、時刻歴応答解析結果として算出された変位経路は、学習データとは全く異なるものであった。このことから、ニューラルネットワークによる推定値は、未学習データに対しても有効であることが確認された。

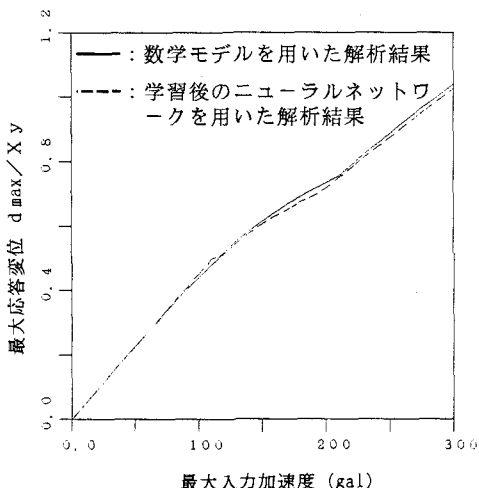
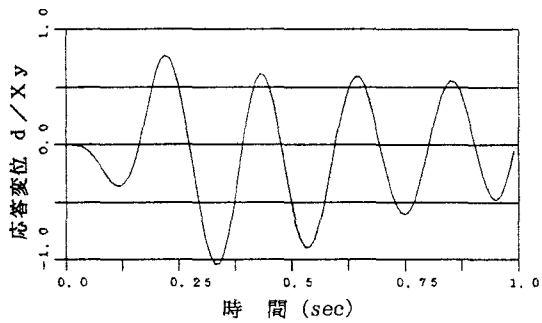


図-8 最大入力加速度と最大応答変位  $d_{max}$  の関係

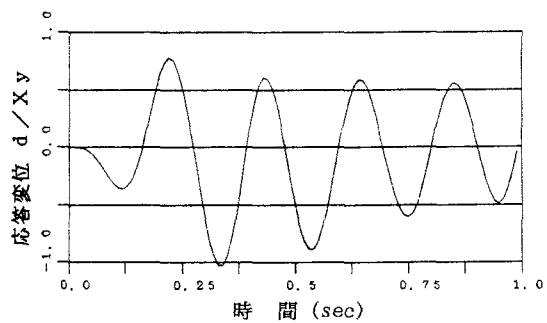
## 6. まとめ

本論文では、ニューラルネットワークによる履歴挙動の認識と、その数値解析への応用について検討を行った。研究過程の概要と得られた成果を以下に要約する。

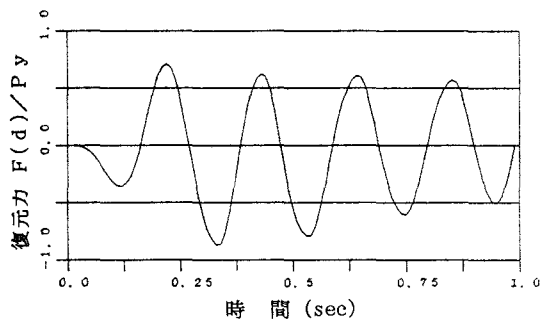
- ① 現状で利用される Ramberg-Osgood 型の履歴モデルをニューラルネットワークの認識対象として選定し、設定した履歴モデルが、実験あるいは部材・構造要素の詳細な有限要素解析結果として得られる履歴曲線を表すものと仮定して、この履歴曲線を数学的に定式化することなく再現できるニューラルネッ



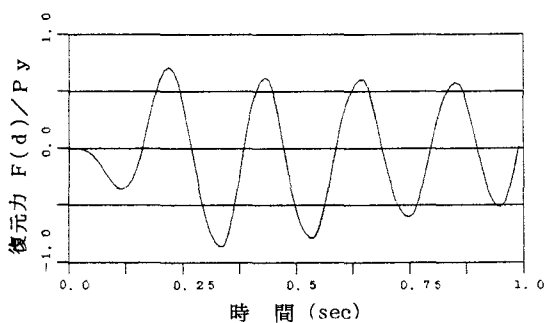
(a) 応答変位の時刻歴波形



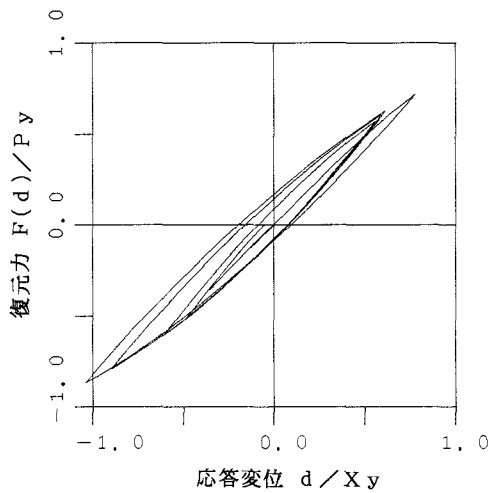
(a) 応答変位の時刻歴波形



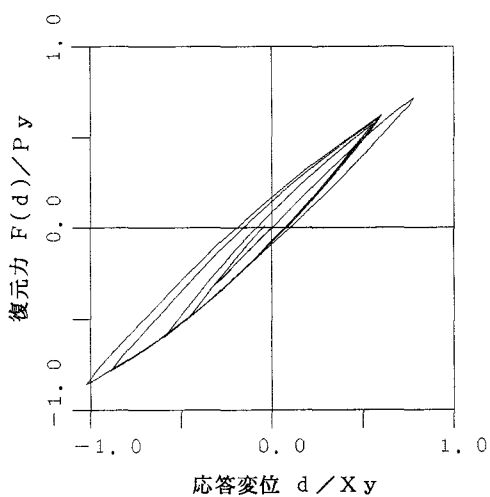
(b) 復元力の時刻歴波形



(b) 復元力の時刻歴波形



(c) 荷重-変位の履歴



(c) 荷重-変位の履歴

図-9 数学モデルを用いた解析結果  
(最大入力加速度: 300gal)

図-10 ニューラルネットワークを用いた解析結果  
(最大入力加速度: 300gal)

トワークの形態を決定した。

② 典型的な履歴曲線を学習させた後のニューラルネットワークを用いて、学習に使用した変位データを連続的に認識させた結果、認識対象とした履歴モデルによる結果とほぼ一致し、収束精度及び再現性の高いネットワークが構築できた。

③ 学習後のニューラルネットワークを1質点系の非線形時刻歴応答解析に応用した結果、認識対象とした履歴モデルによる解析結果との良好な一致が見られ、ニューラルネットワークによる履歴挙動のモデリングが、従来用いる履歴モデルと同等の表現能力を持つことが明らかとなった。

また、実験データの認識他、より複雑な非線形問題への応用の可能性も見いだされたものと考えられ、特に高いモデリング精度が要求される分野において人間の判断を介しない(但し、入・出力ユニットのパラメータ決定やネットワークの形態決定には人間の詳細な検討が必要)新しいモデリング手法として今後の発展が期待できる。

#### 参考文献

- 1) Ghaboussi, J., Garrett Jr., J.H., and Wu, X. : Knowledge-Based Modeling of Material Behavior with Neural Networks, J. Engrg. Mech. Div., ASCE, Vol.117, No.1, pp.132-153, 1991.1
- 2) 若林 實: 構造物の減衰とエネルギー吸収能力について, 京都大学防災研究所年報, 第17号A, pp.27-47, 1974.4
- 3) 日本建築学会: 建築物の耐震設計資料, pp.233-257, 1981.4
- 4) Ramberg, W., and Osgood, W.R. : Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters, NACA, Technical Note, No.902, 1943.7
- 5) Jennings, P.C. : Periodic Response of a General Yielding Structure, J. Engrg. Mech. Div., ASCE, Vol.90, EM2, pp.131-166, 1964.4
- 6) Iwan, W.D. : The Distributed-Element Concept of Hysteretic Modeling and its Application to Transient Response Problems, Proc. of the 4th World Conf. on Earthquake Engineering, Vol. II, A4, pp.45-57, 1969.1
- 7) Rumelhart, D.E., McClelland, J.L., and the PDP Research Group: Parallel Distributed Processing -Volume 1: Foundations, MIT Press, pp.318-362, 1986
- 8) Rumelhart, D.E., Hinton, G.E., and Williams, R.J. : Learning Representations by Back-Propagating Errors, Nature, Vol.323, No.9, pp.533-536, 1986.9
- 9) 舟橋賢一: ニューラル・ネットワークによる連続写像の近似的実現について, 電子情報通信学会技術研究報告, MBE88-9, 1988.4
- 10) 舟橋賢一: ニューラル・ネットワークのcapabilityについて, 電子情報通信学会技術研究報告, MBE88-52, 1988.7
- 11) 栗田多喜夫: 情報量基準による3層ニューラルネットの隠れ層のユニット数の決定法, 電子情報通信学会論文誌 D-II, Vol.J73-D-II, No.11, pp.1872-1878, 1990.10

(1991年9月30日受付)